

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL – Mestrado

RÔMULO MENCK ROMANICHEN

**REFORÇO DE CONSOLOS DE CONCRETO COM PROTENSÃO EXTERNA**

MARINGÁ  
2018

RÔMULO MENCK ROMANCIHEN

REFORÇO DE CONSOLOS DE CONCRETO COM PROTENSÃO EXTERNA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Alves de Souza

MARINGÁ  
2018

# RÔMULO MENCK ROMANICHEN

## REFORÇO DE CONSOLOS DE CONCRETO COM PROTEÇÃO EXTERNA

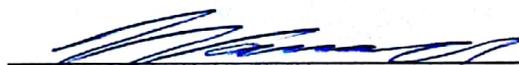
Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Maringá, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, na área de concentração Estruturas para obtenção do título de Mestre.

Aprovada em 20 de fevereiro de 2018.



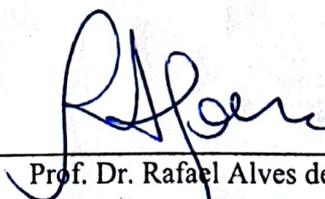
Prof. Dr. Luiz Carlos de Almeida

**Membro FEC/UNICAMP**



Prof. Dr. Leandro Vanalli

**Membro UEM**



Prof. Dr. Rafael Alves de Souza

**Orientador UEM**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR, Brasil)

R758r Romanichen, Rômulo Menck  
Reforço de consolos de concreto com protensão  
externa / Rômulo Menck Romanichen. -- Maringá, PR,  
2018.  
153 f.: il. color.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Alves de Souza.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de  
Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil, 2018.

1. Escoras (Engenharia). 2. Concreto armado -  
Comportamento estrutural. I. Souza, Rafael Alves,  
orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro  
de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III.  
Título.

CDD 23.ed. 624.18341

Márcia Regina Paiva de Brito – CRB-9/1267

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por mais esta graça na minha vida.

À Universidade Estadual de Maringá por proporcionar a oportunidade tanto da minha graduação quanto desta especialização.

A minha esposa Francine pelo constante apoio e incentivo ao longo desta caminhada, pois sem ela nada disto teria acontecido.

Aos meus pais que se dedicaram à minha educação.

Ao Professor Dr. Rafael pela orientação, dedicação e paciência. Que você professor, continue sempre assim, com sua energia, disciplina e compromisso.

A todos os professores e funcionários do PCV.

A todos os colegas do curso, pela amizade e apoio que sempre manifestaram durante a convivência ao longo destes anos.

O mais tolo de todos os erros ocorre quando jovens inteligentes acreditam perder a originalidade ao reconhecer a verdade já reconhecida por outros.

Johann Wolfgang von Goethe.

## I. RESUMO

As alterações no uso das edificações, fazem com que a carga a ser suportada pelos pavimentos seja modificada. Isso geralmente ocorre pela necessidade da criação de depósitos, instalação de maquinário pesado, guindastes, etc. onde as estruturas que passam a receber cargas superiores aquelas as quais foram dimensionadas, necessitam ser reforçadas. Em construções do tipo pré-moldado/pré-fabricado os consolos são os elementos responsáveis por receber as cargas advindas das lajes e vigas, e transmiti-las aos pilares, caracterizando-se assim como regiões de concentração de tensões. Assim, este trabalho tem por objetivo o estudo do comportamento de consolos de concreto armado reforçados com barras externas protendidas. Para isto, foram realizadas análises não-lineares de consolos através do software ATENA, e verificações analíticas de consolos através de modelos de escoras e tirantes. As análises, demonstraram que o desenvolvimento das tensões nos consolos curtos, protendidos externamente ou não, podem ser descritas por escoras de compressão e tirantes. A fissuração dos consolos foi influenciada pela protensão. A comparação da capacidade de carga dos consolos com resultados experimentais, resultou em diferenças entre 2% e 24%. A determinação analítica da capacidade de carga de consolos de acordo com a NBR 6118:2014, apresentou resultados divergentes em relação aos resultados experimentais, demonstrando que o modelo de treliça e parâmetros de resistência propostos pela norma conduzem a resultados conservadores a favor da segurança.

**Palavras-chave:** Modelo de Escoras e Tirantes. Consolo. Pós-Tensão.

## II. ABSTRACT

Changes in the use of buildings cause the load to be supported by the floors to be modified. This usually occurs due to the need to create deposits, installation of heavy machinery, cranes, etc. where the structures that receive loads higher than those which have been dimensioned, need to be reinforced. In prefabricated / pre-fabricated constructions the corbels are the elements responsible for receiving the loads coming from the slabs and beams, and transmit them to the pillars, thus characterizing regions of stress concentration. Thus, this work has as objective the study of the behavior of reinforced concrete corbels reinforced with prestressed external bars. For this, non-linear analyzes of consoles were performed through the ATENA software, and analytical checks of consoles through strut and tie models. The analyzes showed that the development of stresses on short consoles, externally or non-externally protruded, can be described by compression struts and ties. The cracking of the consoles was influenced by the protension. The comparison of the load capacity of the corbels with experimental results, resulted in differences between 2% and 24%. The analytical determination of the load capacity of consoles according to NBR 6118: 2014 presented divergent results in relation to the experimental results, demonstrating that the truss model and resistance parameters proposed by the standard lead to conservative results in favor of safety.

**Key-words:** Strut and tie model. Corbel. Post Tension.

### III. SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVO</b> .....	<b>5</b>
2.1.1	<i>OBJETIVO GERAL</i> .....	5
2.1.2	<i>OBJETIVOS ESPECIFICOS</i> .....	5
<b>3</b>	<b>MODELO DE ESCORAS E TIRANTES</b> .....	<b>6</b>
3.1	DIMENSIONAMENTO DAS ESCORAS, TIRANTES E NÓS .....	8
3.1.1	<i>ESCORAS</i> .....	8
3.1.2	<i>NÓS</i> .....	9
3.1.3	<i>PARÂMETROS DE RESISTÊNCIA DAS ESCORAS E NÓS</i> .....	12
3.1.3.1	SCHALAICH E SCHAFER (1991) .....	12
3.1.3.1.1	ESCORAS: .....	12
3.1.3.1.2	NÓS .....	12
3.1.3.2	ABNT NBR 6118:2014 .....	13
3.1.3.3	FIP COMMISSION 3 – PRACTICAL DESIGN OF STRUCTURAL CONCRETE .....	14
3.1.3.4	ACI 318-14 .....	15
3.1.3.4.1	ESCORAS .....	15
3.1.3.4.2	NÓS .....	16
3.2	TIRANTES .....	17
<b>4</b>	<b>CONSOLOS</b> .....	<b>18</b>
4.1	KRIZ E RATHS (1965) .....	19
4.2	HAGBERG (1983) .....	19
4.3	CÓDIGOS NORMATIVOS DE PROJETO .....	21
4.3.1	<i>NBR 6118:2014</i> .....	21
4.3.2	<i>NBR 9062:2006</i> .....	23
4.3.3	<i>CEB - FIP COMMISSION 3 – PRACTICAL DESIGN OF STRUCTURAL CONCRETE</i> .....	24
<b>5</b>	<b>REFORÇO POR MEIO PROTENSÃO EXTERNA</b> .....	<b>27</b>
<b>6</b>	<b>CONSOLOS PÓS-INSTALADOS E CONSOLOS REFORÇADOS COM BARRAS DE PROTENSÃO</b> .....	<b>35</b>
6.1	ESTUDO EXPERIMENTAL DE CONSOLOS DE CONCRETO COM FIBRAS MOLDADOS EM ETAPAS DISTINTAS DOS PILARES (COSTA, 2009) .....	35
6.2	CONSOLOS INSTALADOS EM ETAPA POSTERIOR À CONCRETAGEM DE PILAR COM AUXÍLIO DE ADESIVO QUÍMICO (DAMASCENO, 2016) .....	37
6.3	URBAN E KRAWCZYK (2015) .....	39
6.4	LACHOWICZ E NAGRODZKA-GODYCKA (2015) .....	44
6.5	NAGRODZKA-GODYCKA (1999) .....	49
6.6	EXEMPLO DE PROJETO PARA MODELO DE ESCORAS E TIRANTES – CONSOLO PRÉ-MOLDADO ADAPTADO A PILAR .....	55
<b>7</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</b> .....	<b>59</b>
<b>8</b>	<b>ANÁLISE NÃO-LINEAR COM O ATENA</b> .....	<b>62</b>

8.1	TIPOS DE ELEMENTOS FINITOS .....	65
8.2	MODELOS CONSTITUTIVOS .....	67
8.2.1	<i>MODELO CONSTITUTIVO SBETA (CCSBetaMaterial)</i> .....	67
8.2.2	<i>RELAÇÃO TENSÃO x DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO</i> .....	70
8.2.3	<i>COMPORTEAMENTO A COMPRESSÃO ANTERIOR A TENSÃO DE PICO</i> .....	75
8.2.4	<i>COMPORTEAMENTO A COMPRESSÃO APÓS A TENSÃO DE PICO</i> .....	76
8.2.5	<i>COMPORTEAMENTO DO ABRANDAMENTO DA LEI DE DEFORMAÇÃO A COMPRESSÃO BASEADA NA DEFORMAÇÃO</i> .....	77
8.2.6	<i>LIMITADORES DE LOCALIZAÇÃO</i> .....	77
8.2.7	<i>PROCESSO DE FRATURA E LARGURA DE ABERTURA</i> .....	79
8.2.8	<i>CRITÉRIO DE RUPTURA SOB ESTADO BIAXIAL DE TENSÕES DO CONCRETO</i> .....	80
8.2.8.1	<i>RUPTURA À COMPRESSÃO</i> .....	80
8.2.8.2	<i>RUPTURA À TRAÇÃO</i> .....	82
8.2.9	<i>MODELO DE FISSURAÇÃO DISTRIBUIDA</i> .....	82
8.2.10	<i>RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO FISSURADO</i> .....	82
8.3	MODELO CONSTITUTIVO DO AÇO .....	83
<b>9</b>	<b>ANÁLISE NÃO-LINEAR DE CONSOLOS</b> .....	<b>86</b>
9.1	CARACTERÍSTICAS DO CONSOLO WI-4 E WI-2 .....	91
9.2	CARACTERÍSTICAS DO CONSOLO WII-4 E WII-2 .....	92
9.3	RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	95
9.3.1	<i>CONSOLO WI</i> .....	97
9.3.2	<i>CONSOLO WI-2</i> .....	102
9.3.3	<i>CONSOLO WII</i> .....	110
9.3.4	<i>CONSOLO WII-2</i> .....	116
<b>10</b>	<b>ANÁLISE ANÁLITICA DOS CONSOLOS WI-4, WI-2, WII-4 E WII-2</b> .....	<b>125</b>
10.1	VERIFICAÇÃO SEGUNDO A NBR 6118:2014 .....	125
10.1.1	<i>CONSOLO WI-4</i> .....	126
10.1.2	<i>CONSOLO WII-4</i> .....	132
10.2	MODELO DE ESCORAS E TIRANTES COM USO DE PROTENSÃO EXTERNA .....	135
10.2.1	<i>CONSOLO WI-2</i> .....	136
10.2.2	<i>CONSOLO WII-2</i> .....	140
10.3	COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS COM DADOS EXPERIMENTAIS .....	144
<b>11</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>146</b>
<b>12</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>148</b>

#### IV.LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema simplificado de peça protendida com uso de pós-tensão.....	2
Figura 2 – Arranjo estrutural de um consolo em pilar.....	3
Figura 3 – Reforço de ponte com protensão externa.....	4
Figura 4 – Regiões D.....	6
Figura 5 - Exemplo de aplicação do processo de caminho de carga em viga parede.....	8
Figura 6 - Configurações típicas de campos de tensão de compressão.....	9
Figura 7 - Nós típicos.....	10
Figura 8 – Nós típicos.....	11
Figura 9 – Consolo.....	18
Figura 10 - Modelo proposto por Hagberg.....	20
Figura 11 – Modelo de escoras e tirantes segundo NBR 6118.....	22
Figura 12 – Modelo de escoras e tirantes para consolo (com $a < z/2$ ).....	25
Figura 13 – Padrões de ancoragem (Rudloff).....	30
Figura 14 – Barra <i>Macalloy 1030</i> .....	32
Figura 15 – Macaco Hidráulico.....	33
Figura 16 – Sequência de fabricação dos consolos – Costa (2009).....	35
Figura 17 – Sequência de fabricação dos consolos – Damasceno (2016).....	37
Figura 18 - Consolos ensaiados: a) series A, b) series B; barras de reforço do consolos com os detalhes de tracionamento A-I e B-I.....	39
Figura 19 - Consolos série C testados: o reforço do consolo C-0, os detalhes de tensionamento dos consolos C-I e C-II.....	40
Figura 20 - Comparação das forças atuantes no consolos: A-0 (sem pós tensão) e A-I (com o pós tensão).....	40
Figura 21 - Comparação da forças atuantes no consolos: C-0 (sem pós tensão), C-I e C-II (com pós tensão).....	41
Figura 22 - Consolo C-I após a falha.....	42
Figura 23 - Consolo A-0 após a falha.....	43
Figura 24 - Geometria e reforço do consolo WI-S-1.....	44
Figura 25 - Geometria e reforço do consolo WI-S-2.....	45
Figura 26 – Consolos WS-1 após a ruptura: (a) WI-S-1, (b) WII-S-1, (c) WIII-S-1.....	46
Figura 27 - Consolos WS-2 após a ruptura: (a) WI-S-2, (b) WII-S-2, (c) WIII-S-2.....	47
Figura 28 – Tensão na barra de protensão (WII-S-1).....	47

Figura 29 – Tensão na barra de protensão (WII-S-2).....	48
Figura 30 - Consolos ensaiados: A – a/d = 1,0; B – a/d = 0,6; C – a/d = 0,3.....	50
Figura 31 - Barras externa para protensão.....	51
Figura 32 - Propagação das fissuras WII-2:0,6 $V_{ubc}(a)$ , $V_u(b)$ .....	52
Figura 33 - Abertura de fissuras: (a) $V = V_u$ ; (b) $V = V_{ubc}$ .....	52
Figura 34 - Cargas de ruptura.....	53
Figura 35 - Tensão nas barras de reforço para o modelo WI-2 – NAGRODZKA-GODYCKA(1999).....	54
Figura 36 - Tensão nas barras de reforço para o modelo WI-3 – NAGRODZKA-GODYCKA(1999).....	55
Figura 37 - Consolo pré-moldado com barras de pós tensão.....	56
Figura 38 - Modelos: simplificado (a esquerda), refinado (a direita).....	57
Figura 39 – Interface do Software ATENA 2D.....	63
Figura 40 - Geometria dos elementos CCIsoTruss <...>.....	66
Figura 41 - Geometria dos elementos CCIsoQuad <...>.....	66
Figura 42 - Geometria dos elementos CCIsoTriangle<...>.....	67
Figura 43 - Componentes no estado plano de tensão (esquerda), componentes no estado plano de deformação (direita).....	68
Figura 44 – Diagrama tensão x deformação para uniaxial de tensões do concreto.....	70
Figura 45 - Lei exponencial de abertura de fissura.....	72
Figura 46 - Lei linear de abertura de fissura.....	73
Figura 47 - Lei linear de abrandamento baseada na deformação.....	73
Figura 48 - Lei do reforço em fibra de aço baseada na energia de fratura.....	74
Figura 49 - Lei do reforço em fibra de aço baseada na deformação.....	74
Figura 50 - Diagrama tensão x deformação para o concreto a compressão.....	75
Figura 51 - Definição dos localizadores de banda.....	79
Figura 52 - Estágio de abertura de fissuras.....	80
Figura 53 - Função biaxial de ruína do concreto.....	81
Figura 54 - Diagrama tensão x deformação bilinear.....	84
Figura 55 - Diagrama tensão x deformação multi-linear.....	84
Figura 56 – Detalhes do consolo WI-4.....	87
Figura 57 – Detalhes do consolo WI-2.....	87

Figura 58 – Detalhes do consolo WII-4.....	88
Figura 59 – Detalhes do consolo WII-2.....	88
Figura 60 - Modelo Constitutivo SBETA .....	89
Figura 61 – Configuração inicial (consolo duplo).....	90
Figura 62 – Distribuição dos macro-elementos WI.....	91
Figura 63 – Dinâmica de carregamento (Consolo WI-2) .....	92
Figura 64 – Distribuição dos macro-elementos WII-2 .....	93
Figura 65 - Dinâmica de carregamento (Consolo WII-2) .....	94
Figura 66 – Tensões nos consolos: a) WI-4 (passo 30), b) WII-4(passo 55) .....	95
Figura 67 – Fissuras nos consolos: a) WI-4 (Passo 30), b) WII-4 (Passo 55).....	96
Figura 68 – Tensões nos consolos: a) WI-2 (passo 31), WII-2 (passo 56).....	97
Figura 69 – Progressão das tensões no consolo WI-4 .....	98
Figura 70 – Fissuração do consolo WI-4 (150 kN) .....	99
Figura 71 – Fissuras maiores do 0,05 mm no consolo WI-4.....	100
Figura 72 – Gráfico das tensões no tirante por carga aplicada: consolo WI-4.....	100
Figura 73 – Deformações principais no consolo WI-4: a) Passo 45, b) Passo 46.....	101
Figura 74 – Progressão das tensões no consolo WI-2 .....	103
Figura 75 – Tensões nos últimos passos de carga do consolo WI-2 .....	104
Figura 76 - Fissuração do consolo WI-2 (290 kN): a) Fissuras totais, b) Fissuras maiores que 0,1 mm.....	105
Figura 77 - Fissuração do consolo (150 kN): (a) WI-4 (b) WI-2 .....	106
Figura 78 – Comparativo das tensões principais de compressão para o mesmo carregamento: a) consolo WI-4, b) consolo WI-2 .....	107
Figura 79 – Gráfico das tensões no tirante e barras externas por carga aplicada: consolo WI-2 .....	108
Figura 80 – Tensões na armadura do tirante para o consolo WI-2: a) Passo 31, b) Passo 60, c) Passo 89 .....	109
Figura 81 – Comparativo das tensões desenvolvidas no tirante e barras externas do consolo WI-2, aferidas em análise não linear e estudo experimental.....	110
Figura 82 – Progressão das tensões no consolo WII .....	112
Figura 83 – Tensões no passo 70 (Consolo WII) .....	113
Figura 84 - Fissuração do consolo WII-4(275 kN).....	114
Figura 85 – Fissuração no consolo WII: (a) ATENA, (b) NAGRODZKA-GODYCKA (1999) .....	115

Figura 86 – Gráfico das tensões no tirante por carga aplicada: consolo WII.....	115
Figura 87 – Deformações principais no consolo WII: a) Passo 68, b) Passo 69, c) Passo 70, d) Passo 71 .....	116
Figura 88 - Progressão das tensões no consolo WII-2 .....	118
Figura 89 - Tensões nos últimos passos de carga do consolo WII-2.....	119
Figura 90 - Fissuração do consolo WII-2 (450 kN).....	120
Figura 91 – Comparação da fissuração do consolo WII-4 e WII-2 paraa carga de 275 kN...	121
Figura 92 – Comparativo entre as tensões principais de compressão sob mesmo carregamento: a) consolo WII-4, b) consolo WII-2 .....	122
Figura 93 - Gráfico das tensões no tirante e barras externas por carga aplicada: consolo WII-2 .....	123
Figura 94 - Comparativo das tensões desenvolvidas no tirante e barras externas do consolo WII-2, aferidas em análise não linear e estudo experimental.....	124
Figura 95 – Consolo WI-4 de acordo com a NBR 6118:2014 .....	126
Figura 96 – Determinação da largura da escora .....	127
Figura 97 - Consolo WI-4 (NBR 6118:2014): Nó 1 (CCT) .....	129
Figura 98 – Consolo WI-4 (NBR 6118:2014): Nó 2 (CCC) .....	130
Figura 99 - Consolo WII-4 de acordo com a NBR 6118:2014.....	132
Figura 100 – Consolo WII-4 (NBR 6118:2014): Nó 1 (CCT) .....	133
Figura 101 – Nó 2 – Consolo WII-4(NBR 6118:2014).....	134
Figura 102 – Modelo de bielas proposto para o consolo WI-2 .....	136
Figura 103 - Nó 1 (WI-2) .....	137
Figura 104 – Nó 2 (WI-2).....	138
Figura 105 - Modelo de bielas proposto para o consolo WII-2.....	140
Figura 106 - Nó 1 (WII-2) .....	141
Figura 107 – Nó 2 (WII-2) .....	142

## V.LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Coeficiente $\beta_s$ .....	16
Tabela 2 - Coeficiente $\beta_n$ para regiões nodais. ....	17
Tabela 3 – Valores de K .....	33
Tabela 4 – Resumo das características dos consolos.....	36
Tabela 5 – Força máxima experimental dos modelos ensaiados – Costa (2009).....	36
Tabela 6 – Força de protensão nas barras dos consolos do grupo (W-S-1).....	46
Tabela 7 – Força de protensão nas barras (WS-2).....	46
Tabela 8 – Comparativo entre a capacidade de carga dos consolos protendidos com consolos normalmente armados.....	48
Tabela 9 – Tensão de escoamento para cada barra.....	49
Tabela 10 – Cargas de ruptura – NAGRODZKA-GODYCKA (1999).....	53
Tabela 11 - Fórmulas padrão para os parâmetros do material (SBETA) .....	69
Tabela 12 – Tensões de escoamento conforme a diâmetro da armadura .....	89
Tabela 13 – Características dos macro-elementos.....	92
Tabela 14 – Características dos macro-elementos.....	93
Tabela 15 – Capacidade de carga por diversos métodos .....	144
Tabela 16 – Comparação da tensões na armadura no momento da ruptura dos consolos.....	145



## 1 INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento econômico, a demanda por construções comerciais/industriais que necessitam ser alteradas fica evidente, e neste cenário de crescimento, muitas das construções existentes acabam passando por mudanças de utilização, tendo em vista que nem sempre é possível ou viável a execução de novas construções. Assim, muitas vezes são necessárias modificações em suas estruturas, afim de suprir as novas necessidades da atividade a ser desenvolvida.

A alteração no uso das edificações, na maior parte das vezes, é acompanhada pelo aumento da carga a ser suportada pelos pavimentos. Isso pode ocorrer pela necessidade da criação de depósitos, instalação de maquinário pesado, guindastes, etc. As estruturas que passam a receber cargas superiores aquelas as quais foram dimensionadas, devem ser analisadas, afim de que sejam garantidas a utilização e segurança das mesmas, o que, por muitas vezes não acontece.

No Brasil, historicamente, os proprietários de imóveis e inquilinos não possuem a cultura de procurarem o auxílio de profissionais da engenharia para a realização de reformas e ampliações em suas edificações, confiando esta atividade apenas ao conhecimento empírico da mão de obra que executará o serviço (CONSELHO DE ARQUITETURA E URBANISMO, [2015]). Também, não possuem conhecimento algum sobre a capacidade de carga das edificações que construíram ou alugaram, e passam a submetê-las aos mais variados usos. Atitudes como estas, induzem as estruturas a estados de tensão e fissuração que podem comprometer a integridade das mesmas, o que muitas vezes, faz com que estas necessitem ser reforçadas. Outras situações como falhas no projeto, falhas na execução, catástrofes como incêndios e impactos, também podem levar a necessidade de reforço das estruturas.

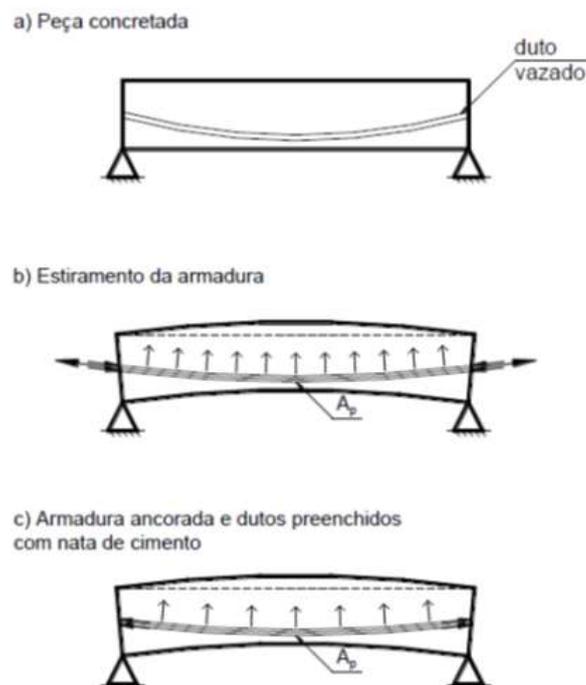
O reforço de estruturas de concreto, inevitavelmente tem como característica o alto custo e a dificuldade de execução. A necessidade de intervenções estruturais em edificações além de seu próprio custo em si, impõem custos de mobilização e paralisação das atividades desenvolvidas no local. Em edifícios residenciais os moradores necessitam desocupar os imóveis e em ambientes industriais a produção é paralisada, além é claro, do efeito psicológico que isto causa nos ocupantes do local (SOUZA; RIPPER, 1998).

Atualmente as principais técnicas de reforço de estruturas, são: à utilização de fibras de polímeros (carbono, vidro, sintéticos), instalação de chapas de aço, aumento da seção dos

elementos estruturais e uso da protensão. Todas as técnicas citadas, possuem a capacidade de aumentar a resistência do elemento estrutural à ação das cargas aplicadas, porém a única técnica que consegue inserir a ação de forças contrárias internamente ao sistema, é a protensão. Técnicas de reforço com fibras de carbono veem sendo utilizadas ultimamente por apresentarem uma grande capacidade de resistência, porém demandam mão de obra altamente especializada e o seu custo é algo em torno de 40 a 50 % mais caro que outras técnicas convencionais, além de conferirem a estrutura um comportamento mais frágil, o que pode ser perigoso em algumas situações (RECUPERAÇÃO, 2004).

O reforço com barras de aço externas apesar de não ser simples, apresenta-se como uma solução “trivial”, pois a grande maioria dos profissionais da construção civil estão familiarizados a trabalhar com barras de aço.

Quando se utilizam barras de aço pós tensionadas fixadas em aparelhos de apoio como forma de reforço, obtêm-se a vantagem de garantir a interação física entre o novo e o velho material, uma vez que aplicação do esforço de protensão comprime o novo contra o velho. A Figura 1 apresenta um esquema de peça pós tensionada.



**Figura 1 – Esquema simplificado de peça protendida com uso de pós-tensão**  
Fonte: BASTOS (2015).

Em estruturas pré-moldadas os elementos que realizam o apoio e transferência das cargas das vigas aos pilares são os consolos. Na fabricação de pré-moldados, normalmente, os

pilares e consolos são confeccionados monoliticamente, em um único elemento e em uma única etapa. Assim, no cenário de uma ampliação em estrutura já existente, estes consolos necessitam ser reforçados posteriormente. A Figura 2 apresenta a armação de um consolo monolítico com o pilar.



**Figura 2 – Arranjo estrutural de um consolo em pilar**

Fonte: FIB BULLETIN 43 (2008).

A análise do sistema de forças que se origina internamente nos consolos se resume basicamente a um modelo de escoras e tirantes, os quais devem ser dimensionados de forma que sua ruptura ocorra por falência do tirante (NBR 6118:2014). Nesta situação o concreto da escora trabalha com folga de resistência, condição interessante quando se deseja aumentar a capacidade de carga de um consolo, pois agora o reforço se resume em incrementar a armadura do tirante.

Atualmente alguns estudos veem sendo realizados de forma a analisar as possíveis formas e eficácia de se instalar/reforçar consolos de concreto armado, sendo que alguns autores propõem que isto seja feito através da ancoragem química das armaduras do tirante, porém, como bem alerta Damasceno (2016) para que isto seja possível é necessário garantir a efetiva reação e eficácia destes produtos.

Uma forma já bastante conhecida de instalação de tirantes, utilizada nos mais variados elementos estruturais, são as barras de protensão e seus acessórios, as quais podem ser instaladas externamente aos elementos estruturais, ocasionando assim menos interferência a

estrutura. Essa técnica vem sendo utilizada em elementos estruturais que necessitam ser confinados, como blocos de fundação, vigas e pilares, exemplo disto pode ser visto na Figura 3, onde barras externas são instaladas na estrutura de uma ponte (GOMES, 2008).



**Figura 3 – Reforço de ponte com protensão externa**

Fonte: VITÓRIO e BARROS, 2011.

Sendo assim, com o intuito de viabilizar o aumento da capacidade de carga de consolos em concreto armado, já existentes, o presente trabalho visa, propor uma forma de dimensionamento de reforço externo, através do modelo de escoras e tirantes. Para isto, será apresentado um modelo analítico do reforço, e estudado o comportamento destes consolos através de uma análise não-linear. Será utilizado o software de análise não-linear, ATENA, e seus resultados validados por comparação com trabalhos já realizados.

## 2 OBJETIVO

### 2.1.1 OBJETIVO GERAL

Estudar o comportamento de consolos de concreto armado reforçados com barras externas protendidas, por meio de análise não-linear, e propor uma abordagem de dimensionamento com base no método de escoras e tirantes.

### 2.1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

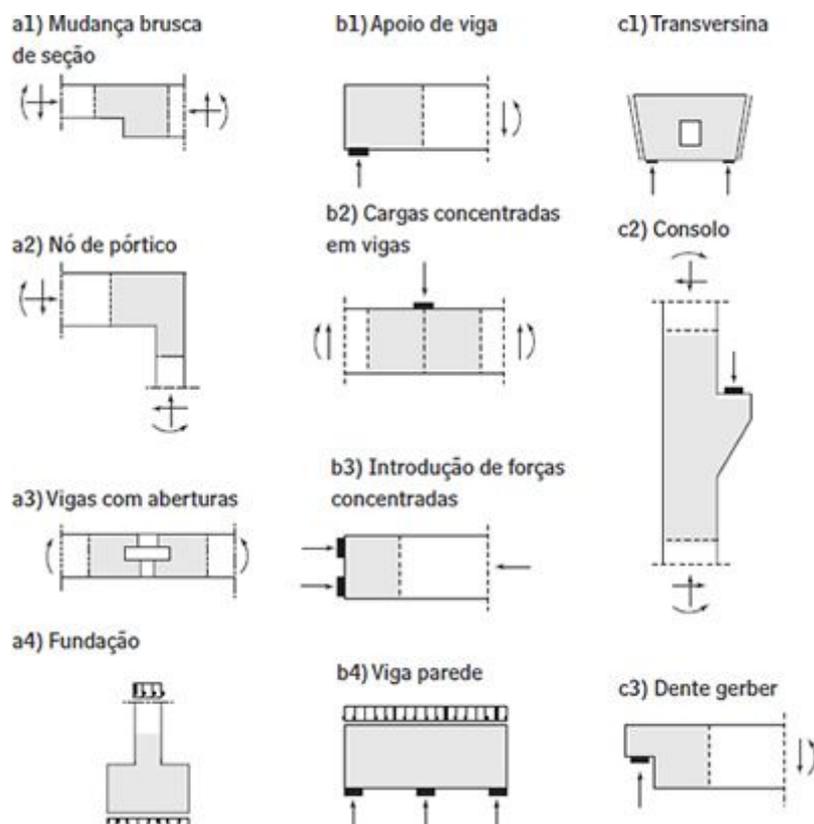
- Realizar análises não-lineares através do Software ATENA 2D, obtendo o fluxo das tensões internamente a estrutura;
- Comparar os resultados das análises com dados experimentais;
- Aplicar as diretrizes normativas da NBR 6118:2014 para o cálculo de consolos curtos através do modelo de escoras e tirantes;
- Comparar os resultados do modelo normativo com dados experimentais;
- Propor um modelo de escoras e tirantes para o dimensionamento de consolo curto reforçado por barras externas protendidas;
- Comparar os resultados do modelo proposto com dados experimentais.

### 3 MODELO DE ESCORAS E TIRANTES

No dimensionamento de elementos de concreto armado, todas as partes da estrutura, devem ser analisadas por modelos que representem adequadamente os esforços aos quais estas estão submetidas.

Na maior parte dos elementos estruturais existem as chamadas regiões B, regiões onde a hipótese de Bernoulli da distribuição linear da deformação é válida, o que possibilita que as forças que ali agem, internamente, possam ser derivadas em momentos, esforço cortante e força normal. Nestas regiões, quando não fissuradas, as tensões são calculadas de acordo com a teoria elástica, já em áreas fissuradas, são calculadas através de métodos padronizados.

Porém, nas estruturas existem regiões onde a distribuição da deformação não ocorre de forma linear, as chamadas regiões D (alusão a descontinuidade). Logo, a distribuição dos esforços não pode ser feita através da teoria clássica (SCHALAICH, SCHAFER, 1991). A Figura 4 apresenta exemplos de regiões D.



**Figura 4 – Regiões D**

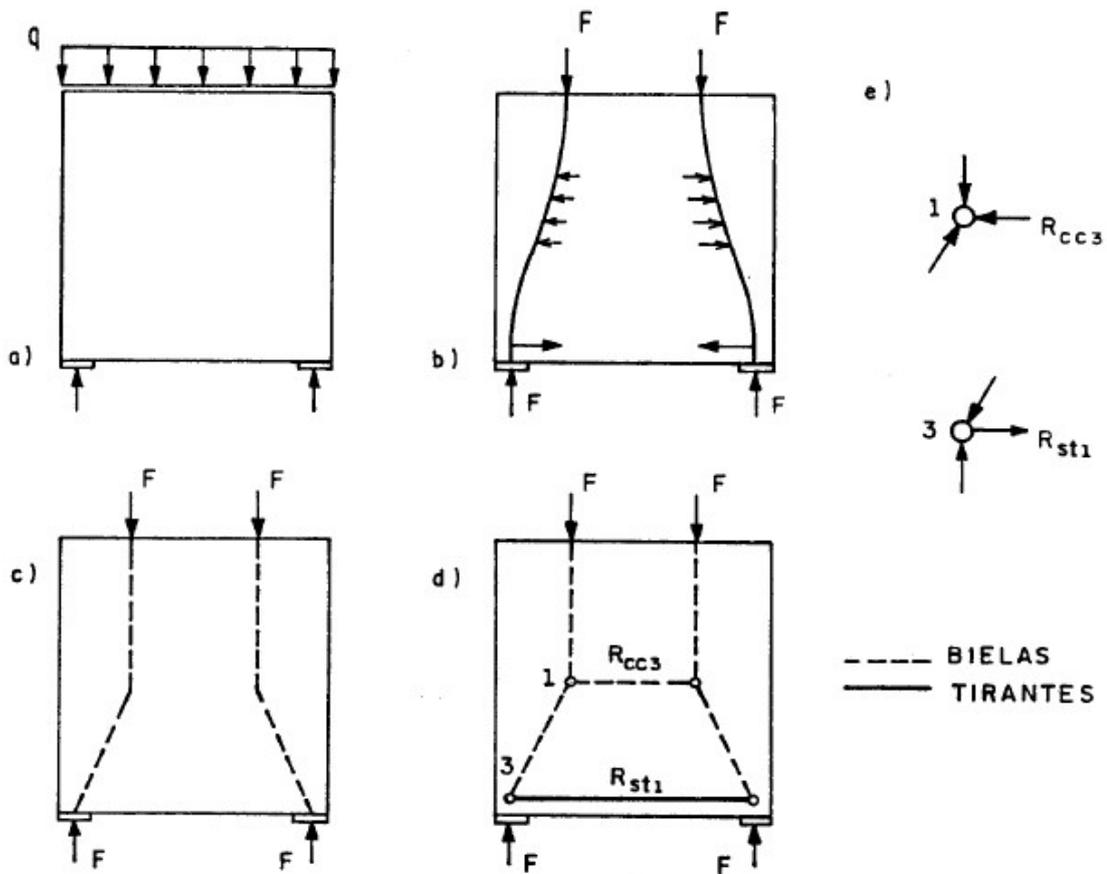
Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

O caminhamento das tensões em regiões D, pode ser adequadamente descrito através do Modelo de Escoras e Tirantes. Este modelo surgiu a partir da teoria clássica da treliça de

Ritter e Morsch, onde os elementos comprimidos (escoras) representam campos de tensões de compressão no concreto, enquanto os elementos tracionados (tirantes) representam campos de tensões de tração(SILVA, 1991).

Para a determinação dos modelos da estrutura, pode-se utilizar o fluxo das tensões através do processo de caminho de carga, onde, caso disponha-se das tensões elásticas e suas direções principais a definição do modelo é imediata. Analisado o fluxo das tensões, a geometria do modelo pode ser definida observando o tipo de ação atuante, ângulos entre as escoras e tirantes, área de aplicação das ações e reações e a distribuição da armadura (SILVA, 1991).

O processo de caminho de carga, consiste em primeiramente garantir que o equilíbrio externo das forças de contorno seja satisfeito, na sequência as forças aplicadas na estrutura devem percorrer internamente o elemento de forma que se equilibrem com forças em sua outra extremidade, para isso os caminhos percorridos devem ser alinhados e não podem se interceptar, sendo o mais curtos o possível. Esses caminhos devem ser substituídos por linhas de um polígono os quais a partir de uma análise das ações são definidos como escoras ou tirantes, curvaturas que vieram a aparecer devem ser definidas como pontos de concentração de tensões (nós), onde caso seja necessário, deve-se acrescentar barras afim de equilibrar os esforços atuantes. A Figura 5 apresenta a aplicação do modelo em uma viga parede (SILVA, 1991).



**Figura 5 - Exemplo de aplicação do processo de caminho de carga em viga parede**  
 Fonte: SILVA (1991).

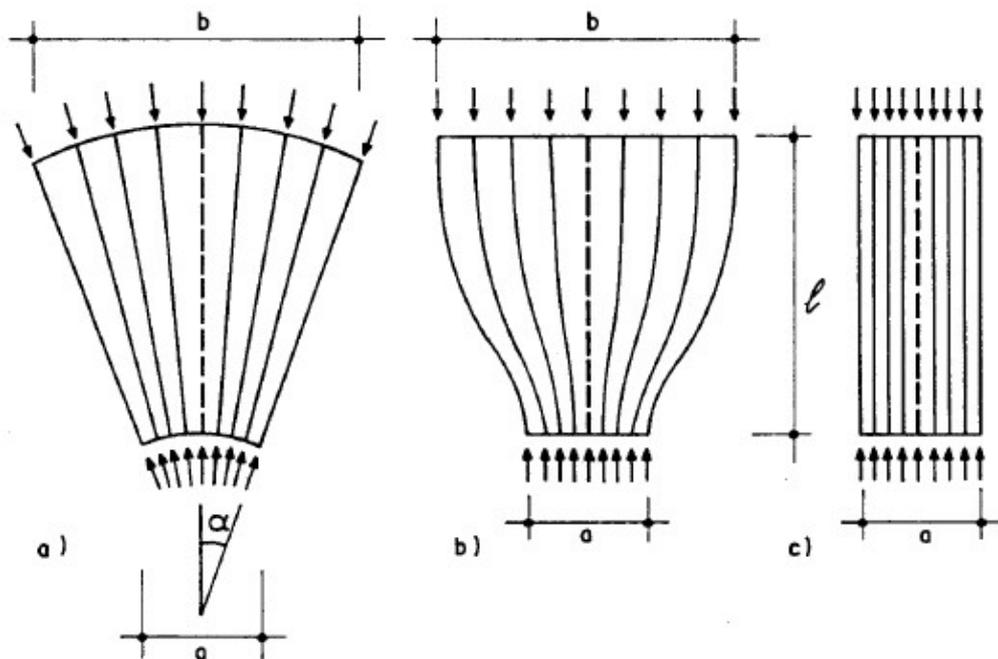
De acordo com Schalaich et. All (1991) as aberturas dos ângulos entre as escoras e os tirantes devem ser de  $45^\circ$  a  $60^\circ$ , não podendo ser menor do que  $45^\circ$  para os nós sobre altas tensões, evitando assim, problemas de incompatibilidade.

### 3.1 DIMENSIONAMENTO DAS ESCORAS, TIRANTES E NÓS

#### 3.1.1 ESCORAS

Segundo Silva (1991) as escoras são discretizações dos campos de compressão no concreto, e dependendo do formato como se distribuem podem separadas em três grupos representativos:

- Distribuição de tensão radial (escora leque): representa um campo de tensão com curvatura desprezível, geralmente ocorre onde forças concentradas são introduzidas e propagadas de maneira suave (Figura 6 (a)).
- Distribuição de tensões em linhas curvilíneas com afunilamento da seção (escora garrafa): geralmente ocorre quando forças concentradas são introduzidas e propagadas através de curvatura acentuadas, onde a difusão das tensões provoca compressão biaxial ou triaxial e tração transversal abaixo do local de aplicação da força (Figura 6 (b)).
- Distribuição de tensões paralela (escora prismática): ocorre quando as tensões são distribuídas uniformemente, sendo esta, a distribuição característica das regiões B (Figura 6 (c)).



**Figura 6 - Configurações típicas de campos de tensão de compressão**  
 Fonte: SILVA (1991).

### 3.1.2 NÓS:

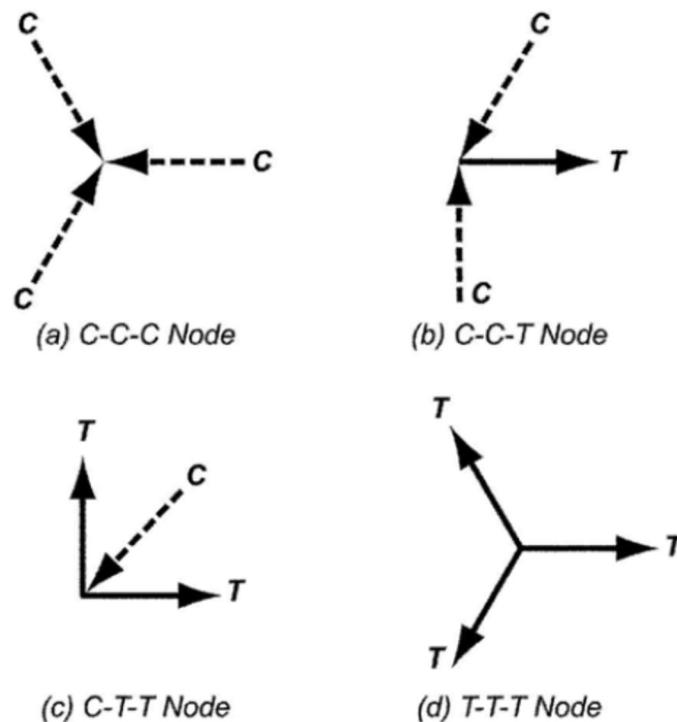
Um nó ou região nodal é formado pelo encontro de diferentes forças advindas das escoras, tirantes, forças externas e apoios, as quais nesta região (nó) são desviadas. Apesar de

nos modelos de treliça o nó ser definido como um ponto, na realidade o nome “nó” delimita uma região do concreto onde as forças são desviadas dentro de um dado comprimento e largura, e dependendo destes comprimentos podem ser definidos como concentrados ou contínuos.

Segundo Schlaich e Schafer (1991) os nós concentrados ou singulares, são nós onde o desvio das forças é feito localizadamente. Estes são classificados como críticos, e devem ter suas tensões verificadas afim de se garantir o equilíbrio das forças, e geralmente são formados por forças concentradas. Os nós contínuos são nós onde o desvio das forças ocorre dentro de um comprimento adequado, não sendo classificados como críticos, normalmente são formados pelo encontro de amplos campos de compressão, e/ou amplos campos de compressão e barras de reforço, distribuídas umas próximas as outras.

Schlaich e Schafer (1991) apresentam o formato e distribuição dos principais nós que aparecem nas estruturas. Abaixo são descritos de forma simplificada os quatro principais:

- CCC - Nós onde confluem apenas escoras de compressão (Figura 7 (a));
- CCT - Nós onde confluem apenas um tirante tracionado (Figura 7 (b));
- CTT - Nós onde confluem dois tirantes tracionado (Figura 7 (c));
- TTT - Nós onde confluem apenas tirantes tracionados (Figura 7 (d));



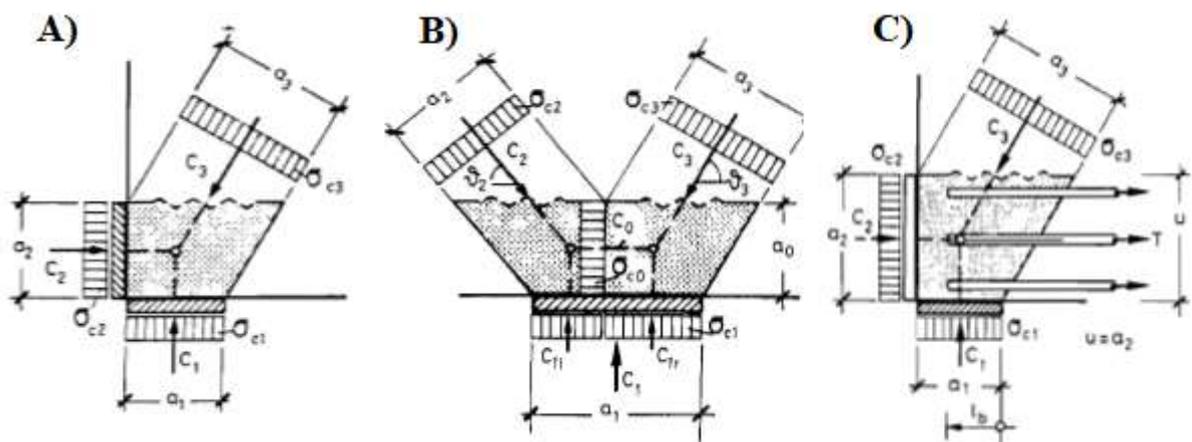
**Figura 7 - Nós típicos**

Fonte: ACI 318-14.

Segundo Silva (2003) apud Marti (1985) para a definição do nó, as larguras definidas para as escoras que neste concorrem, devem ser tais que as tensões atuantes nas escoras sejam de mesma intensidade. Desta forma, pode-se dizer, que a tensão atuante nas bielas será igual a tensão atuando no interior do nó, configurando assim, um estado pseudo-hidroestático. Para a situação de um estado pseudo-hidroestático as faces do nó serão perpendiculares ao eixo das escoras.

De acordo com o ACI 318-14 uma região nodal do tipo C-C-T pode ser representada como uma região pseudo-hidroestática, se a armadura do tirante atravessar a região nodal e ancorar-se, em seu lado oposto, em uma placa, configurando-o assim como um nó C-C-C, pois, a reação da placa de ancoragem do tirante acaba por exercer no concreto a atividade de uma escora de compressão.

A definição das regiões nodais e tensões que nelas atuam, podem ser facilmente identificadas a partir dos chamados “nós típicos”. A Figura 8 apresenta três desses nós (SCHLAICH, SCHAFFER, 1991).



**Figura 8 – Nós típicos**

Fonte: SCHLAICH E SCHAFFER (1991).

### 3.1.3 PARÂMETROS DE RESISTÊNCIA DAS ESCORAS E NÓS

#### 3.1.3.1 SCHALAICH E SCHAFFER (1991)

##### 3.1.3.1.1 ESCORAS:

- Estado de tensão uniaxial e sem perturbações:

$$f_{cd}^* = 1,0 * f_{cd} \quad \text{Equação (1)}$$

- Campos de compressão com fissuras paralelas às tensões de compressão:

$$f_{cd}^* = 0,8 * f_{cd} \quad \text{Equação (2)}$$

- Campos de compressão com fissuras inclinadas:

$$f_{cd}^* = 0,6 * f_{cd} \quad \text{Equação (3)}$$

em que:  $f_{cd}$  : resistência a compressão de projeto para estado uniaxial de tensão de acordo com o código prático.

##### 3.1.3.1.2 NÓS

- Nós, onde apenas escoras de compressão se encontram, criando um estado biaxial ou triaxial de compressão.

$$f_{cd}^* = 1,1 * f_{cd} \quad \text{Equação (4)}$$

- Nós, onde tirantes tracionados são ancorados.

$$f_{cd}^* = 0,8 * f_{cd} \quad \text{Equação (5)}$$

### 3.1.3.2 ABNT NBR 6118:2014

As tensões de compressão máximas nas escoras e regiões nodais, são definidas segundo os seguintes parâmetros.

- Escoras prismáticas e nós CCC:

$$f_{cd1}^* = 0,85 * \alpha_{v2} * f_{cd} \quad \text{Equação (6)}$$

- Escoras atravessadas por um único tirante, ou nós CCT:

$$f_{cd3}^* = 0,72 * \alpha_{v2} * f_{cd} \quad \text{Equação (7)}$$

- Escoras atravessadas por mais de um tirante, ou nós CTT ou TTT:

$$f_{cd2}^* = 0,60 * \alpha_{v2} * f_{cd} \quad \text{Equação (8)}$$

em que:  $f_{cd}$  – Resistência de cálculo à compressão do concreto;  
 $f_{ck}$  – Resistência característica do concreto à compressão;

Parâmetro  $\alpha_{v2}$ :

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{cd}}{250} \quad \text{Equação (9)}$$

### 3.1.3.3 FIP COMMISSION 3 – PRACTICAL DESIGN OF STRUCTURAL CONCRETE

Segundo o código FIP COMMISSION 3 (1999) a capacidade de escoras prismáticas ou campos de compressão paralelos deve ser reduzida para uma tensão efetiva por vários motivos. O esforço depende do estado de tensão e deformação, do estado de fissuração e das perturbações geométricas, podendo ser expresso em termos de dois fatores de redução:

$$f_{cd,eff} = \nu_1 * f_{1cd} \quad \text{Equação (10)}$$

ou

$$f_{cd,eff} = \nu_2 * f_{1cd} \quad \text{Equação (11)}$$

O fator de redução  $\nu_1$  é aplicado a escora não fissurada, se ao invés de utilizar uma distribuição realística das tensões considerar um bloco retangular de distribuição.

$$\nu_1 = 1 - \frac{f_{cd}}{250} \quad \text{Equação (12)}$$

Para o fator de redução  $\nu_2$  são várias as influências:

- Para escoras não fissuradas com distribuição de deformação uniforme.

$$\nu_2 = 1,00 \quad \text{Equação (13)}$$

- Para escoras com fissuras paralelas e costuradas com reforço transversal.

$$\nu_2 = 1,00 \quad \text{Equação (14)}$$

- Para escoras que transferem compressão através das fissuras, com aberturas de tamanho normais.

$$\nu_2 = 0,80 \quad \text{Equação (15)}$$

- Para escoras que transferem compressão através de fissuras largas em membros com tensão axial ou bordas tensionadas.

$$v_2 = 0,60 \quad \text{Equação (16)}$$

Sabendo que  $f_{1cd}$  é igual a:

$$f_{1cd} = \alpha * \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad \text{Equação (17)}$$

em que:  $\alpha = 1$  e  $\gamma_c = 1$  para estado limite de serviço;  
 $\alpha = 0,85$  e  $\gamma_c = 1,50$  para estado limite de último;

Para os nós que confluem apenas escoras de compressão a tensão a ser considerada não deve superar os valores dados pelas expressões abaixo.

- Estado biaxial de compressão:

$$f_{2cd} = 1,20 * f_{1cd} \quad \text{Equação (18)}$$

- Estado triaxial de compressão:

$$f_{3cd} = 3,88 * f_{1cd} \quad \text{Equação (19)}$$

### 3.1.3.4 ACI 318-14

#### 3.1.3.4.1 ESCORAS

A resistência de projeto para as escoras é dada pela Equação 20.

$$\phi * F_{ns} = F_{us} \quad \text{Equação (20)}$$

A resistência nominal da escora, sem reforço longitudinal, a compressão, deve ser calculada pela Equação 21.

$$f_{ns} = f_{ce} * A'_{cs} \quad \text{Equação (21)}$$

em que:  $f_{ce}$  – Resistência efetiva à compressão

A resistência efetiva a compressão é dada pela Equação 22.

$$f_{ce} = 0,85 * \beta_s * f'_c \quad \text{Equação (22)}$$

em que:  $\beta_s$  – Coeficiente de minoração de acordo com o estado de fissuração e armadura de controle de fissuração;

**Tabela 1 - Coeficiente  $\beta_s$**

Geometria e localização da escora	Reforço atravessando a escora	$\beta_s$	
Escora com seção transversal uniforme ao longo do comprimento	NA	1,0	(a)
Escora localizada em uma região da estrutura onde a largura da escora pode se espalhar lateralmente na metade do comprimento (escoras garrafas)	Satisfaz o item 23.5	0,75	(b)
	Não satisfaz o item 23.5	0,60 $\lambda$	(c)
Escoras localizadas em membros tracionados ou em região de tração dos membros	NA	0,40	(d)
Todos os outros casos	NA	0,60 $\lambda$	(e)

Fonte: Adaptado de ACI 318-14.

#### 3.1.3.4.2 NÓS

A resistência de projeto para os nós é dada pela Equação 23.

$$\phi * F_{ns} = F_{us} \quad \text{Equação (23)}$$

A resistência nominal a compressão da região nodal é dada pela expressão 24.

$$F_{nn} = f_{ce} * A_{nz} \quad \text{Equação (24)}$$

A resistência efetiva do concreto na face da região nodal considerada é dada pela Equação 25.

$$f_{ce} = 0,85 * \beta_n * f'_c \quad \text{Equação (25)}$$

em que:  $\beta_n$  – deve estar de acordo com a tabela abaixo;

**Tabela 2 - Coeficiente  $\beta_n$  para regiões nodais.**

Configuração da região nodal	$\beta_n$
Região nodal confinada por escoras, áreas de aplicação de carga, ou ambos	1,0 (a)
Região nodal ancorando um tirante	0,80 (b)
Região nodal ancorando dois ou mais tirantes	0,60 (c)

Fonte: Adaptado de ACI 318-14.

### 3.2 TIRANTES

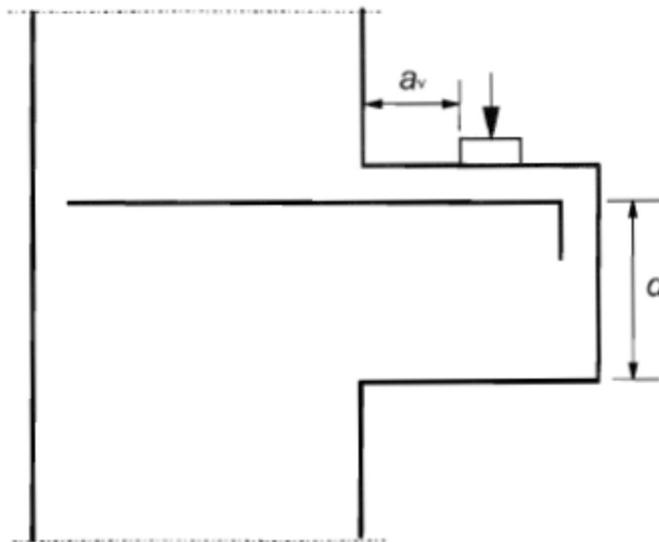
A área de armadura é obtida através da razão entre a força no tirante no estado de limite último e a resistência ao escoamento do aço, conforme a Equação 26.

$$A_s = R_{st} / f_y \quad \text{Equação (26)}$$

## 4 CONSOLOS

Consolos de concreto armado são elementos em balanço onde a carga é aplicada a uma distância ( $a$ ) da face do apoio, menor do que a altura útil ( $d$ ) do mesmo (Figura 9).

Os consolos com relação  $a/d$  entre  $(0,5 \leq a / d \leq 1)$  são classificados como consolos curtos, e os consolos com relação  $a / d < 0,5$  como muito curtos. Para as situações em que o consolo possua  $a > d$ , o elemento deve ser tratado como uma viga em balanço (NBR 6118:2016).



**Figura 9 – Consolo**

Fonte: CEN. EN 1992-1-1:2004.

Damasceno (2016) apresenta em seu trabalho de forma cronológica um relato dos principais trabalhos desenvolvidos por pesquisadores no século XX, sobre o comportamento e dimensionamento de consolos. Entre os principais encontram-se os seguintes trabalhos:

- Niedenhoff (1961) - o qual foi o primeiro a propor um modelo baseado em uma treliça simples com a formação de um tirante e uma escora de compressão;
- Most (1968) - propôs o modelo batizado de atrito-cisalhamento;
- Kriz e Raths (1965) - ensaiaram 195 amostras e chegaram a conclusões importantes, como, a importância da ancoragem do tirante na face oposta do consolo ao apoio, demonstrando a ineficácia do gancho vertical; a necessidade de uma armadura mínima na ligação entre o consolo e o pilar; e a importância dos estribos verticais e horizontais no impedimento da ruptura da escora de concreto;

- Hagberg (1983) - demonstrou que as elásticas são desprezíveis em relação as deformações plásticas na ruptura, sendo o escoamento da armadura principal um critério de ruptura.

A seguir são apresentados os principais resultados dos trabalhos desenvolvidos por KRIZ E RATHS (1965) e HAGBERG (1983).

#### **4.1 KRIZ E RATHS (1965)**

Kriz e Raths ensaiaram 195 consolos de concreto armado, onde a partir destes propuseram critérios de projeto para o dimensionamento de consolos. A época os consolos eram dimensionados com base nas equações de flexão e cortante derivadas para o cálculo de vigas. A partir dos resultados dos ensaios, ficou comprovado que o dimensionamento dos consolos com base nestas equações conduzia a projetos questionáveis em relação à segurança, principalmente quando a taxa de armadura do tirante superava 1% e estribos verticais eram prescritos para resistir os esforços cortantes. Outro ponto de grande relevância no trabalho, foi o estudo da resistência dos consolos na presença de esforços horizontais, o que até o momento ainda não era levado em consideração.

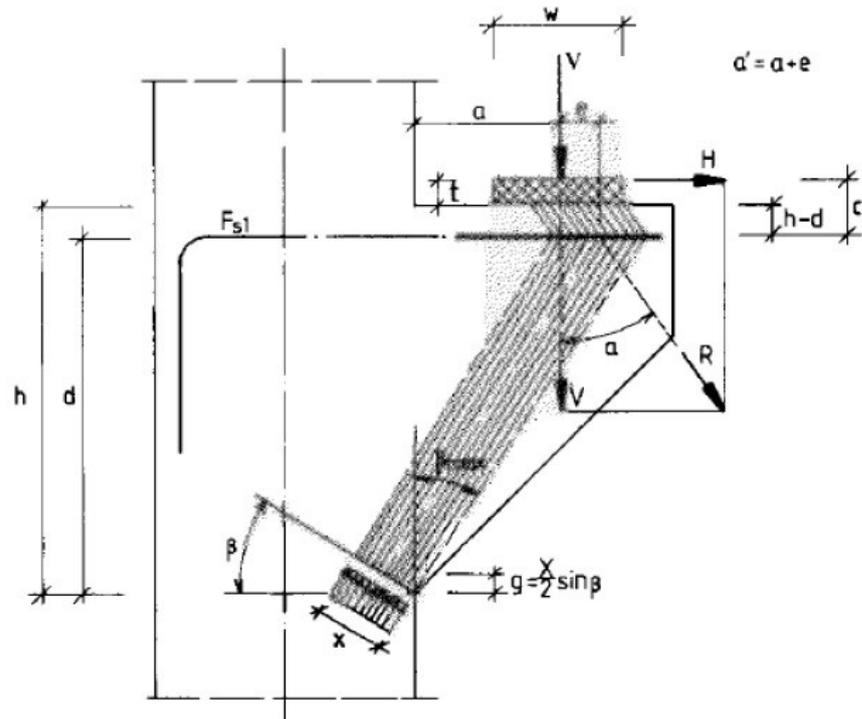
Como resultado do trabalho os autores concluíram que o carregamento último de um consolo é dependente da relação  $a/d$ , da taxa de armadura, da resistência do concreto e da relação entre a carga vertical e horizontal aplicada ao consolo, e que as forças horizontais atuantes no consolo podem reduzir significativamente a resistência dos mesmos, ressaltando a importância de se garantir de forma adequada a movimentação das vigas apoiadas nos consolos.

#### **4.2 HAGBERG (1983)**

Hagberg (1983) criou um modelo de cálculo da resistência de consolos segundo os conceitos de treliça. O modelo proposto baseou-se nas seguintes hipóteses:

- O corpo deveria estar em equilíbrio (somatório das forças internas igual ao de forças externas);

- O consolo pode romper pelo escoamento da armadura ou pelo esmagamento da escora de concreto;
- A resistência dos materiais é determinada através de ensaios uniaxiais;
- O concreto oferece resistência apenas a compressão;
- A geometria do modelo de treliça deve ser coerente com a do consolo;



**Figura 10 - Modelo proposto por Hagberg**  
 Fonte: HAGBERG (1983)

## 4.3 CÓDIGOS NORMATIVOS DE PROJETO

### 4.3.1 NBR 6118:2014

De acordo com NBR 6118:2014 consolos são elementos em balanços em que a distância da carga aplicada à face do apoio é menor ou no máximo igual a altura útil do mesmo. Estes são divididos em dois grupos, os consolos curtos, e os consolos muito curtos.

Segundo a NBR 6118:2014 os consolos curtos possuem um comportamento típico que pode ser descrito por um modelo de escoras e tirantes, o qual deve contemplar o equilíbrio global da estrutura, inclusive no nó de ligação com o pilar ou apoio. Neste modelo (Figura 11) a armadura do tirante, se ancora em uma extremidade, sob a carga vertical externa (consolo), e na outra extremidade, internamente ao apoio ou pilar. A escora, vai do ponto de aplicação da carga até a face do apoio, e deve utilizar toda a altura disponível do consolo.

Para que este modelo possua validade, a NBR 6118:2014, estipula alguns aspectos fundamentais que o consolo deve atender:

- Ancoragem adequada do tirante. A armadura deve “abraçar” a escora logo abaixo do aparelho de apoio;
- Os cálculos das armaduras devem garantir o escoamento das mesmas antecipadamente a ruptura do concreto;
- Garantia do afastamento da ruptura frágil da escora de concreto. Para isto deve ser verificado a resistência a compressão da escora ou o cisalhamento equivalente na face do pilar.
- Consideração das forças horizontais no dimensionamento dos consolos, levando em conta o efeito desfavorável na inclinação da resultante da força aplicada. Valores mínimo para estes esforços devem ser observados na NBR 9062.
- Existindo forças horizontais, transversais ou excentricidade de carga vertical na largura do consolo (torção no consolo), o comportamento estrutural que deve ser considerado, é o de um modelo de escora e tirante fora do plano médio do consolo, onde a escora e o tirante são mais estreitos, ou seja, não se forma uma treliça espacial como no caso de torção em vigas, pois o não há comprimento suficiente para isto.



modelos de escoras e tirantes ou modelos atrito-cisalhamento, sendo usualmente os modelos de escoras e tirantes utilizados para o cálculo de consolos curtos, e os modelos de atrito-cisalhamento utilizados para o cálculo de consolos muito curtos.

#### 4.3.2 NBR 9062:2006

A NBR 9062:2006 considera que consolos com a relação ( $0,5 \leq a/d \leq 1$ ) devem ser dimensionados de acordo com um modelo de treliça de duas barras (um tirante e uma escora), sendo os efeitos favoráveis de cargas horizontais que comprimam o plano de ligação entre o consolo e apoio, desconsiderados no dimensionamento, e os efeitos desfavoráveis, absorvidos totalmente pelo tirante.

A tensão na escora comprimida não deve ultrapassar a tensão  $f_{cd}$  para a carga direta e  $0,85 f_{cd}$  para carga indireta.

A armadura do tirante não pode sofrer redução da seção transversal entre o ponto de aplicação e o de engastamento, sendo a taxa mecânica de cálculo  $\omega$  superior a 0,04.

$$\omega = \rho * \frac{f_{yk}}{f_{ck}} \quad \text{Equação (27)}$$

$$\rho = \frac{A_{s,tir}}{b * d} \quad \text{Equação (28)}$$

em que:  $A_{s,tir}$  – área total de aço do tirante;

$b$  – largura do consolo;

$d$  – distância do centro geométrico da armadura a borda comprimida;

Para os consolos curtos a armadura total do tirante é dada pela Equação 29:

$$A_{s,tir} = A_{sv} * \frac{H_d}{f_{yd}} \quad \text{Equação (29)}$$

$$A_{sv} = \left(0,1 + \frac{a}{d}\right) * \frac{F_d}{f_{yd}} \quad \text{Equação (30)}$$

É obrigatório o uso de armadura de costura nas seguintes situações:

- Quando não forem respeitados os detalhes construtivos da norma;
- O valor de  $f_{yd}$  for inferior a 435 MPa.

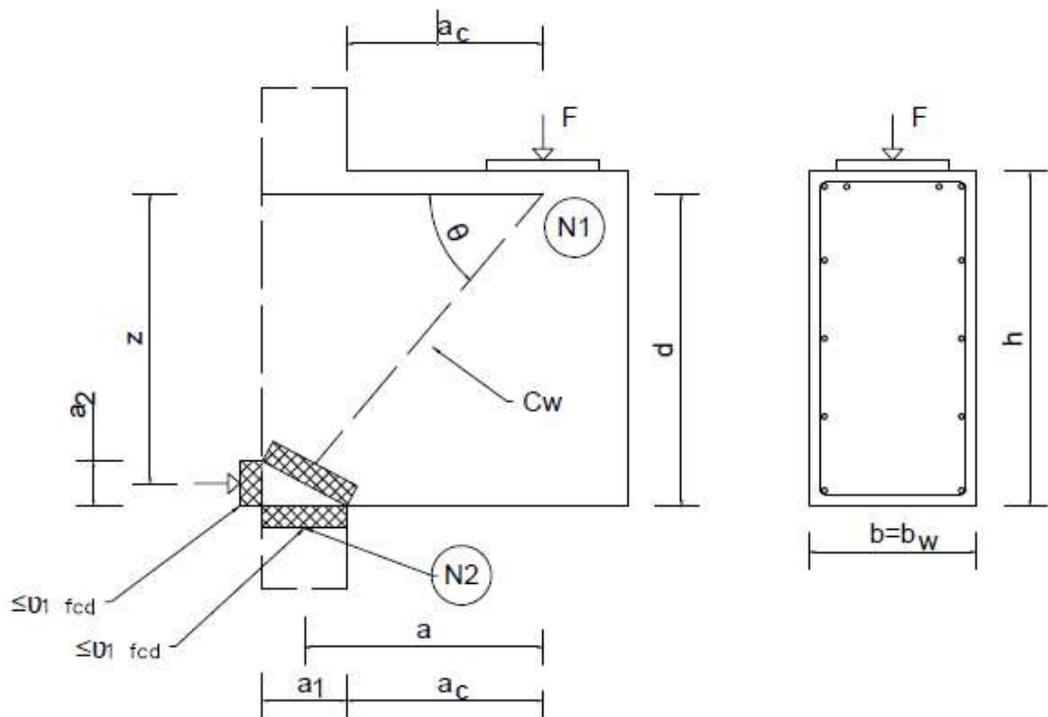
Em consolos curtos a Equação 31 representa o valor da armadura a ser distribuída na altura de  $2/3$  de  $d$ , contíguo ao tirante:

$$\frac{A_s}{s_{cost}} \geq 0,4 * \frac{A_{sv}}{d} \quad \text{Equação (31)}$$

Quando construtivamente seja necessária a utilização de estribos verticais, estes devem seguir as taxas mínimas estabelecidas pela NBR 6118:2014, considerando o consolo como uma viga com seção transversal idêntica à seção de ligação entre o consolo e o apoio.

#### 4.3.3 CEB - FIP COMMISSION 3 – PRACTICAL DESIGN OF STRUCTURAL CONCRETE

O código FIP Commission 3 (1999) indica para o dimensionamento de consolos com a relação ( $a < z/2$ ) o modelo de Escoras e Tirantes da Figura (12), onde devem ser utilizadas as seguintes expressões:



**Figura 12 – Modelo de escoras e tirantes para consolo (com  $a < z/2$ )**

Fonte: Adaptado de FIP COMMISSION 3 – PRACTICAL DESIGN OF STRUCTURAL CONCRETE

$$a_1 = \frac{F}{b} * v_1 * f_{1cd} \quad \text{Equação (32)}$$

$$v_1 = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad \text{Equação (33)}$$

$$a = a_c + \frac{a_1}{2} \quad \text{Equação (34)}$$

$$\cot(\theta) = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a}{z} \quad \text{Equação (35)}$$

$$T_1 = F * \cot(\theta) \quad \text{Equação (36)}$$

$$A_{s1} = \frac{T_1}{f_{syd}} \quad \text{Equação (37)}$$

Para os consolos que se enquadrem a relação ( $z/2 < a < 2z$ ) o carregamento pode ser transferido para o apoio através de uma escora direta, desde que seja dimensionada uma armadura transversal capaz de resistir ao esforço dado pela Equação 38:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{2 * \frac{a}{z} - 1}{3} \quad \text{Equação (38)}$$

Caso não seja considerado um modelo de escoras e tirantes mais refinado, a tensão na escora deve seguir a Equação 39:

$$\sigma_{cw} = 0,6 * f_{1cd} \quad \text{Equação (39)}$$

E a largura da placa de apoio a Equação 40:

$$a_w = \frac{x}{\sin(\theta_2)} \left( \frac{v_1}{0,6 * \cos(\theta_2)} - \cos(\theta_2) \right) \quad \text{Equação (40)}$$

$$\cot(\theta_2) = \frac{a}{z} \quad \text{Equação (41)}$$

## 5 REFORÇO POR MEIO PROTENSÃO EXTERNA

A necessidade de reforço em elementos de concreto armado pode surgir pelos mais variados motivos, porém independentemente do motivo que venha-o causar, este dependerá basicamente da resistência a flexão e cisalhamento da estrutura.

No caso dos consolos curtos, estes geralmente rompem por insuficiência da armadura a tração ou esmagamento do concreto na região da escora comprimida, situações como estas, devem ser analisadas para a definição da técnica de reforço a ser utilizada, uma vez que dependendo do estado da peça, a técnica mudará.

Segundo Almeida (2001), a definição da técnica de reforço a ser utilizada depende fundamentalmente das causas que à premeditaram. Quando se intervêm em uma estrutura acabamos por modificar as rigidezes dos seus elementos, o que pode alterar o caminhamento das cargas, submetendo os elementos que estavam íntegros a novas situações que possam vir comprometê-los. Assim, devesse ter certeza que a técnica escolhida, garanta que as cargas serão distribuídas aos novos elementos adicionados à estrutura, através da adequada interação entre o existente e o novo.

Atualmente existem várias técnicas de reforço estrutural, podendo citar como principais:

- Reforço com concreto armado;
- Reforço com chapas metálicas;
- Reforço com fibras sintéticas;
- Reforço com protensão externa;

Cada uma dessas técnicas possui suas vantagens e desvantagens quando comparadas entre si, que dependem principalmente da necessidade da estrutura. A escolha do método de reforço a ser utilizado, depende de fatores como: custo, disponibilidade de espaço, possibilidade de descarregamento da estrutura, tempo de efetividade, entre outros; que devem ser avaliados pelo projetista. Neste cenário é que a protensão externa como reforço, deve ser avaliada.

Conforme muito bem definido por Almeida (2001), a grande vantagem da protensão em relação as outras técnicas é o seu caráter ativo, uma vez que esta é a única que consegue inserir forças ativas ao sistema, ao contrário das outras técnicas, que inserem novos componentes a estrutura que reagirão as forças atuantes, ou seja, não é necessário que o elemento reforçado se deforme para que o reforço pretendido comece a atuar no sistema.

Sabidamente, as estruturas fabricadas em concreto protendido possuem como características um menor consumo de aço, menor fissuração e menor deformação em relação as estruturas convencionais (VITÓRIO, BARROS, 2011). Essas melhorias também são alcançadas nas estruturas reforçadas com protensão (CAMARGOS, 2013).

Camargos (2013) enumera alguns benefícios e inconvenientes na execução da técnica de reforço através da protensão externa:

- Benefícios:
  - Simplicidade construtiva;
  - Inexistência da necessidade de cobrimento;
  - Facilidade na inspeção do reforço;
  - Possibilidade de troca das armaduras;
  - Pouca ou nenhuma demolição;
  - Menor perda por atrito em relação a protensão de barras internas;
  
- Inconvenientes:
  - O concreto existente deve resistir as tensões de compressão oriundas da protensão;
  - Vulnerabilidade a corrosão, fogo, impactos e vandalismo;
  - Necessidade de mão de obra especializada;

Um sistema de protensão é composto basicamente pelo concreto, aço e dispositivos de ancoragem, e em algumas situações também se faz necessário o uso de bainhas para recobrir/proteger o aço.

Diferentemente das construções em concreto armado tradicionais, o concreto protendido utiliza aço com diferentes propriedades mecânicas. Geralmente estes são aços de alta resistência ( $\pm 1.900$  MPa), uma vez que o concreto protendido está sujeito as perdas de protensão, e quanto maior a resistência das barras de aço, menor serão essas perdas (HANAI, 2005).

De acordo com Hanai (2005), os aços para protensão são fabricados nos seguintes formatos:

- Fios trefilados de aço carbono, encontrados em rolos e bobinas;
- Cordoalhas, formadas por dois, três ou sete fios;

- Barras de aço laminadas a quente;

Os fios e cordoalhas geralmente são ancorados por cunhas, blocos e placas de aço, enquanto as barras de aço são ancoradas por placas e porcas. As cunhas possuem ranhuras internas e podem ser bi ou tri partidas. Estas envolvem os fios e cordoalhas, os quais após serem tracionados tentam retornar ao seu comprimento original e acabam por serem presos pelas cunhas. De acordo com Hanai (2005) os sistemas de ancoragem, emendas de cabos, purgadores e outros materiais utilizados, variam de acordo com o fabricante, uma vez que são protegidos por patentes, assim o projetista deve estar atento as particularidades de cada fabricante. A Figura 13 apresenta os padrões de ancoragem utilizados pela empresa Rudloff.



**Figura 13 – Padrões de ancoragem (Rudloff)**  
Fonte: Rudloff (2015)

De acordo com Rudloff (2015) as cunhas de ancoragem sofrem uma acomodação (cravação), o que prova uma perda de aproximadamente 6 mm no alongamento inicial, o que, para cabos muito curtos (menos de 10 m de comprimento) é inconveniente, assim é recomendado nestas situações utilizar a ancoragem do tipo E, a qual pode compensar a perda na cravação através do uso de calços.

A técnica de reforço com protensão externa mais utilizada para vigas a flexão, consiste basicamente na instalação de cordoalhas ou barras externas a estrutura, podendo ser instaladas longitudinalmente ou transversalmente, com o uso de desviadores e aparelhos de ancoragem e fixação.

Tejedor (2013) ressalta que no sistema de protensão externa ao contrário da protensão interna, a trajetória da cordoalha não é parabólica e sim poligonal, uma vez que não há compatibilidade das deformações entre o aço e o concreto, ou seja, as forças de protensão atuam apenas sobre as ancoragens e possíveis desviadores, o que faz com que as tensões e deformações na cordoalha se mantenham constantes entre os pontos de ancoragem.

Atualmente, não existem muitos trabalhos que tratam do reforço de consolos com protensão externa, porém, analisando a técnica desenvolvida por Nagrodzka-Godycka (1999), concluiu-se que a execução é muito próxima à aquela desenvolvida para o reforço de vigas ao cisalhamento com uso de estribos pré-tracionados.

Fernandez (1997) realizou o reforço de vigas através da instalação de barras externas como estribos adicionais. Para isto a mesma utilizou barras de aço redondas com diâmetro de 12,5 mm roscadas em suas extremidades, de forma que porcas pudessem ser rosqueadas, aplicando assim, esforços de tração nas barras. Estas barras foram instaladas através de furos na laje e fixadas em cantoneiras sobre a face inferior e superior da viga. Para aplicação dos esforços foi utilizado um torquímetro, sendo a determinação da força aplicada, realizada a partir de uma correlação pré-estabelecida entre o torque e a deformação da barra.

Nagrodzka-Godycka (1999) e, Lachowicz e Nagrodzka-Godycka (2015) também utilizaram barras roscadas para o reforço dos consolos. O segundo fez uso de barras do tipo *Macalloy 1030* (Figura 14) as quais possuem uma tensão ao escoamento no valor de 1030 N/mm<sup>2</sup>.



**Figura 14 – Barra Macalloy 1030**

Fonte: MACALLOY (2017)

A empresa Macalloy, que é a fabricante das barras *macalloy 1030*, apresenta a Equação 42 para determinação da força axial aplicada na barra, de acordo com o torque exercido na chave de torque. A determinação desta força com base no torque aplicado, depende do diâmetro da barra, do espaçamento das roscas, do atrito entre a porca e as roscas, da anilha e da placa final. Por estes motivos o resultado da Equação 42 não possui uma precisão maior do que 25% (MACALLOY, 2017).

$$\text{Torque} = \frac{P * D}{K} \quad \text{Equação (42)}$$

em que:      P – carga axial desejada em kN;  
                   D – diâmetro nominal da barra em mm;  
                   K – constante tabelada;

A Tabela 3 apresenta os valores de “K” para os diâmetros de 25 a 50 mm.

**Tabela 3 – Valores de K**

Diâmetro da barra (mm)	K
25	4,1
26,5	4,3
32	4,7
36	4,9
40	4,5
50	4,1

Fonte: Macalloy (2017).

A aplicação de torque nas porcas também pode ser realizada através de equipamentos hidráulicos, os quais são providos de medidores calibrados por células de carga certificadas, capazes de aferir a força exercida sobre as barras. A Figura 15 demonstra a aplicação de torque com uso de um macaco hidráulico (MACALLOY, 2017).



**Figura 15 – Macaco Hidráulico**  
Fonte: Macalloy (2017).

A NBR 6118:2014 estabelece valores limites para o valor dos esforços de tração no momento de aplicação da protensão. Para aços do tipo CP-85/105, fornecidos em barras, a tensão máxima a que as barras podem ser submetidas é de  $0,72 f_{ptk}$  e  $0,88 f_{pyk}$ , sendo estes os valores respectivos a resistência a tração e ao escoamento das armaduras.

Valores limites de tensão para armaduras no momento da protensão também são indicados pelos fabricantes, por exemplo, o fabricante Macalloy estipula para suas barras Macalloy 1030 os valores afixados pelo código EN 1992-1-1:2004 Eurocode 2, sendo estes o valor limite de  $0,8 f_{pk}$  e  $0,9 f_{p0,1k}$ .

Quando se compara a protensão realizada com barras rígidas a protensão realizada com cordoalhas e fios, percebe-se que o sistema mais indicado para os consolos, é o sistema com barras rígidas, uma vez que estas não sofrem as perdas de alongamento ocasionadas pela acomodação das cunhas, tendo em vista que consolos são elementos de pequeno comprimento e por este motivo não absorvem perdas de alongamento.

Sayed-Ahmed e Shrive (1998) citam o uso de Polímeros Reforçados com Fibras (FRP) para protensão. As principais vantagens desta técnica são: resistência a corrosão, alta durabilidade, baixo peso e alta resistência à tração; e as principais desvantagens: comportamento frágil, alto custo e principalmente a dificuldade na ancoragem, ressaltando que os métodos de ancoragem não atendem de maneira satisfatória os principais requisitos para a ancoragem em um sistema de protensão externa.

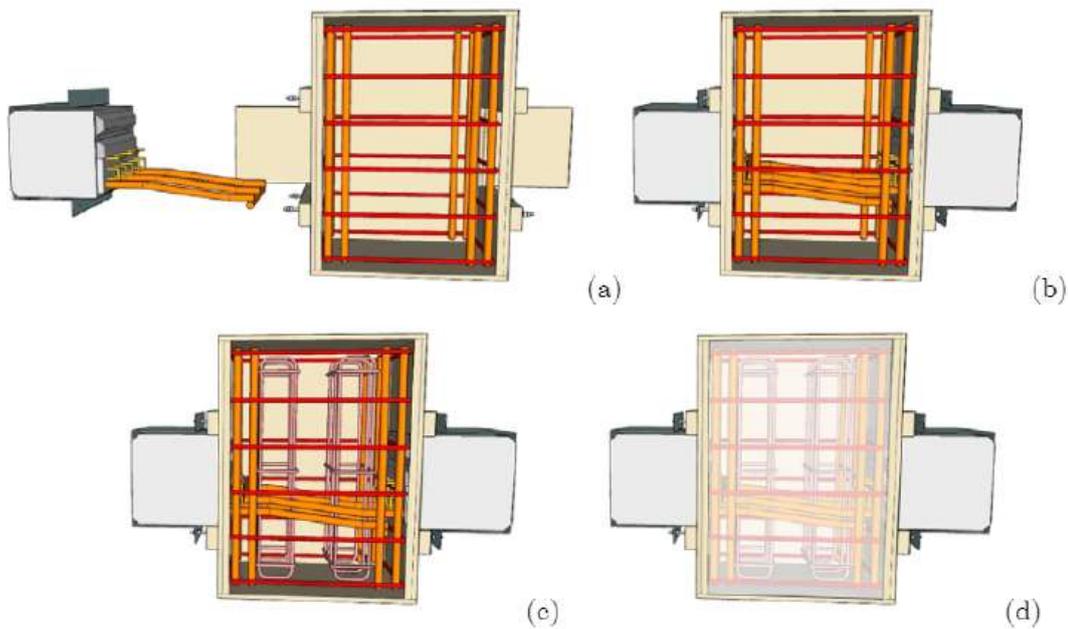
Atualmente existem diversos trabalhos que tratam sobre o reforço externo de elementos estruturais, podendo aqui citar alguns para um melhor embasamento. Vigas de pontes reforçadas com uso de protensão externa (VITÓRIO, BARROS, 2011), reforço a flexão de vigas de concreto armado com uso de protensão (ROMERO, 2007), vigas reforçadas com mantas de fibras sintéticas protendidas (TRIANAFILLOU, DESKOVIC, 1991; TRIANAFILLOU et al, 1992; QUANTRILL, HOLLAWAY, 1998), vigas reforçadas com protensão em forma de estribos (FERNANDEZ, 1997), reforço de estrutura de cobertura em concreto armado com uso de protensão (ARAÚJO, GUERRA, LIRA, REZENDE, 2012), recuperação estrutural de blocos de fundação afetados pela reação álcali-agregado, com o uso de protensão (GOMES, 2008), recuperação de bloco de fundação com uso de protensão (FIGUEIROA, 2010).

No momento existem poucos trabalhos no Brasil sobre consolos reforçados com uso de protensão externa. Nos itens seguintes serão apresentados os trabalhos encontrados em base de dados nacionais e internacionais sobre protensão externa em consolos, os quais serviram de base e material de comparação para esta pesquisa.

## 6 CONSOLOS PÓS-INSTALADOS E CONSOLOS REFORÇADOS COM BARRAS DE PROTENSÃO

### 6.1 ESTUDO EXPERIMENTAL DE CONSOLOS DE CONCRETO COM FIBRAS MOLDADOS EM ETAPAS DISTINTAS DOS PILARES (COSTA, 2009)

Costa (2009) realizou estudo experimental com consolos confeccionados anteriormente ao pilar e ancorados ao mesmo no momento da concretagem. O modelo de consolo estudado é composto apenas por armaduras passivas e concreto com fibras metálicas, não sendo utilizado estribos horizontais e verticais. As variáveis estudadas foram a taxa de armadura e o arranjo das barras do tirante. A Figura 16 representa a sequência de confecção dos modelos ensaiados.



**Figura 16 – Sequência de fabricação dos consolos – Costa (2009)**

Fonte: COSTA (2009).

A Tabela 4 apresenta um resumo das características dos modelos dos consolos ensaiados.

**Tabela 4 – Resumo das características dos consolos**

Modelo	Armadura principal (tirante)	Classificação quantidade de armadura	Armadura de costura	a/d	Resistência pretendida concreto (MPa)	Porcentagem fibras de aço consolo (%)
MBS1	2φ12,5mm	baixa	não	0,75	65,00	2,00
MBC2	2φ12,5mm	baixa	sim	0,75	65,00	2,00
MMS3	3φ16,0mm	média	não	0,75	65,00	2,00
MMC4	3φ16,0mm	média	sim	0,75	65,00	2,00
MMC5 <sup>1</sup>	3φ16,0mm	média	sim	0,75	65,00	2,00
MAC6	4φ20,0mm	alta	sim	0,75	65,00	2,00
MRC7	3φ16,0mm	média	sim	0,75	40,00	-

Fonte: Adaptado de COSTA (2009).

Como resultado, Costa (2009) concluiu que a adição de fibras no consolo reduziu a fissuração na escora e aumentou a resistência à ruptura dos modelos em 8%. O aumento da taxa de armadura do tirante aumentou a resistência a ruptura em torno de 69%.

Comparando os consolos monolíticos com os consolos pós instalados, Costa (2009) obteve aberturas de fissuras 33% maior para os consolos pós instalados, quando comparados aos consolos monolíticos sobre uma carga de serviço (metade da carga de ruptura). A Tabela 5 apresenta as forças máximas experimentais obtidas para cada amostra.

**Tabela 5 – Força máxima experimental dos modelos ensaiados – Costa (2009)**

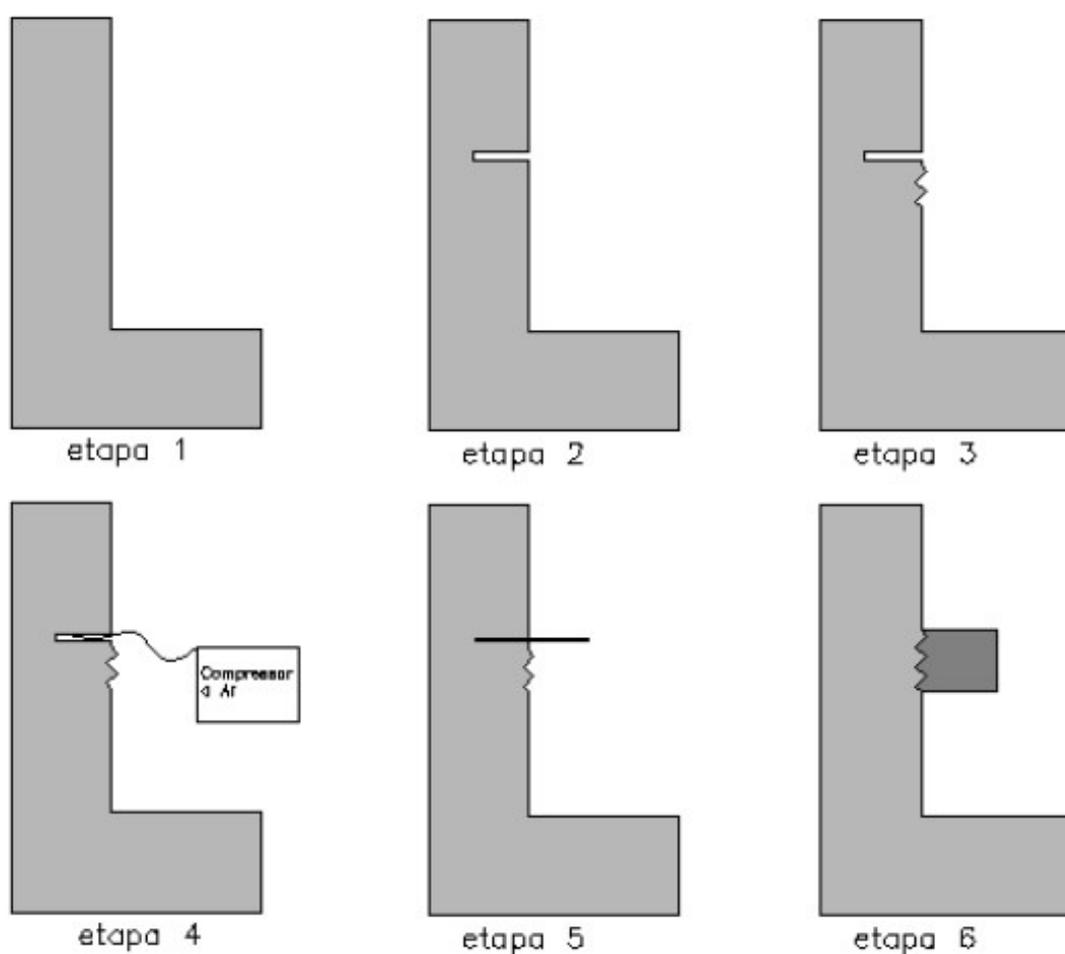
Modelo	Força máxima teórica (kN)	Força máxima experimental (kN)
MBS	333,90	459,26
MBC2	333,90	485,28
MMS3	744,96	1094,60*
MMC4	744,96	1026,40*
MMC5	744,96	973,09*
MAC6	1103,64	1517,40
MRC7	744,96	897,78

\* não atingiu a ruptura

Fonte: Adaptado de COSTA (2009).

## 6.2 CONSOLOS INSTALADOS EM ETAPA POSTERIOR À CONCRETAGEM DE PILAR COM AUXÍLIO DE ADESIVO QUÍMICO (DAMASCENO, 2016)

Damasceno (2016) analisou em seu trabalho a instalação de consolos de concreto armado, instalados em etapa posterior a concretagem do pilar, pelo uso de ancoragem química das armaduras do tirante. Para isso o mesmo projetou e ensaiou três amostras, sendo uma fabricada através do modelo tradicional – modelo A (concretagem do consolo junto com o pilar) e outras duas com o consolo anexado ao pilar já concretado, em etapa posterior, através da ancoragem química do tirante – modelos B e C (Figura 17).



**Figura 17 – Sequência de fabricação dos consolos – Damasceno (2016)**

Fonte: DAMASCENO (2016).

Os modelos foram ensaiados através da aplicação de força normal ao consolo, onde através de célula de carga, clinômetros, extensômetros de base removível e transdutores, foram

coletados dados de giro do consolo em relação ao pilar, extensão na altura da armadura do tirante e na direção da escora comprimida, e a carga aplicada.

Como resultado dos ensaios, chegou-se à conclusão que todas as amostras romperam por flexão, conforme previsto em projeto, e que todas resistiram a cargas últimas superiores as cargas previstas pelos modelos e códigos de projeto analisados. Quanto as deformações, o modelo A, apresentou-se mais rígido quando comparado aos modelos pós instalados.

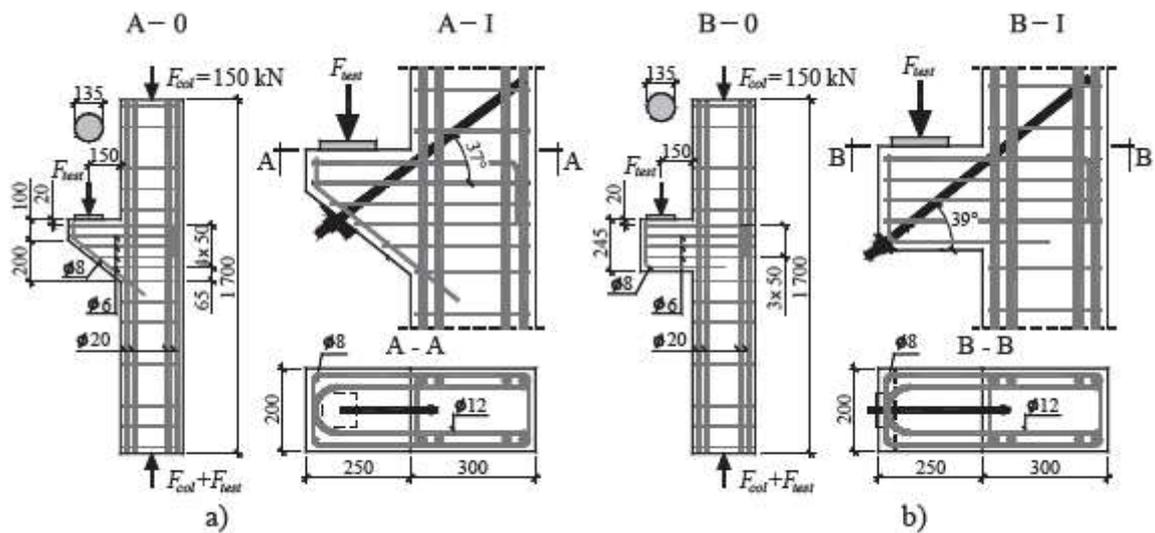
A abertura de fissuras na flexão nos modelos B e C, foi superior à do modelo A, e seus valores atenderam aos limites previstos na NBR 6118:2014 para as classes de agressividade I, II e III, porém não atenderam ao limite de 0,2 mm inerente a classe de agressividade IV.

### 6.3 URBAN E KRAWCZYK (2015)

Este trabalho consistiu no ensaio de três modelos de consolos confeccionados monoliticamente com o pilar (A, B e C) reforçados por barras de protensão pós instaladas.

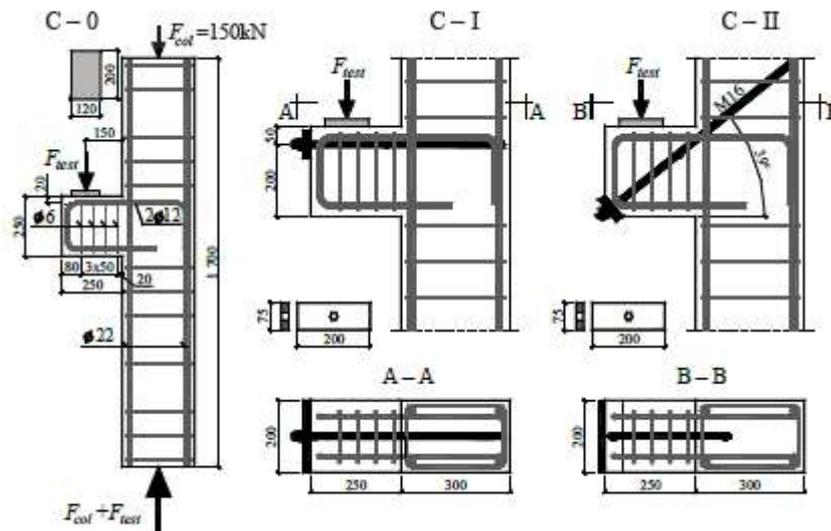
Para cada modelo um exemplar foi ensaiado sem reforço de barras externas, afim de servir como referência para a pesquisa (modelos A-0, B-0, C-0 – Figura 18 e Figura 19). Outros exemplares foram reforçados com barras roscadas inseridas em furos posteriormente executados e envoltos por adesivo injetável de cura rápida (Figura 18 e Figura 19, modelos A-I, B-I, C-I e C-II) e posteriormente ensaiados.

Os consolos de referência foram submetidos a estágios de carregamento de 10 kN até a sua ruptura, sendo todos os dados dos ensaios computados. A partir dos resultados dos consolos de referência os demais consolos foram submetidos a carregamentos iniciais capazes de ocasionar uma deformação de 2 % a armaduras do tirante, sendo na sequência parcialmente descarregados e reforçados com as barras de protensão, para posteriormente serem novamente carregados, porém agora até a sua ruptura.



**Figura 18 - Consolos ensaiados: a) series A, b) series B; barras de reforço do consolos com os detalhes de tracionante A-I e B-I**

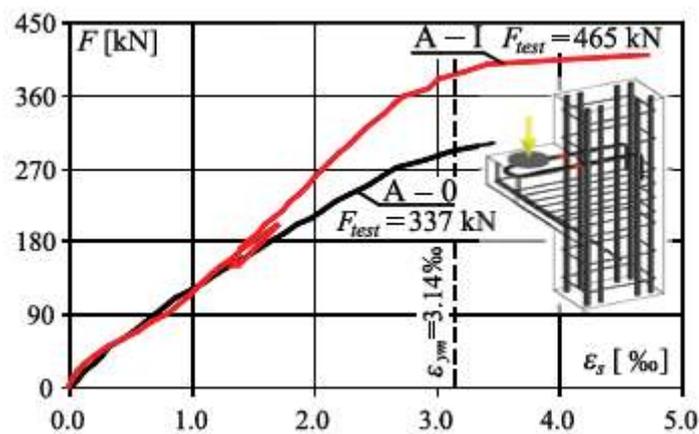
Fonte: Adaptado de URBAN E KRAWCZYK (2015).



**Figura 19 - Consolos série C testados: o reforço do consolo C-0, os detalhes de tensionamento dos consolos C-I e C-II**

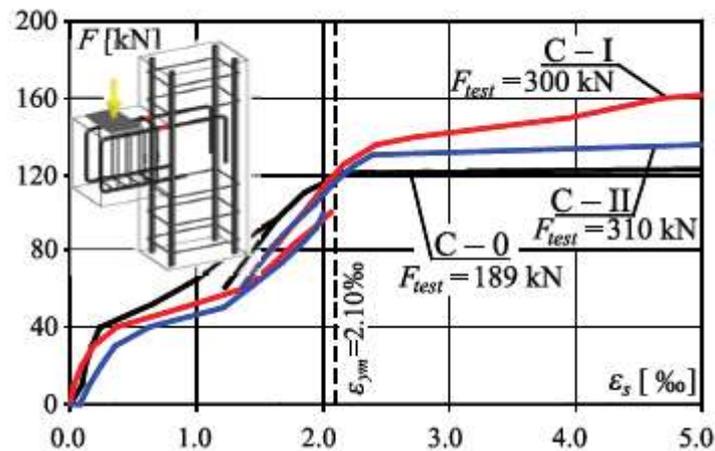
Fonte: Adaptado de URBAN E KRAWCZYK (2015).

Como parte dos resultados foram demonstrados gráficos que correlacionam a força atuante na armadura primaria (tirante passivo) com suas deformações (Figura 20 e 21).



**Figura 20 - Comparação das forças atuantes no consolos: A-0 (sem pós tensão) e A-I (com o pós tensão)**

Fonte: URBAN E KRAWCZYK (2015).



**Figura 21 - Comparação da forças atuantes no consolos: C-0 (sem pós tensão), C-I e C-II (com pós tensão)**

Fonte: URBAN E KRAWCZYK (2015).

Para os modelos A e B a aplicação de barras de reforço fez com que o carregamento capaz de ocasionar o escoamento das armaduras do tirante fosse elevado, porém para o modelo C isto não foi possível, pois as armaduras do mesmo acabaram se escoando ainda na primeira etapa de carregamento (anteriormente a aplicação do reforço).

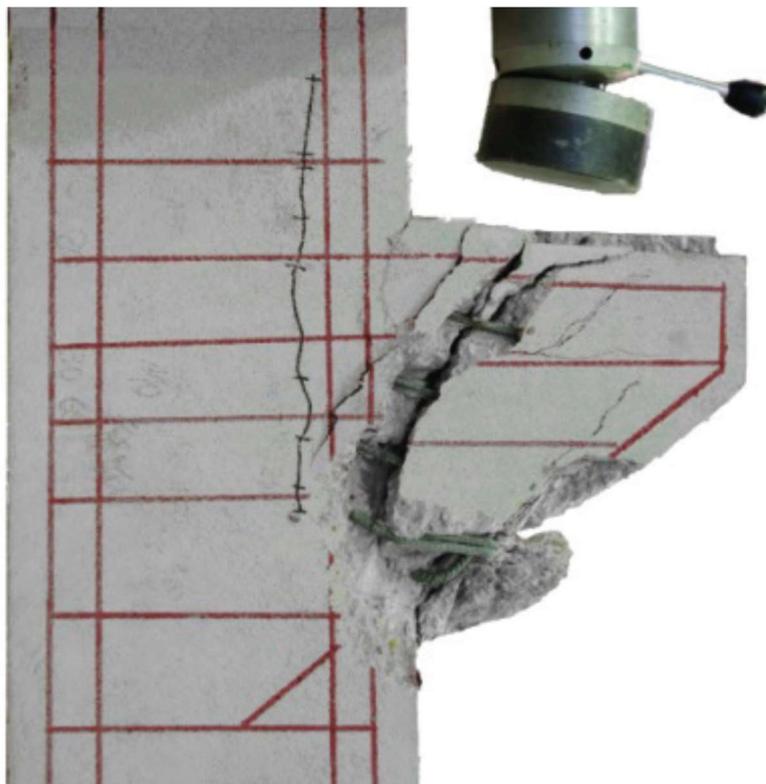
As maiores deformações do concreto ocorreram junto a base do consolo no pilar, fato este que já era observado em outros trabalhos, para os consolos normalmente armados.

O aparecimento das primeiras fissuras ocorreu na interface entre os pilares e consolos, sob um carregamento em torno de 16 a 18% do valor ultimo do consolo não protendido, com exceção do modelo C-0, que apresentou a primeira fissura abaixo da placa de carregamento.



**Figura 22 - Consolo C-I após a falha**  
Fonte: URBAN E KRAWCZYK (2015).

A falha dos consolos de modo geral se iniciou pelo alongamento das barras do tirante, acompanhado de um aumento significativo da largura das fissuras (Figura 22), porém, cabe ressaltar, que imediatamente antes da falha generalizada do consolo, ocorreu o esmagamento do concreto na borda da escora, conforme pode ser visto na Figura 23.



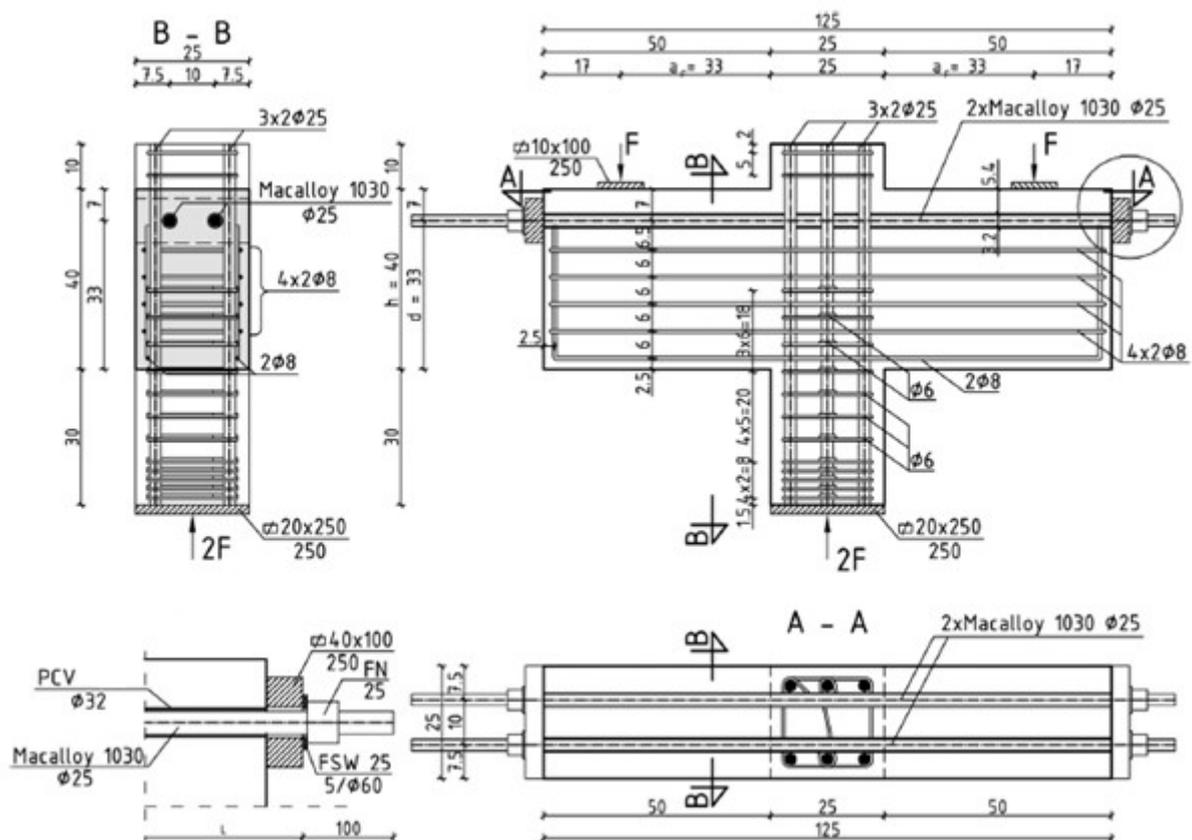
**Figura 23 - Consolo A-0 após a falha**  
Fonte: URBAN E KRAWCZYK (2015).

O trabalho demonstrou que a proposta de melhoramento dos consolos testada foi efetiva, com percentuais de aumento da capacidade de carga variando de 25 a 64 %, porém como não foram testadas mais amostras, Urban e Krawczyk (2015) observam que não se pode afirmar que o método é totalmente eficaz. De acordo com Urban e Krawczyk (2015) a capacidade de carga pôde ser apropriadamente prevista pelos métodos de Hagberg (1983) e Eurocode 2.

#### 6.4 LACHOWICZ E NAGRODZKA-GODYCKA (2015)

O trabalho apresenta a análise de 6 consolos duplos, fabricados monoliticamente com o pilar. Como diferencial esses consolos apresentam duas barras *Macalloy* de protensão instaladas no interior de tubos de pvc como tirante principal. O estudo visou comparar o estado de fissuração e a capacidade de carga de consolos fabricados com armadura passiva, com aqueles com armadura ativa.

Os consolos foram fabricados com diferentes relações  $a/d$  (1,0, 0,6, 0,3), e foram agrupados em dois grupos de estudo de 3 peças, uma de cada relação  $a/d$ . O primeiro grupo (W-S-1) é caracterizado pela instalação das barras do tirante uma ao lado da outra (Figura 24), na posição horizontal, o segundo grupo (W-S-2) é caracterizado pela instalação das barras uma sobre a outra, na vertical (Figura 25).



**Figura 24 - Geometria e reforço do consolo WI-S-1**

Fonte: Adaptado de LACHOWICZ E NAGRODZKA-GODYCKA (2015).



**Tabela 6 – Força de protensão nas barras dos consolos do grupo (W-S-1)**

Consolo (a/d)	P (kN)		2P (kN)	$f_{pe}$ (MPa)	$\lambda = f_{pe}/f_{pk}$
	Esquerda	Direita			
WI-S1 (1,0)	246,8	246,3	493,1	593,4	0,57
WII-S1 (0,6)	225,8	256,3	482,1	558,0	0,54
WIII-S1 (0,3)	220,8	212,7	433,5	503,7	0,49

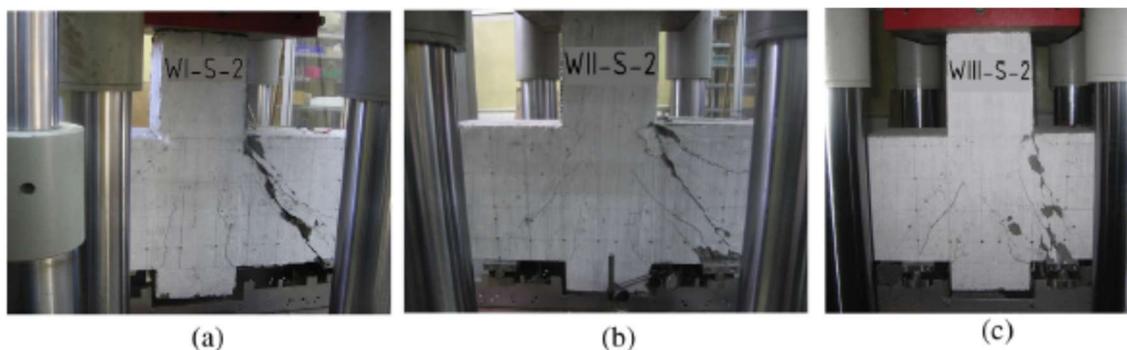
Fonte: Adaptado de LACHOWICZ E NAGRODZKA-GODYCKA (2015).

**Tabela 7 – Força de protensão nas barras (WS-2)**

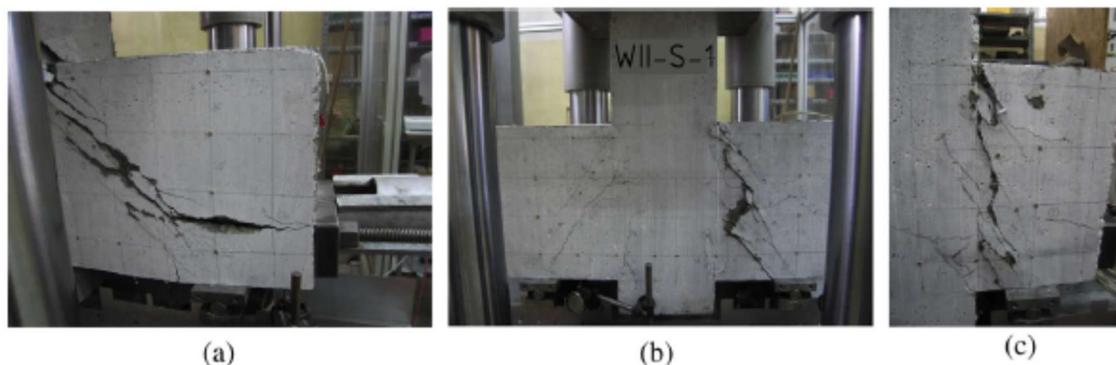
Consolo (a/d)	P (kN)		2P (kN)	$f_{pe}$ (MPa)	$\lambda = f_{pe}/f_{pk}$
	Nível I	Nível II			
WI-S2 (1,0)	239,6	239,6	479,2	571,8	0,55
WII-S2 (0,6)	276,3	283,6	559,9	661,6	0,64
WIII-S2 (0,3)	272,0	272,0	544,0	619,8	0,60

Fonte: Adaptado de LACHOWICZ E NAGRODZKA-GODYCKA (2015).

Durante a execução dos ensaios ficou claro que todos os consolos ensaiados tiveram a falha iniciada pelo alcance da tensão limite de compressão do concreto. Os consolos com relação  $a/d = 1,0$  e  $0,6$ , romperam de forma abrupta, ao contrário dos outros, que apresentaram uma ruptura mais suave. Isto demonstra que o modo de falha e formação das fissuras é dependente da relação  $a/d$  do consolo. As Figuras 26 e 27 apresentam os consolos rompidos.



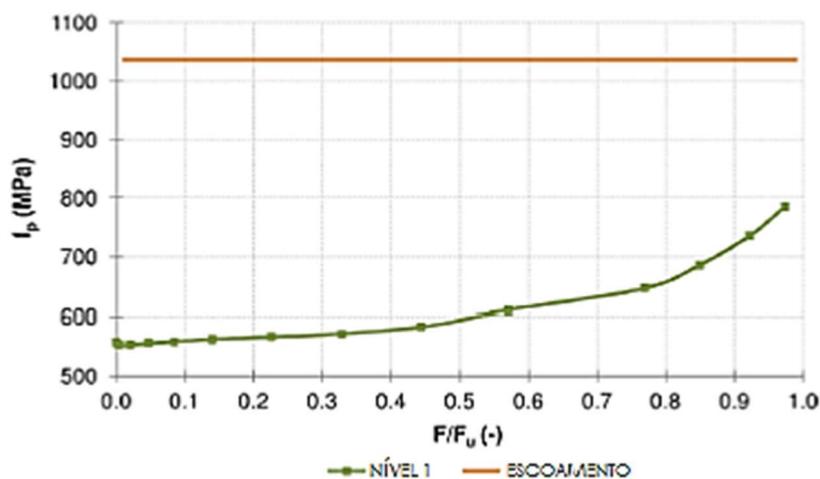
**Figura 26 – Consolos WS-1 após a ruptura: (a) WI-S-1, (b) WII-S-1, (c) WIII-S-1.**  
Fonte: LACHOWICZ E NAGRODZKA-GODYCKA (2015).



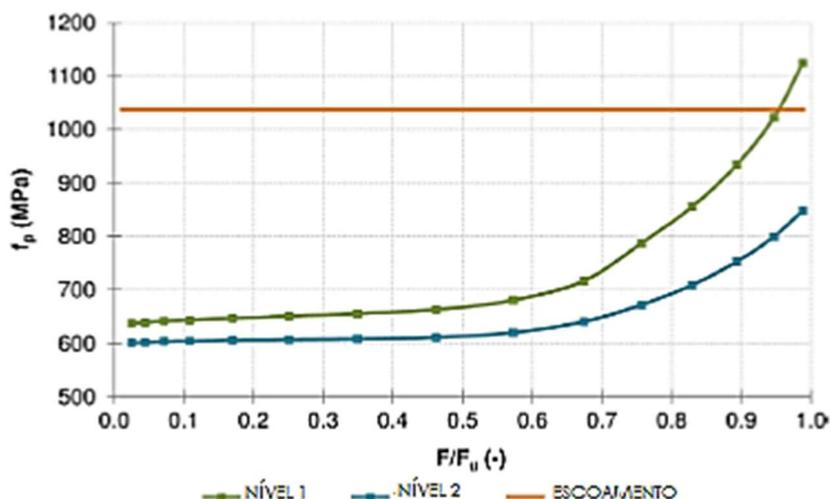
**Figura 27 - Consolos WS-2 após a ruptura: (a) WI-S-2, (b) WII-S-2, (c) WIII-S-2.**  
 Fonte: LACHOWICZ E NAGRODZKA-GODYCKA (2015).

As deformações aferidas para o concreto na direção de suas escoras de compressão, foram maiores para os consolos da série W-S-1 do que para os consolos da série W-S-2.

A tensões aferidas nas barras do tirante do consolo WII-S-1 são demonstradas na Figura 28. A tensão inicial foi de 558 MPa, e no momento da ruptura de 786 MPa, um acréscimo de aproximadamente 40%. As tensões aferidas para o consolo WII-S-2 (Figura 29), foram de 653 MPa (nível 1) e 670 MPa (nível 2) no início do ensaio, já para o momento da ruptura, a barra do nível 1 entrou em escoamento e a tensão da barra do nível 2 foi de 848 MPa.



**Figura 28 – Tensão na barra de protensão (WII-S-1)**  
 Fonte: Adaptado de LACHOWICZ E NAGRODZKA-GODYCKA (2015).



**Figura 29 – Tensão na barra de protensão (WII-S-2)**

Fonte: Adaptado de LACHOWICZ E NAGRODZKA-GODYCKA (2015).

O posicionamento das barras de protensão em dois níveis reduziu a capacidade de carga dos consolos, quando comparados com os consolos com ambas as barras em único nível. Para a relação  $a/d = 1,0$ , o decréscimo foi de 17 %; para a relação  $a/d = 0,6$ , o decréscimo foi de 8%; e para  $a/d = 0,3$ , o decréscimo foi de 5%.

Em relação a fissuração, os consolos formados apenas por barras passivas (sem protensão) apresentaram as primeiras fissuras sob um carregamento de 17 a 33 % de sua carga de ruptura, já os consolos reforçados por barras externas protendidas, apresentaram as primeiras fissuras sob um carregamento de 50 a 60% da carga de ruptura dos consolos sem protensão.

A Tabela 8, apresenta um comparativo da capacidade de carga entre os consolos WS-1, WS-2 e consolos normalmente armados, todos com uma mesma seção transversal de armadura do tirante.

**Tabela 8 – Comparativo entre a capacidade de carga dos consolos protendidos com consolos normalmente armados**

Consolo	Armadura ativa S1	Armadura ativa S2	Armadura Passiva
WI	750,5	624,5	570,0
WII	1145,0	1053,5	957,5
WIII	14625	1391,0	1434,0

Fonte: Adaptado de LACHOWICZ E NAGRODZKA-GODYCKA (2015).

Os resultados demonstraram que a relação  $a/d$  dos consolos foi imperativa em relação ao carregamento máximo que cada consolo suportou, mesmo para os consolos com protensão. O trabalho concluiu que a protensão dos consolos retarda o aparecimento das fissuras e diminui

o tamanho de abertura destas, porém em relação ao aumento da capacidade de carga, não se pode afirmar que esta é efetiva, pois dependendo da relação  $a/d$  e do posicionamento das barras de protensão, a capacidade pode vir a diminuir.

## 6.5 NAGRODZKA-GODYCKA (1999)

Com o objetivo de avaliar a efetividade do reforço com barras externas em consolos de concreto armado, Nagrodzka-Godycka (1999) desenvolveu em laboratório ensaios de amostras com diferentes relações  $a/d$ , e diferentes formas de reforço externo (barra externa com protensão e barra externa sem protensão).

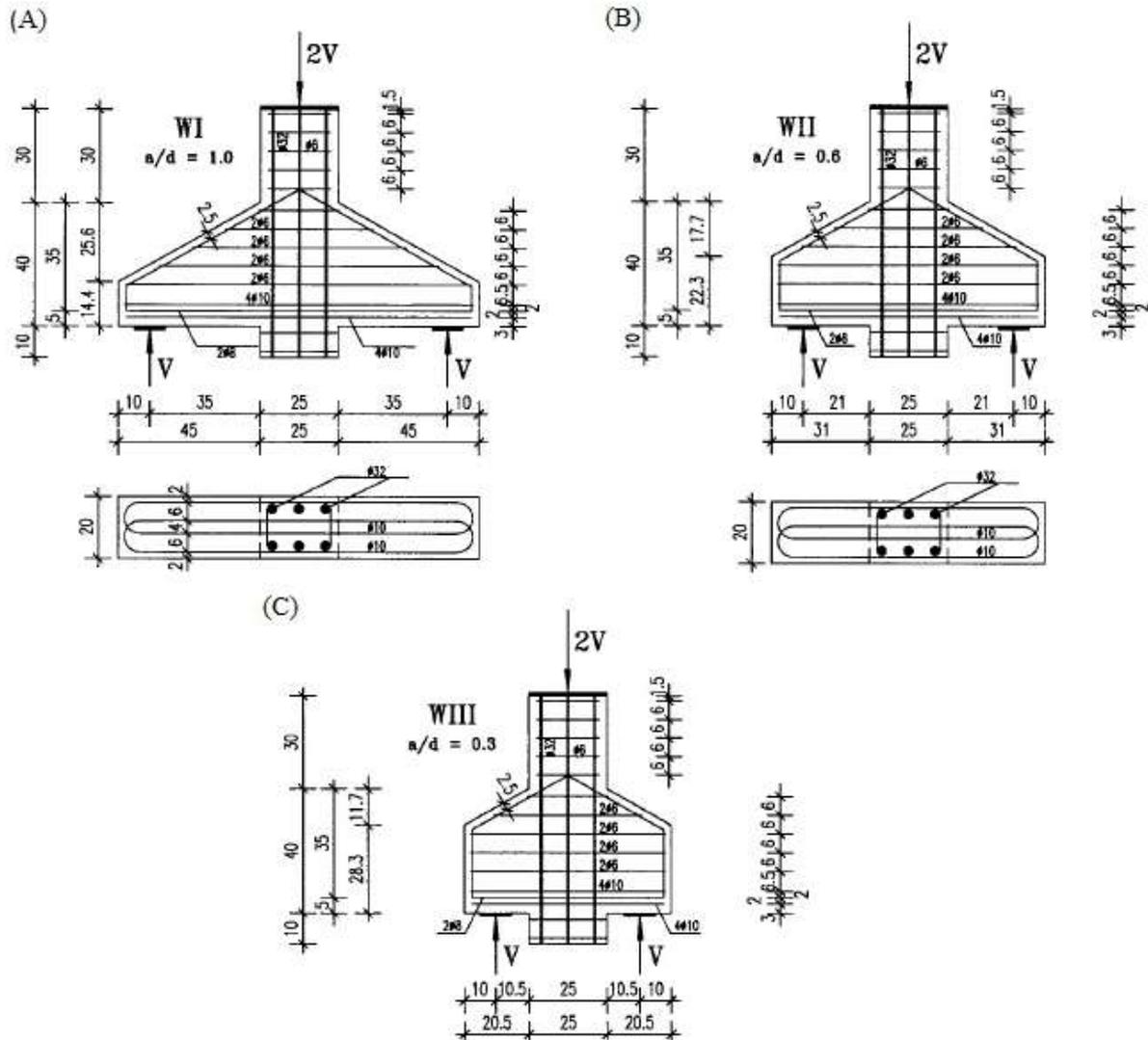
A sistemática de pesquisa consistiu no ensaio de nove consolos de concreto armado com diferentes relações  $a/d$  (1,0 - I, 0,6 - II e 0,3 - III), separados em três grupos, onde primeiramente foram ensaiadas uma amostra de cada relação  $a/d$  sem nenhum tipo de reforço externo (grupo W-4), como um referencial de pesquisa, chamados de consolos básicos. Na sequência foram ensaiadas as amostras do grupo reforçado com barras externas protendidas (W-2) e do grupo com barras externas sem protensão (W-3).

As amostras foram confeccionadas em concreto com resistência característica a compressão em corpo de prova cúbico de 30 MPa (25,5 MPa de resistência para corpo de prova cilíndrico), e barras de aço com diferentes resistências características ao escoamento, de acordo com o seu diâmetro (Tabela 9). A Figura 30 apresenta detalhes das amostras ensaiadas.

**Tabela 9 – Tensão de escoamento para cada barra**

Bitola (mm)	Tensão de Escoamento (MPa)
32	390
25	396
10	493
8	483
6	291,4

Fonte: Adaptado de NAGRODZKA-GODYCKA (1999).



**Figura 30 - Consolos ensaiados: A –  $a/d = 1,0$ ; B –  $a/d = 0,6$ ; C –  $a/d = 0,3$**   
 Fonte: Adaptado de NAGRODZKA-GODYCKA (1999).

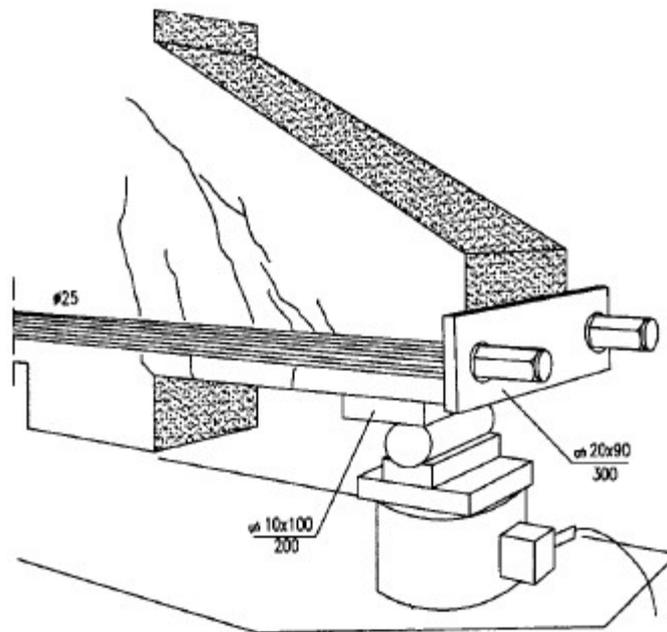
Para a obtenção dos dados dos corpos de prova ensaiados, foram utilizados *strain gages* nas armaduras do tirante e nos estribos, em duas posições (seção de ligação pilar/consolo e na metade da distância entre o pilar e a face externa do consolo), as deformações do concreto foram mensuradas com extensômetros mecânicos na direção da escora de compressão.

Os consolos foram submetidos ao carregamento em sua posição invertida (Figura 32), e a dinâmica de ensaio seguiu os seguintes passos:

- Aplicação de carga aos consolos básicos (grupo W-4) e obtenção de suas capacidades de carga ( $V_{ubc}$ ).
- Aplicação de carga aos consolos dos grupos W-2 e W-3 em passos de carga de  $0,1 V_{ubc}$  até o valor de  $0,6 V_{ubc}$ .
- Descarregamento parcial dos consolos dos grupos W-2 e W-3.

- Instalação e protensão de barras externas aos consolos do grupo W-2.
- Instalação de barras externas (sem protensão) aos consolos do grupo W-3.
- Aplicação de carga aos consolos dos grupos W-2 e W-3 em passos de  $0,1 V_{ubc}$  até a ruptura.

em que:  $V_{ubc}$  – carga de ruptura dos consolos do grupo W-4 (consolos básicos)



**Figura 31 - Barras externa para protensão**  
Fonte: Adaptado de NAGRODZKA-GODYCKA (1999).

As primeiras fissuras, da ordem de 0,04 mm a 0,1 mm, apareceram na junção entre o pilar e o consolo, após o carregamento inicial  $0,6 V_{ubc}$ . Todas as amostras apresentaram fissuras inclinadas. As aberturas máximas para consolo WI (1,0) foram de 0,1 mm, e da ordem 0,2 mm para os modelos WII (0,6) e WIII (0,3).

A aplicação da protensão externa nas amostras do grupo W-2 fez com que as fissuras se fechassem e voltassem a aparecer quando do carregamento dos consolos. A Figura 32 (a) apresenta a fissuração para o consolo WII-2 antes da aplicação de protensão (a), e a Figura 32 (b), após a aplicação da protensão externa.

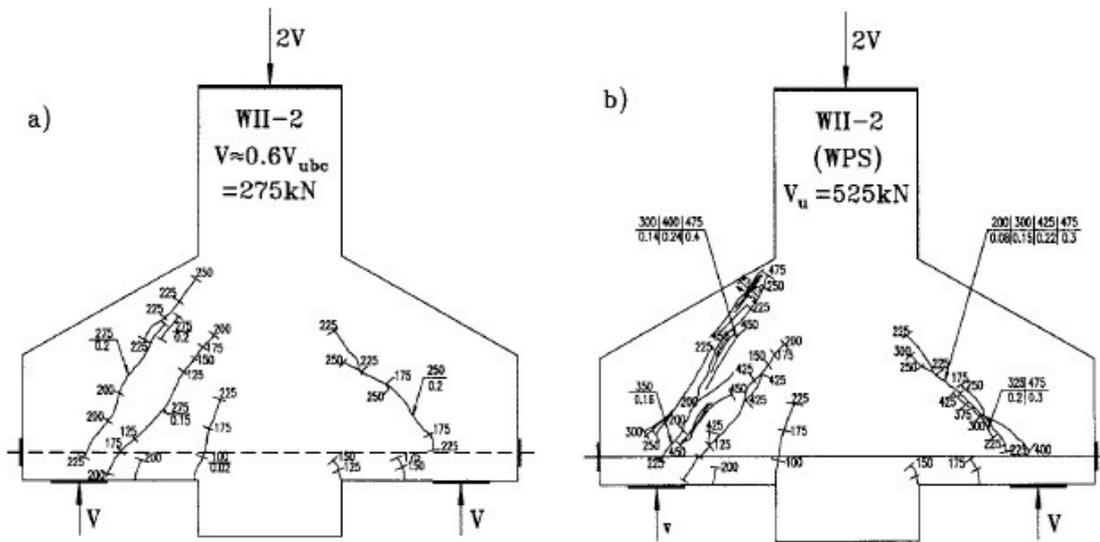


Figura 32 - Propagação das fissuras WII-2:  $0,6 V_{abc}$  (a),  $V_u$  (b)

Fonte: NAGRODZKA-GODYCKA (1999).

A abertura de fissuras no decorrer do ensaio foi menor nos consolos protendidos por barras externas, em comparação a aqueles que receberam barras externas passivas, o que pode ser visto na Figura 33.

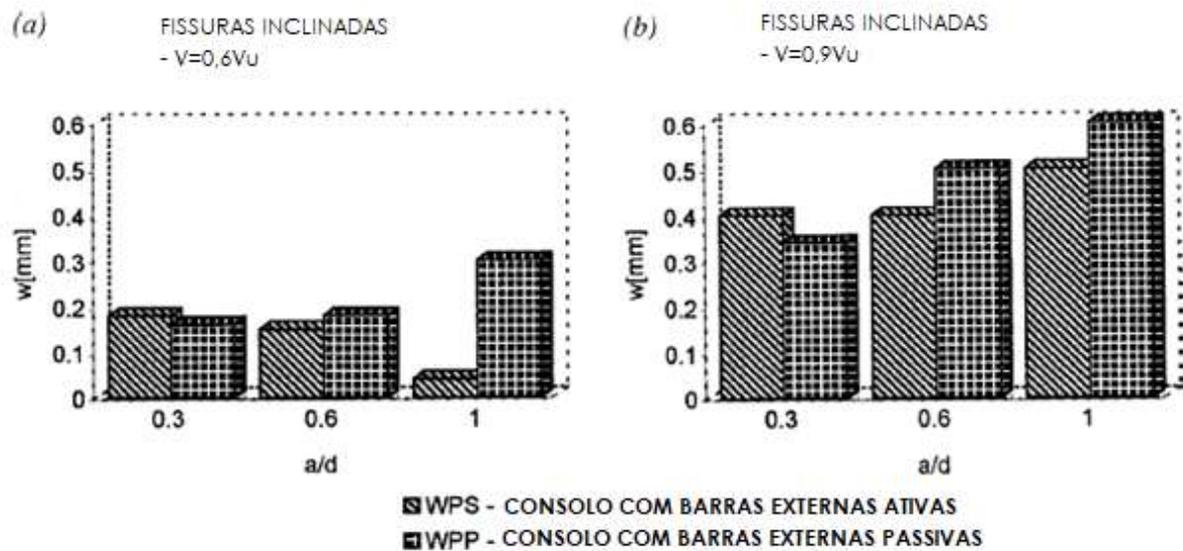


Figura 33 - Abertura de fissuras: (a)  $V = V_u$ ; (b)  $V = V_{abc}$

Fonte: Adaptado de NAGRODZKA-GODYCKA (1999).

A razão da falha dos consolos WI (1,0) e WII (0,6), foi o esmagamento da diagonal comprimida, independentemente do tipo de reforço externo, enquanto do modelo WIII foi uma

mescla de esmagamento da diagonal comprimida com esforço cortante. A Tabela 10 apresenta as cargas de ruptura para os consolos ensaiados.

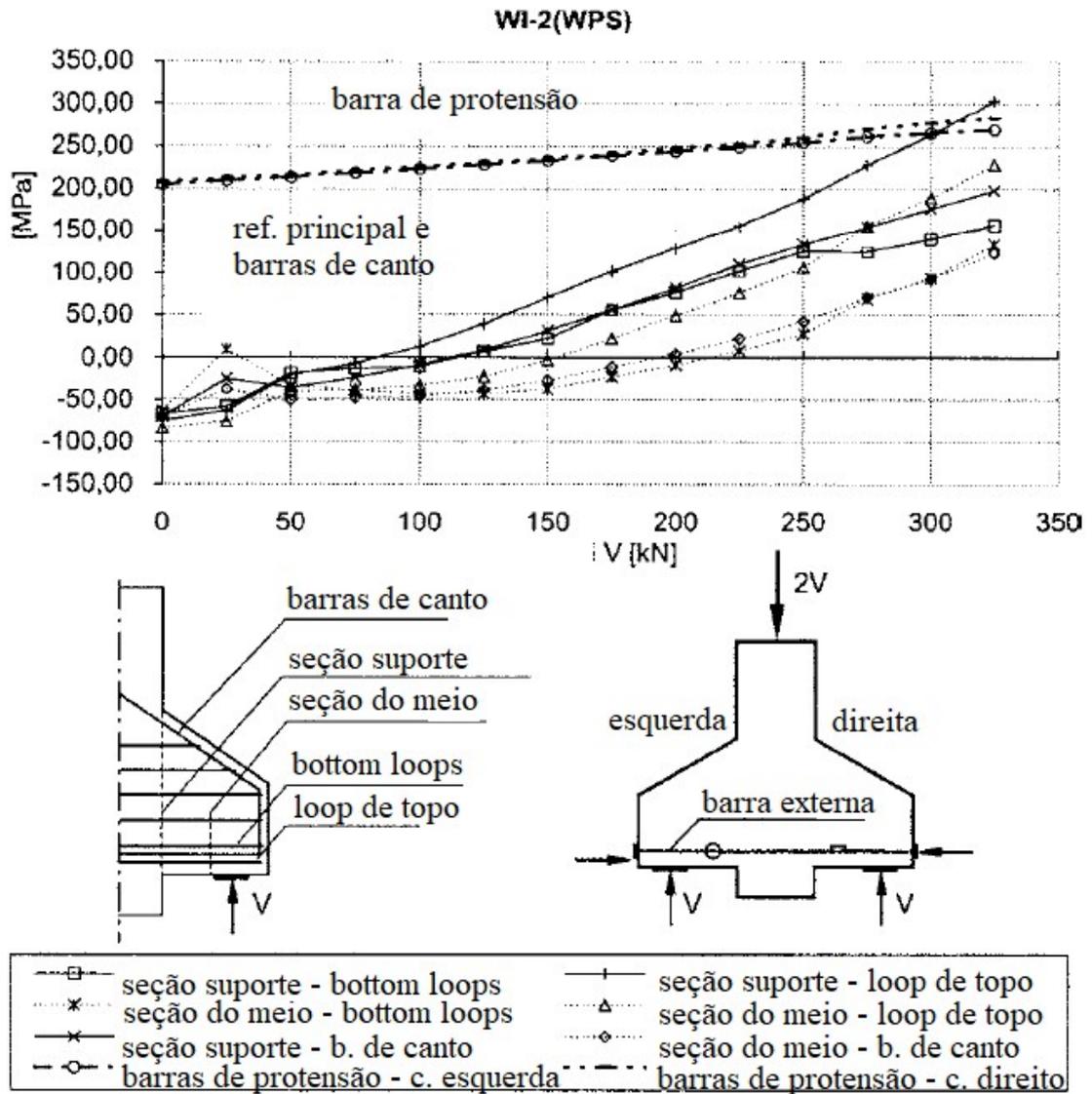
**Tabela 10 – Cargas de ruptura – NAGRODZKA-GODYCKA (1999)**

CONSOLO	a/d	CARGA DE RUPTURA – $V_u$ (kN)
WI-4	1,0	250
WI-2 (WPS)	1,0	350
WI-3 (WPP)	1,0	275
WII-4	0,6	475
WII-2 (WPS)	0,6	525
WII-3 (WPP)	0,6	500
WIII-4	0,3	650
WIII-2 (WPS)	0,3	700
WIII-3 (WPP)	0,3	650

**Figura 34 - Cargas de ruptura**

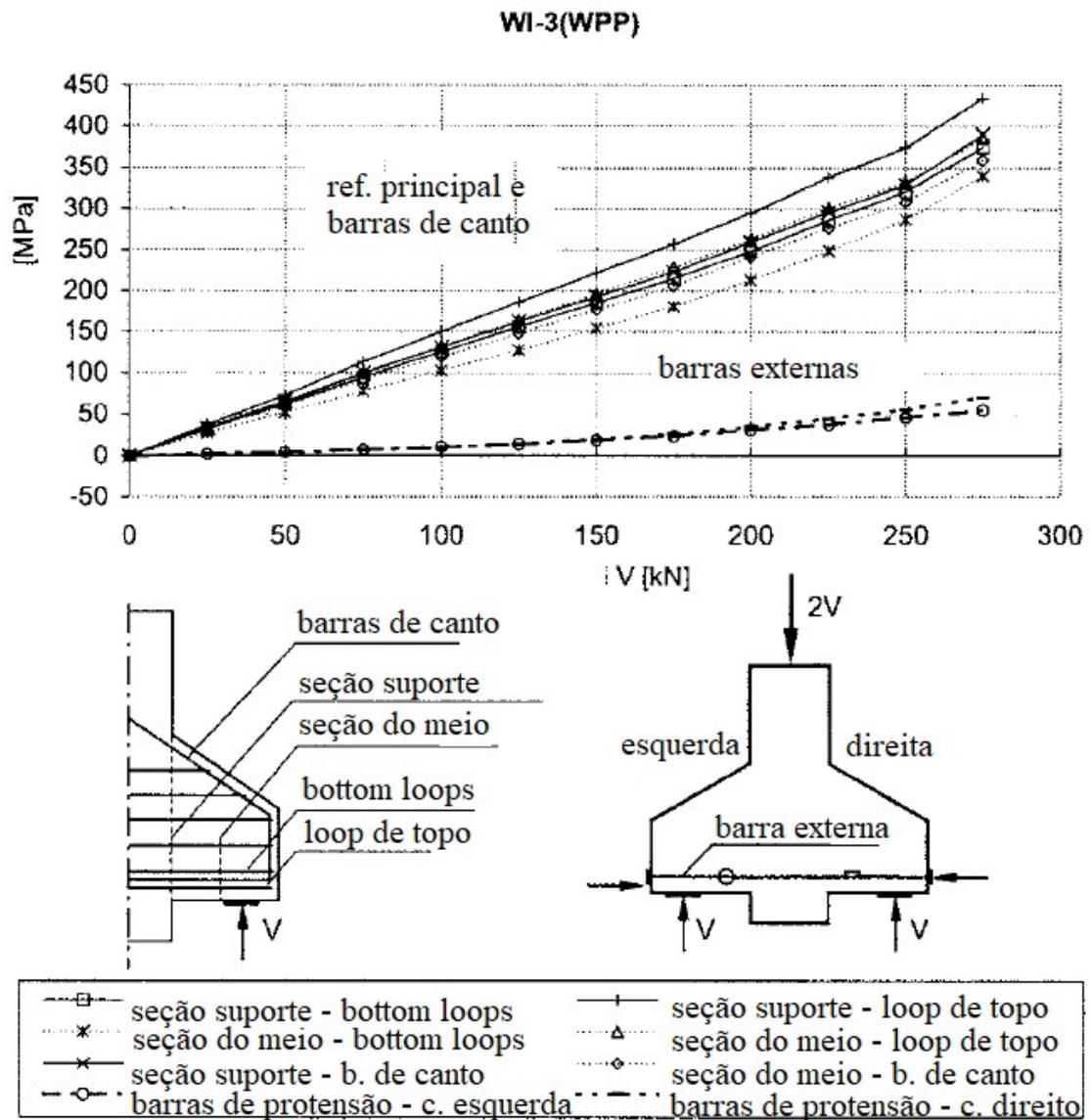
Fonte: Adaptado de NAGRODZKA-GODYCKA (1999).

A tensão medida nas barras com o consolo submetido a um carregamento de 90% da carga última, se aproximou da tensão de escoamento para as medições feitas na armadura principal. Para as barras externas ativas foi de 280 MPa e para as barras externas passivas foi de 70 MPa. É possível observar na Figura 35, o desenvolvimento das tensões nas barras de reforço do consolo WI-2 e WI-3.



**Figura 35 - Tensão nas barras de reforço para o modelo WI-2 – NAGRODZKA-GODYCKA(1999)**

Fonte: Adaptado de NAGRODZKA-GODYCKA (1999)



**Figura 36 - Tensão nas barras de reforço para o modelo WI-3 – NAGRODZKA-GODYCKA(1999)**

Fonte: Adaptado de NAGRODZKA-GODYCKA (1999)

## 6.6 EXEMPLO DE PROJETO PARA MODELO DE ESCORAS E TIRANTES – CONSOLO PRÉ-MOLDADA ADAPTADO A PILAR

Em sua publicação *exemplos de projetos para modelos de escoras e tirantes* a FIB apresenta o exemplo de uma intervenção estrutural executada em um estacionamento de veículos de um shopping na cidade de Varsóvia (Polônia), em que vigas pré-moldadas não possuíam espaço suficiente para dilatação na região de apoio nos pilares, o que acabava por induzir novos esforços não previstos na estrutura, então para solucionar este problema, foram

instalados novos consolos de concreto armado em forma de duplo C na cabeça dos pilares, sendo os antigos consolos extraídos. Os novos consolos foram unidos a estrutura através de barras pós tensionadas, sendo este serviço realizado em cinquenta e sete pilares da edificação.

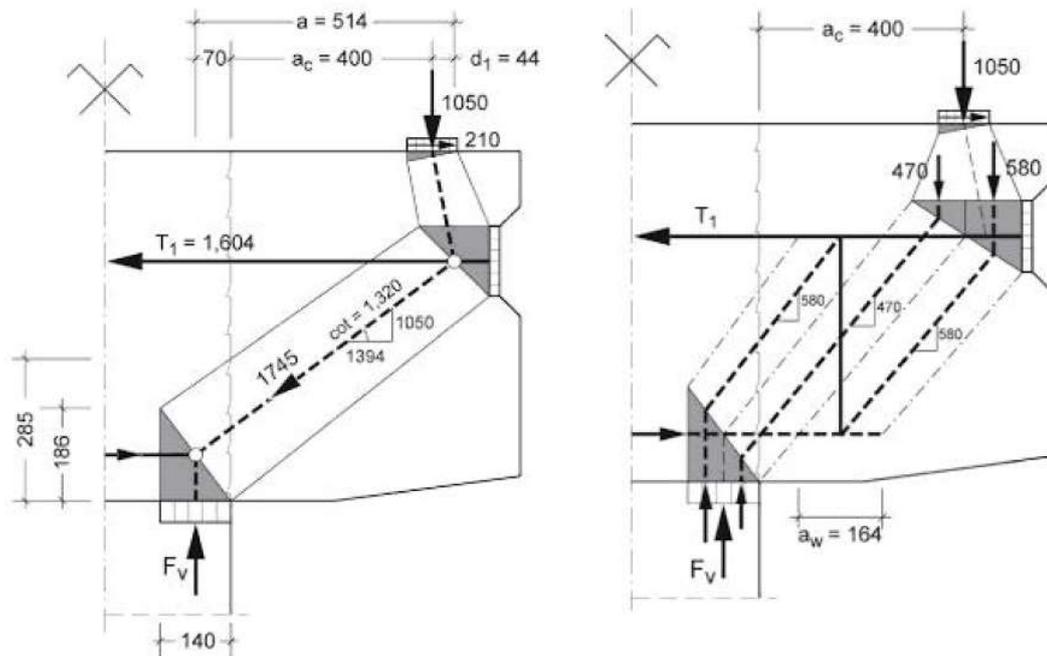


**Figura 37 - Consolo pré-moldado com barras de pós tensão**

Fonte: FIB BULLETIN 61 (2011)

O concreto utilizado foi um C30/C37, com resistência característica de 30 MPa e de cálculo de 17 MPa, resistência a tração média ( $f_{ctm}$ ) de 2,03 MPa e de cálculo ( $f_{ctd}$ ) de 1,13 MPa. As barras de aço foram do tipo S400 com resistência característica de cálculo de 350 MPa, e as barras de aço protendidas foram submetidas a um esforço de 500kN.

O dimensionamento foi executado de acordo com as Equações (32) à (38). A Figura 38 apresenta os modelos de escoras e tirantes disponíveis para o cálculo do consolo.



**Figura 38 - Modelos: simplificado (a esquerda), refinado (a direita)**  
 Fonte: FIB BULLETIN 61 (2011).

Com base no modelo de escoras e tirantes simplificado, foi obtido o valor de 1.604 kN para o esforço no tirante, o que corresponde a uma área de aço de 4,583 mm<sup>2</sup>.

O exemplo apresentado também verifica a transferência do esforço através da interface de ligação entre o pilar e o consolo, para isso, é feito referência ao item 5.5 da obra - *FIP: Practical Design of Structural Concrete (1999)* - que apresenta a Equação 43, a qual deve ser verificada afim de se garantir que não ocorra o deslizamento nas interfaces.

$$\tau_{fd} = \beta * f_{cta} + \mu * \sigma_{td} \leq 0,25 * f_{1cd} \quad \text{Equação (43)}$$

em que:

$\beta$  – Coeficiente de aplicação (superfície lisa = 0,2);

$\sigma_{td}$  – Tensão normal na interface;

$\mu$  - Coeficiente de fricção (superfície lisa = 0,6);

$f_{cta}$  – Resistência a tração de cálculo do concreto (1,13 MPa);

Aplicando a equação 43:

$$\tau_{fd} = 0,2 * 1,13 + 0,6 * \frac{200}{50 * 70} \leq 0,25 * 17 \quad \therefore 3,65 < 4,25 \quad \text{Equação (44)}$$

Como a tensão calculada de 3,65 MPa é menor do que a tensão limite de 4,25 MPa, calcula-se o valor da força de resistência a fricção disponível na interface de contato do consolo com o pilar (500 x 700 mm):

$$F_{Rfd} = 3,65 * 500 * 700 * 10^{-3} = 1,278kN \quad \text{Equação (45)}$$

A qual é superior ao carregamento de 1050 kN aplicado ao consolo, garantindo assim que não ocorrerá deslizamento na interface entre as superfícies.

## 7 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Atualmente uma ferramenta poderosa de análise não linear é o método dos elementos finitos (MEF), de acordo com Rao (1999) o início do desenvolvimento do MEF data da década de 50, sendo o nome citado pela primeira vez no trabalho de Clough (1960).

Mesmo não sendo um método novo, os grandes avanços alcançados envolvendo o MEF ocorreram a partir da década de 80, com o advento dos computadores.

Souza (2004) define o MEF, de maneira simplificada, como a descrição e análise de forma diferencial de um problema físico, onde as equações que governam este problema são resolvidas numericamente.

Rao (1999) explica que o fundamento do MEF é substituir um problema de solução altamente complexa por vários pequenos problemas de solução simplificada, desta forma o problema é discretizado em vários elementos de dimensões reduzidas, chamados de elementos finitos. Estes elementos são conectados através de nós, os quais são caracterizados por serem pontos onde equações de equilíbrio são estabelecidas e soluções aproximadas são obtidas.

Segundo Rades (2006), MEF é uma versão localizada do método de Rayleigh-Ritz, onde ao invés de se procurar encontrar uma função que satisfaça as condições de contorno de todo o domínio do problema, definem-se funções admissíveis chamadas de funções de forma sobre o domínio dos elementos finitos, os quais possuem geometria bem mais simplificada.

Rao (1999) descreve 6 passos para a solução de problemas estáticos de estruturas:

- **Discretização:** Consiste em dividir a estruturas em vários elementos finitos, decidindo o número, tamanho, tipo e arranjo (malha) dos elementos. A relação entre o número de elementos escolhidos e o tamanho destes é inversamente proporcional, sendo que quanto mais elementos forem utilizados mais precisos serão os resultados obtidos, e maior será o tempo necessário de processamento. Por esse motivo indica-se que malhas mais refinadas (com maior número de elementos) sejam utilizadas em pontos de concentração de cargas como regiões D. Segundo Rades (2006) uma das vantagens mais importantes em utilizar o MEF é o fato de que a discretização das estruturas em vários elementos finitos possibilita que problemas de geometria complexa sejam definidos por funções locais admissíveis, definidas sobre pequenos domínios da estrutura.

- Seleção de um modelo adequado de deslocamento: Deve-se escolher uma solução simples do ponto de vista do processamento computacional, que satisfaça a certos requisitos de convergência, sendo esta solução, geralmente, uma equação polinomial.
- Obtenção das matrizes de rigidez dos elementos e vetores de carga: Baseados na lei de deslocamento escolhida obtêm-se a matriz de rigidez  $[K^{(e)}]$  e o vetor de cargas  $[P^{(e)}]$  utilizando um princípio variacional adequado, uma abordagem residual ponderada ou condições de equilíbrio.
- Obtenção das equações de equilíbrio Globais: Uma vez que a estrutura é composta por vários elementos finitos, as matrizes de rigidez de elementos individuais e os vetores de carga devem ser dispostos de uma forma adequada e as equações de equilíbrio globais têm de ser formuladas como a Equação 46:

$$[K] * \underline{\phi} = \underline{P} \quad \text{Equação (46)}$$

em que:

- $[K]$  – Matriz de rigidez da estrutura;
- $\underline{\phi}$  - Vetor dos deslocamentos atuantes na estrutura;
- $\underline{P}$  – Vetor das forças nodais atuantes na estrutura;

- Solução dos deslocamentos nodais desconhecidos: As equações gerais do equilíbrio devem ser modificadas para considerarem as condições de contorno do problema, sendo que após a incorporação destas condições a equação pode ser expressa como a Equação 47.

$$[K] = \phi - P \quad \text{Equação (47)}$$

Para problemas lineares o vetor pode ser resolvido facilmente, porém para os problemas não lineares a solução deve ser obtida de forma iterativa, onde para cada passo, deve-se levar em conta, a modificação da matriz de rigidez e do vetor deslocamento.

- Cálculo das tensões e deformações: A partir dos deslocamentos nodais conhecidos " $\phi$ ", pode se obter as tensões e deformações a partir das equações da mecânica dos sólidos.

O desenvolvimento e apresentação do equacionamento que constitui o MEF não se faz necessário ao entendimento deste trabalho e por isso não será apresentado, podendo ser encontrado no livro de Rao (2011).

Bathe (2014) destaca a importância da escolha adequada de um modelo matemático que descreva o modelo físico, pois a solução do MEF resultará apenas na resposta numérica das suposições impostas pelo modelo matemático, não se devendo esperar mais informações na previsão dos fenômenos físicos do que aquelas contidas no modelo matemático.

A aplicação do MEF computacionalmente envolve três estágios de atividade: o primeiro, chamado de pré-processamento, consiste na inserção e preparação dos dados do problema, como, coordenadas nodais, definição das condições de contorno, carregamentos, propriedades dos materiais, entre outros; o segundo, chamado de processamento, consiste no processamento dos dados e cálculo das variáveis, como deslocamentos, tensões, etc.; o terceiro estágio (pós-processamento) consiste na apresentação dos resultados, tais como a configuração deformada da estrutura em análise, o modo de vibração, as tensões, fissurações, etc. (RADES, 2006).

De acordo com Souza a aplicação do MEF permite entender perfeitamente o fluxo das tensões no interior do elemento em análise, tornando-se assim uma ferramenta essencial para o dimensionamento de regiões especiais, um exemplo disto é o dimensionamento através do método das escoras e tirantes, onde a partir da aplicação do MEF obtêm-se a melhor definição do posicionamento das barras de reforço.

Sistemas de análise não-linear baseados no MEF estão sendo cada vez mais utilizados para a análise de estruturas, pesquisas que antigamente levavam meses e exigiam toda uma estrutura de suporte, como laboratórios, ferramentas, entre outras coisas, agora podem ser realizadas em frente de um computador pessoal a qualquer tempo. Vários softwares encontram-se disponíveis no mercado nos dias de hoje, entre os mais conhecidos e utilizados no Brasil podemos citar o ATENA, ADINA, NASTRAN, ABAQUS, ANSYS, SAP2000, entre outros.

Rades (2006) diz que, os motivos que fizeram que o MEF tivesse uma aprovação universal, foram: a rotina de escolha das funções de forma; a facilidade de produzir as matrizes de rigidez e vetores de carregamento (através da composição de matrizes de elementos pré-definidos); e a versatilidade. Essas características fizeram com que o MEF evoluísse e se tornasse capaz de realizar análises lineares e não-lineares, estáticas e dinâmicas em várias áreas da engenharia.

## 8 ANÁLISE NÃO-LINEAR COM O ATENA

Na natureza os materiais existentes apresentam comportamento não-linear, ou seja, não existe uma relação perfeitamente linear tensão x deformação para estes materiais, apesar disso para facilitar o estudo destes, relações lineares são adotadas afim de facilitar o entendimento das leis que regem estes materiais, isso torna possível que problemas de grande complexidade sejam analisados de forma racional e eficaz.

Muitos dos materiais como o concreto e o aço sobre pequenas deformações possuem seus comportamentos adotados como lineares, deixando de apresentar este comportamento com o crescimento das deformações. O dimensionamento de estruturas de concreto com base em uma análise linear é adequado, e conduz a resultados satisfatórios ao projetista, desde que se atenda a ductilidade mínima das peças (NBR 6118:2014), porém como dito anteriormente o comportamento dos materiais não é perfeitamente linear, e para que possamos nos aproximar o máximo do comportamento real da estrutura, uma análise não-linear se faz necessária.

Segundo Lourenço e Figueiras (1995) a análise não-linear não se trata de uma ferramenta de projeto, e sim de verificação da estrutura, uma vez que para a sua realização é necessário que as geometrias e posicionamento dos elementos analisados já estejam previamente definidos, onde, a partir das relações constitutivas reais dos materiais é possível determinar o comportamento das estruturas mais precisamente, através da compatibilização dos deslocamentos a cada etapa de carregamento aplicado.

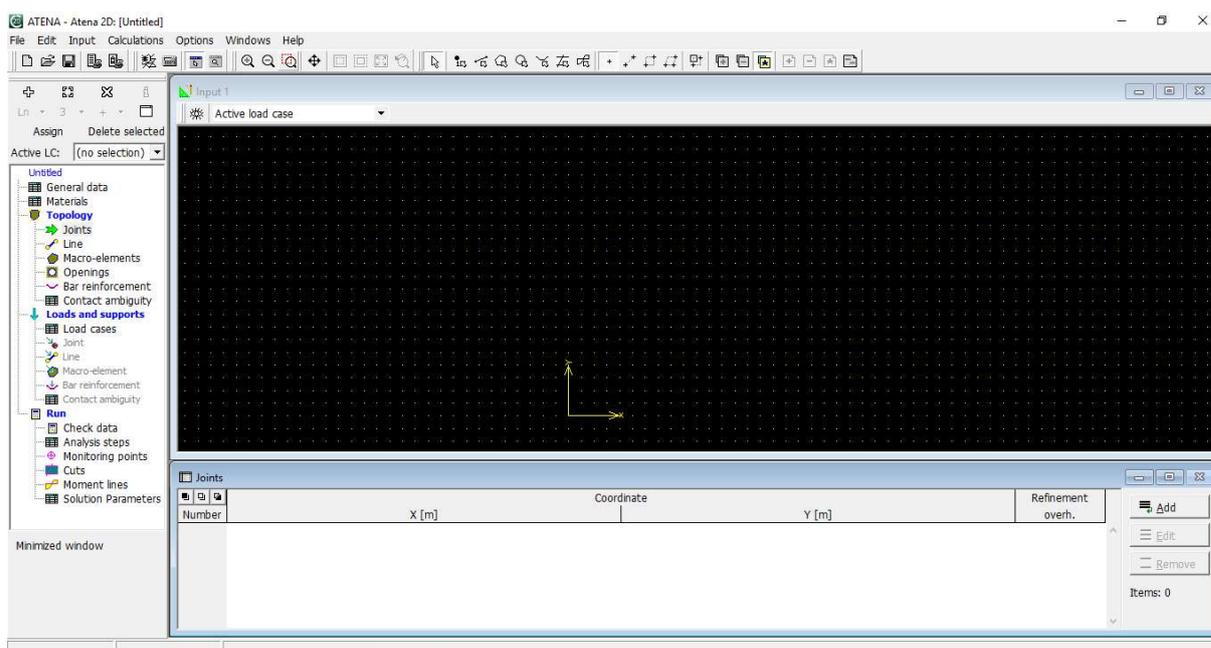
O comportamento das estruturas como não-linear pode ser classificado de acordo com a resposta destas, as ações de carregamentos externos, sendo esta não linearidade dividida entre não-linearidade física e não-linearidade geométrica:

- A não-linearidade física decorre do fato dos materiais constituintes das estruturas não apresentarem relações lineares tensão x deformação, sendo suas equações constitutivas geralmente descritas por matrizes.
- A não-linearidade geométrica decorre do fato de que para grandes deslocamentos a deflexão lateral de um membro da estrutura pode acarretar o aparecimento de esforços adicionais a aqueles que estão sendo aplicados, sendo estes, chamados de esforços de 2ª ordem.

O ATENA é um software de análise voltado para estruturas de concreto armado capaz de realizar análises não-lineares. Através dele é possível obter o modo de ruptura e fissuração das estruturas, e o escoamento das armaduras, sendo a distribuição de esforços internos feita automaticamente conforme a fissuração do concreto.

O ATENA possui uma interface amigável e relativamente fácil de definir os elementos estruturais e posicionar as barras de reforço. Onde através de uma ferramenta de análise em tempo real, é possível visualizar as deformações e a fissuração dos elementos, tanto em suas superfícies externas como em camadas internas, definidas pelo usuário.

O programa possui duas versões, uma voltada para análises bidimensionais (ATENA 2D) e uma voltada para análises tridimensionais (ATENA 3D), sendo utilizado neste trabalho o ATENA 2D, tendo em vista que consolos estudados são elementos submetidos a tensões no próprio plano. A Figura 39 apresenta a interface gráfica do software ATENA 2D.



**Figura 39 – Interface do Software ATENA 2D.**

O programa é desenvolvido pela empresa Cervenka Consulting, com sede na República Tcheca, e atualmente se encontra na versão 5.4 (2017), a empresa disponibiliza uma versão demo para os usuários, que pode ser baixada através do site oficial ([www.cervenka.cz](http://www.cervenka.cz)). Esta versão é limitada a utilização de 300 elementos finitos e para sua utilização os requisitos mínimos de hardware exigidos para seu correto funcionamento são:

- PC com MS Windows 7 (64 bit), 8 GB de memória Ram, 500 GB de HD, GPU com OpenGL e HW acceleration, processador gráfico.

De acordo com Cervenka, Jendele e Cervenka (2016), análises não-lineares podem ser classificadas de acordo com o tipo de comportamento não-linear da estrutura:

- Comportamento não-linear dos materiais (não-linearidade física): Este tipo é o mais comum para a maioria das estruturas de concreto armado, pois devido aos limites impostos para atender aos estados de serviço, as deformações serão relativamente pequenas.
- Não-linearidade Geométrica: Deformações excessivas de modo que as equações de equilíbrio devam considerar a forma deformada da estrutura, porém as equações constitutivas dos materiais continuam sendo consideradas lineares.
- Consideração do comportamento não-linear dos materiais e geométrico da estrutura.

Cervenka, Jendele e Cervenka (2016) explicam que para a realização da análise não-linear com consideração da não-linearidade geométrica e física, o carregamento não pode ser aplicado de uma única vez, devendo este ser incremental, isto é, a cada incremento de carga a nova posição deformada da estrutura deve ser levada em conta. Para isto apresentam-se duas formas de formular a estrutura:

- Formulação de Lagrange: Esta formulação está focada no comportamento das partes infinitesimais de volume ( $dV$ ), onde as deformações do elemento como um todo, são oriundas de variações volumétricas das partes. Esta formulação é geralmente utilizada para análise de estruturas.
- Formulação de Euler: Esta formulação é a mais utilizada para o estudo de fluidos e gases, uma vez que a ideia principal é estudar o “fluxo” do material, através de volumes fixos e infinitesimais da estrutura.

A análise estrutural através da formulação de Lagrange pode ser considerada de duas formas: a primeira é denominada de Formulação de Lagrange Total (TL), onde as equações governantes dizem respeito a configuração inicial indeformada no tempo “ $t$ ” igual a 0; a

segunda, as equações se referem a uma configuração deformada num tempo “ $t + \Delta t$ ”, intitulada de Formulação de Lagrange Atualizada (UL).

Segundo Cervenka, Jendele e Cervenka (2016) é difícil definir qual das formulações é a melhor, pois ambas possuem as suas vantagens, sendo a escolha, uma questão particular do analista, baseada em sua experiência e capacidade de julgamento, uma vez que definida as equações constitutivas dos materiais adequadamente, ambos os resultados serão iguais.

Rao (2011) explica que ambas as formulações levam em consideração todos os efeitos cinemáticos não-lineares devido a grandes deslocamentos, grandes rotações e grandes deformações, mas a modelagem adequada das deformações está diretamente ligada a correta especificação das leis constitutivas dos materiais, sendo assim, a única diferença entre a formulação Total e a Atualizada é a eficiência numérica. O software ATENA atualmente utiliza a formulação de Lagrange Atualizada com suporte para o mais alto nível de comportamento não-linear.

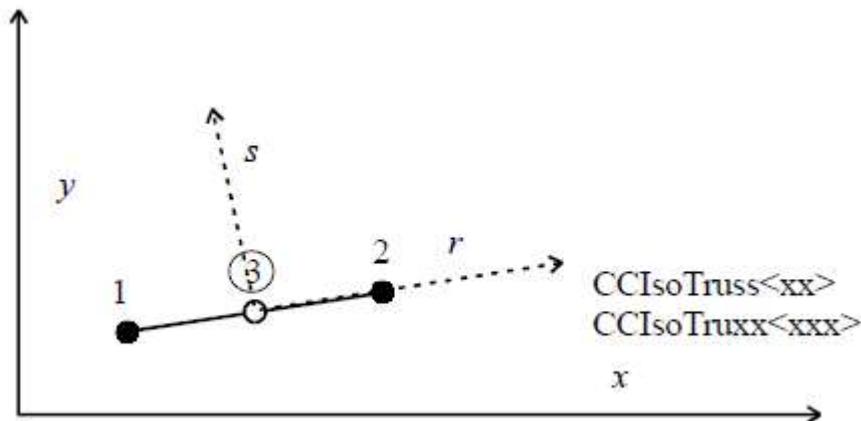
A capacidade de utilização do software ATENA vem sendo comprovada ao longo dos tempos através de trabalhos realizados com vigas convencionais (GRIBNIAK; CERVENKA; KAKLAUSKAS, 2013), vigas-parede com aberturas (CAMPIONE; MINAFÒ, 2012), consolos (CANHA et al., 2014), painéis de cisalhamento (SOUZA, 2012b; TODUT; DAN; TOIAN, 2014), vigas reforçadas com fibras de aço (SINGH; SINGH; KAUSHIK, 2007), blocos de fundação (BUTTIGNOL, 2011), entre outros, onde o ATENA apresentou altíssima concordância entre os resultados das simulações realizadas e os resultados dos ensaios físicos naqueles trabalhos que os compararam.

## 8.1 TIPOS DE ELEMENTOS FINITOS

Segundo Cervenka, Jendele e Cervenka (2016) os elementos finitos estão disponíveis em três grupos: elementos planos para 2D, 3D e análises axissimétricas; elementos sólidos 3D e elementos especiais, os quais contemplam os elementos para modelagem de cabos externos, molas, e etc. A grande maioria dos elementos implementados no ATENA são construídos a partir de uma formulação isoparamétrica com funções de interpolação lineares e/ou quadráticas.

Elementos 2D e elementos de treliça 3D são codificados no grupo CCIsoTruss<xx>... CCIsoTruss<xxx>, onde os caracteres dentro dos sinais “<>” identificam os nós dos elementos.

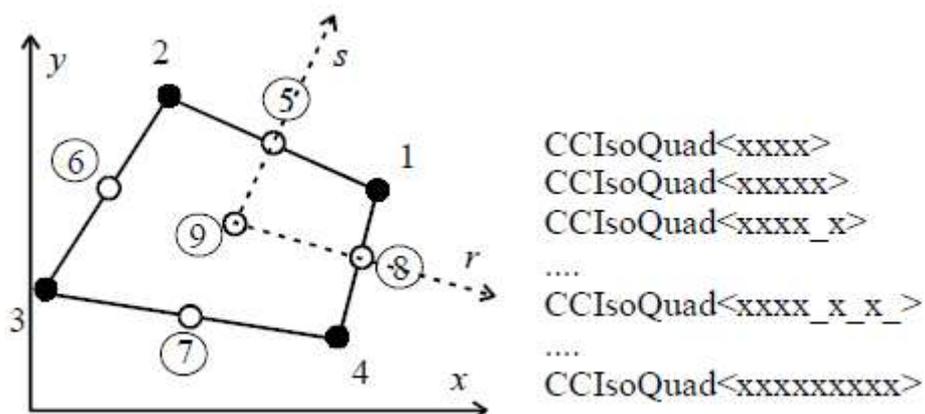
Estes são elementos isoparamétricos integrados por Gauss, com 1 ou 2 pontos de integração para o caso de interpolação linear ou quadrática respectivamente, isto é, para elementos com 2 ou 3 nós. Esses elementos estão disponíveis para análises 2D e 3D, a Figura 40 apresenta a geometria desses elementos.



**Figura 40 - Geometria dos elementos CCIsoTruss <...>**

Fonte: Cervenka, Jendele e Cervenka (2016).

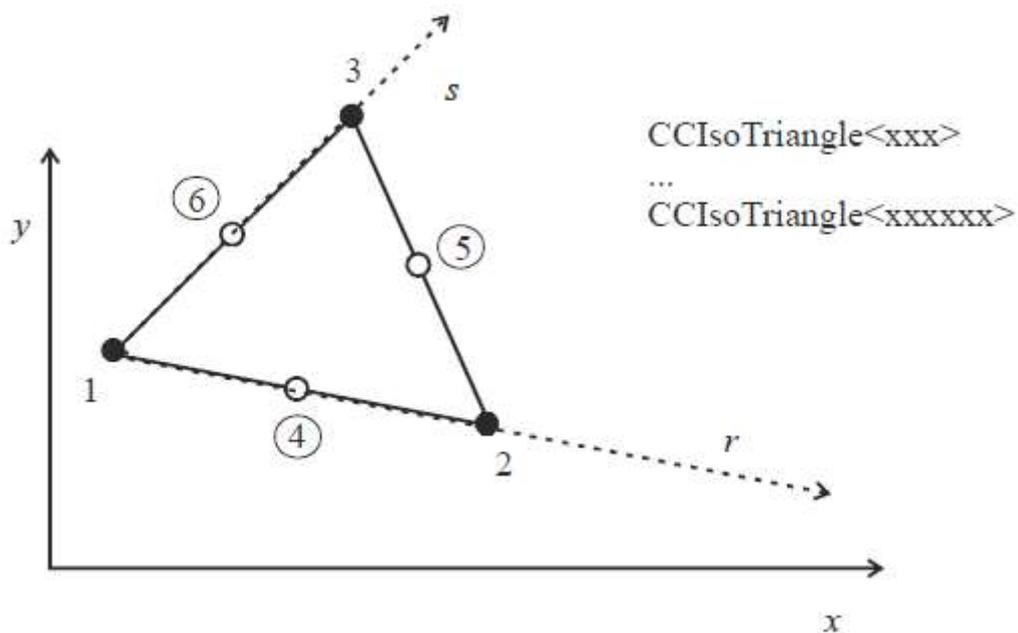
Os elementos quadriláteros planos são codificados no grupo de elementos CCIsoQuad <xxxx> ... CCIsoQuad <xxxxxxxx>, onde os caracteres no interior dos símbolos “< >” descrevem os nós dos elementos. Estes elementos são isoparamétricos integrados através da integração de Gauss, com 4 a 9 pontos de interpolação para interpolação bilinear ou biquadrática. Estes elementos estão disponíveis para problemas 2D, axissimétricos e 3D. A Figura 41 apresenta a geometria desses elementos.



**Figura 41 - Geometria dos elementos CCIsoQuad <...>**

Fonte: CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016)

Elementos triangulares planos são codificados no grupo dos elementos  $CCIsoTriangle<xxx> \dots CCIsoTriangle<xxxxxxx>$ , onde os caracteres no interior dos símbolos “< >” descrevem os nós do elemento. Estes são elementos isoparamétricos integrados através da integração de Gauss com 1 ou 3 pontos de integração para os casos de interpolação bilinear e biquadrático. Estes elementos estão disponíveis para problemas 2D, axissimétricos e 3D. A Figura 42 apresenta a geometria desses elementos.



**Figura 42 - Geometria dos elementos  $CCIsoTriangle<...>$**   
 Fonte: CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016)

## 8.2 MODELOS CONSTITUTIVOS

### 8.2.1 MODELO CONSTITUTIVO SBETA (*CCSBetaMaterial*)

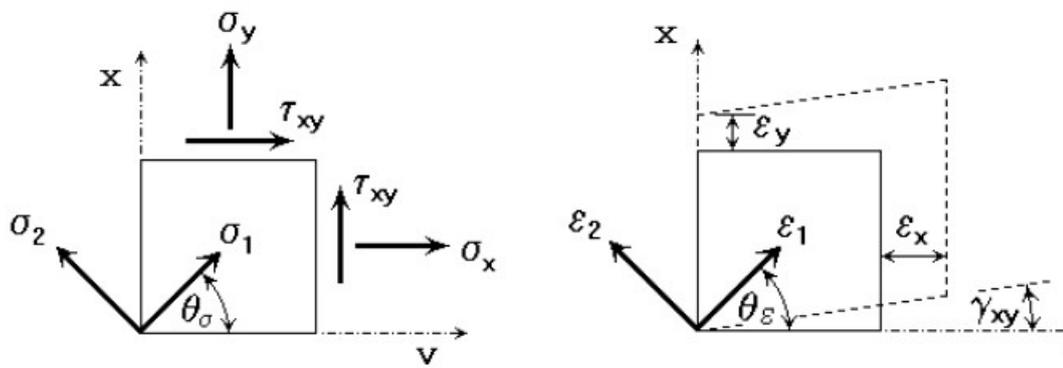
As formulações das relações constitutivas são realizadas sobre o estado plano de tensões, onde através de uma abordagem aproximada, as propriedades definidas para um certo ponto material são associadas ao elemento finito todo. O modelo constitutivo é baseado na rigidez e descrito pela equação de equilíbrio 48 em um ponto do material (CERVENKA, JENDELE E CERVENKA, 2016):

$$s = D * e \quad \text{Equação (48)}$$

$$s = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T \quad \text{Equação (49)}$$

$$e = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T \quad \text{Equação (50)}$$

A convenção de sinais para tensões normais utilizada pelo programa é de sinal positivo para tensões de tração e negativo para tensões de compressão. Para as tensões tangenciais o sinal é positivo na direção para cima na face direita do elemento, conforme a Figura 43.



**Figura 43 - Componentes no estado plano de tensão (esquerda), componentes no estado plano de deformação (direita)**

Fonte: CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016).

O modelo SBETA leva em consideração as seguintes características do comportamento do concreto:

- Comportamento não-linear sobre compressão, incluindo endurecimento e abrandamento;
- Fraturamento do concreto à tração baseado na Mecânica da fratura não-linear;
- Critério de falha sobre tensão biaxial;
- Redução da resistência a compressão sobre efeito da fissuração;
- Enrijecimento à tração “tension stiffening”;
- Redução da rigidez ao cisalhamento após a fissuração “variable shear retention”;
- Dois modos de fissuração: direção fixada da fissuração “fixed crack model” e direção rotacionada de fissuração “rotated crack model”;

A perfeita aderência entre o concreto e as barras de reforço é considerada, não sendo possível modelar diretamente o escorregamento das barras, este só é possível através do enrijecimento. No entanto, em uma análise macro o deslocamento relativo do reforço em relação ao concreto pode ocorrer, se o concreto estiver fissurado ou esmagado.

O reforço seja na forma distribuída “smeared reinforcement” ou concentrada “discrete reinforcement” é analisado em seu estado uniaxial de tensão, sendo sua lei constitutiva um diagrama tensão x deformação multilinear.

O modelo constitutivo SBETA do concreto possui 20 parâmetros sobre o material, sendo esses parâmetros especificados pelo usuário de acordo com o seu objetivo de análise, caso o usuário não saiba quais parâmetros utilizar, estes podem ser definidos automaticamente de acordo com as fórmulas da Tabela 11, onde o usuário deve definir apenas a resistência nominal do concreto  $f'_{cu}$ . Segundo Cervenka, Jendele e Cervenka (2016) essas fórmulas foram extraídas do CED-FIP code 90 e de outras pesquisas.

**Tabela 11 - Fórmulas padrão para os parâmetros do material (SBETA)**

Parâmetro:	Formula:
Resistência cilíndrica	$f'_c = -0,85 * f'_{cu}$
Resistência a tração	$f'_t = 0,24 * f'_{cu}^{\frac{2}{3}}$
Módulo de elasticidade inicial	$E_c = (6000 - 15,5 * f'_{cu}) * \sqrt{f'_{cu}}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,2$
Abrandamento a compressão	$w_d = -0,0005mm$
Modelo de abrandamento a tração	1 – exponential, based on $G_F$
Resistência a compressão no concreto fissurado	$c = 0,8$
Enrijecimento sob tração	$\sigma_{st} = 0$
Fator de retenção ao corte	Variável (item 2.1.7)
Função modelo sob tração e compressão	Linear
Energia de fratura $G_f$ de acordo com VOS 1983	$G_F = 0,000025 f'_t{}^{ef} [MN/m]$
Fator de orientação para localização da deformação	$\gamma_{max} = 1,5$ (item 2.1.3)

Fonte: Adaptado de CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016).

Os valores dos parâmetros podem ser influenciados pelas considerações realizadas sobre segurança, ressaltando assim a importância da possibilidade de definição dos

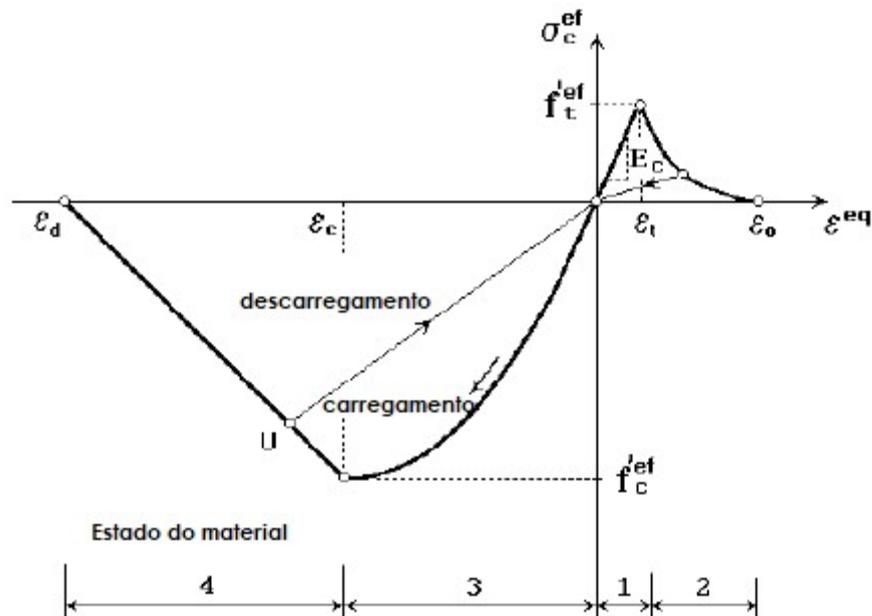
parâmetros pelo usuário com bases em seus objetivos de análise. Os valores dos parâmetros que não estão demonstrados na Tabela 11 possuem valor igual a zero.

### 8.2.2 RELAÇÃO TENSÃO x DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO

O comportamento não-linear do concreto em seu estado biaxial de tensões é descrito pela tensão efetiva e pela deformação uniaxial equivalente, sendo na maioria dos casos a tensão efetiva sua tensão principal. O conceito de deformação uniaxial equivalente é introduzido de forma a eliminar o efeito de Poisson no estado plano de tensão, Equação 51.

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\sigma_{ci}}{E_{ci}} \quad \text{Equação (51)}$$

A deformação uniaxial equivalente pode ser considerada como a deformação produzida em um teste de tensão uniaxial na direção  $i$  com um módulo de elasticidade associado na mesma direção. Com essas suposições a não linearidade representa o dano causado apenas pela tensão uniaxial na direção  $i$ . O diagrama tensão x deformação completo para um estado uniaxial de tensão é mostrado na Figura 44.



**Figura 44 – Diagrama tensão x deformação para uniaxial de tensões do concreto**

Fonte: Adaptado de CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016).

Os números de 2 a 4 na Figura 14 são utilizados para representar o estado de fissuração do concreto nas análises realizadas. O descarregamento é representado por uma função linear que passa pela origem, a reta representada na Figura 44 que passa pelo ponto U define um exemplo de descarregamento. Desta forma fica evidente que a relação tensão x deformação não é única e depende do histórico de carregamentos, uma vez que a cada ciclo de carregamento a relação segue pela mesma linha até o ponto U e posteriormente a função de carregamento é continuada. Os pontos de pico de tração e compressão são calculados de acordo com o estado biaxial de tensão, então pode-se dizer que a lei tensão x deformação uniaxial reflete o estado biaxial de tensão (CERVENKA, JENDELE, CERVENKA, 2016).

O comportamento do concreto não fissurado submetido a tração é assumido como elástico linear, onde " $E_c$ " é o módulo de elasticidade inicial do concreto, e " $f_c'^{ef}$ " é a resistência a tração efetiva derivada da função biaxial de ruína (Equação 52).

$$\sigma_c^{ef} = E_c * \varepsilon^{eq} \quad \text{Equação (52)}$$

em que:

$$0 \leq \sigma_c \leq f_t'^{ef}$$

A abertura de fissuras do concreto sobre tração pode ser descrita por dois modelos, o primeiro através de um modelo de fissuração fictício baseado na lei de abertura de fissuras e na energia de faturamento, o segundo baseado na relação tensão x deformação em um ponto material, sendo este indicado apenas para uso em casos especiais. Informações mais detalhadas sobre abertura de fissuras podem ser observadas em Cervenka, Jendele e Cervenka (2016).

Em sequência são apresentados cinco modelos de abrandamento incluídos no material SBETA:

- Lei de abertura de fissura exponencial:

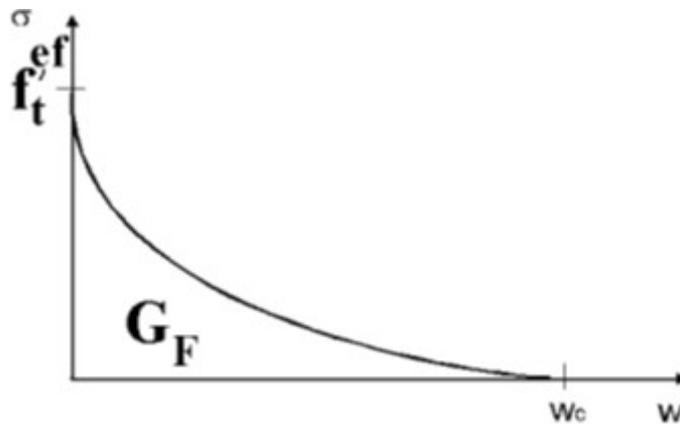
A Equação 53, que determina a lei de abertura de fissura, foi derivada experimentalmente por HORDIJK (1991, apud CERVENKA; JENDELE; CERVENKA, 2014).

$$\frac{\sigma}{f_t'^{ef}} = \left\{ 1 + \left( c_1 * \frac{w}{w_c} \right)^3 \right\} * \exp \left( -c_2 * \frac{w}{w_c} \right) - \frac{w}{w_c} * (1 + c_1^3) * \exp(-c_2) \quad \text{Equação (53)}$$

$$w_c = 5,14 * G_f / f_t'^{ef} \quad \text{Equação (54)}$$

- em que:
- w – abertura de fissuras;
  - $w_c$  – abertura de fissura no momento de total ausência de tensão;
  - $\sigma$  – tensão normal na fissura (coesão de fissura);
  - $c_1, c_2$  – são constantes com valores de 3 de 6,93;
  - $G_f$  – energia de fratura necessária para criar uma área unitária de fissura livre de tensão;
  - $f_t'^{ef}$  – tensão efetiva derivada da função de ruína;

A abertura de fissura  $w$  é derivada da deformação de acordo com a teoria da banda de fissura.

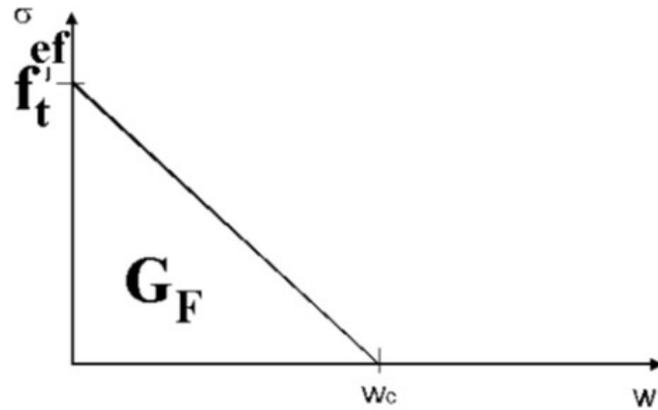


**Figura 45 - Lei exponencial de abertura de fissura**  
Fonte: CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016).

- Lei linear de abertura de fissura:

$$\frac{\sigma_c^{ef}}{f_t'^{ef}} = \frac{f_t'}{w_c} * (w_c - w) \quad \text{Equação (55)}$$

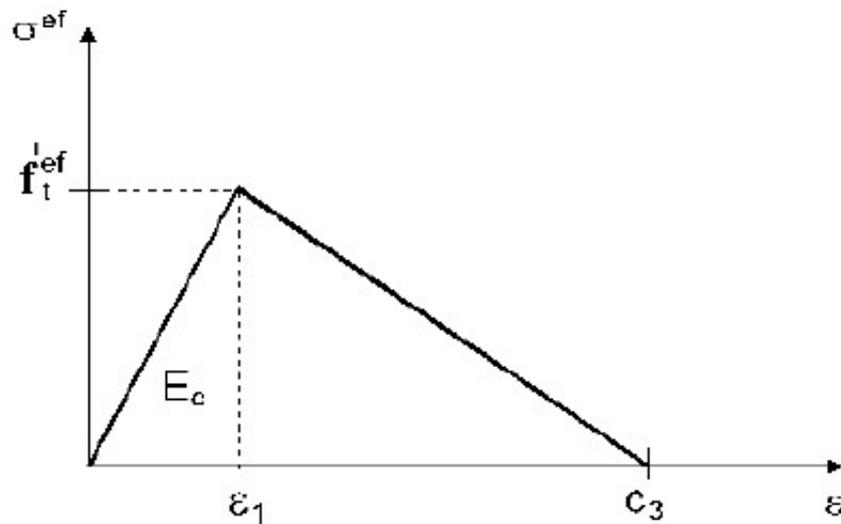
$$w_c = \frac{2 * G_f}{f_t'} \quad \text{Equação (56)}$$



**Figura 46 - Lei linear de abertura de fissura**  
 Fonte: CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016).

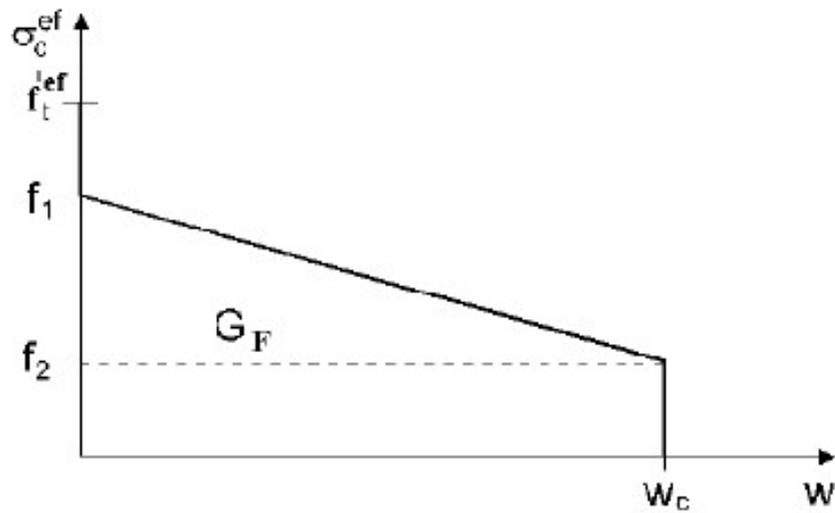
- Abrandamento linear baseado na deformação local:

O ramo descendente do diagrama tensão x deformação é definido pela deformação " $c_3$ " correspondente a ausência de tensão.



**Figura 47 - Lei linear de abrandamento baseada na deformação**  
 Fonte: CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016).

- SFRC baseada na energia de fratura:

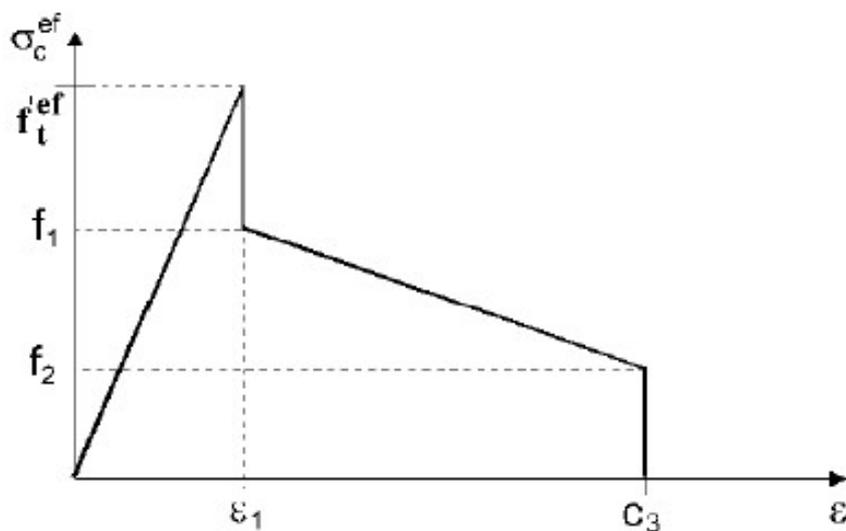


**Figura 48 - Lei do reforço em fibra de aço baseada na energia de fratura**  
 Fonte: CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016).

Onde os parâmetros são:

$$c_1 = \frac{f_1}{f_t^{'ef}}, c_2 = \frac{f_2}{f_t^{'ef}}, w_c = \frac{2G_f}{f_1 + f_2} \quad \text{Equação (57)}$$

- SFRC baseado na deformação:



**Figura 49 - Lei do reforço em fibra de aço baseada na deformação**  
 Fonte: CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016).

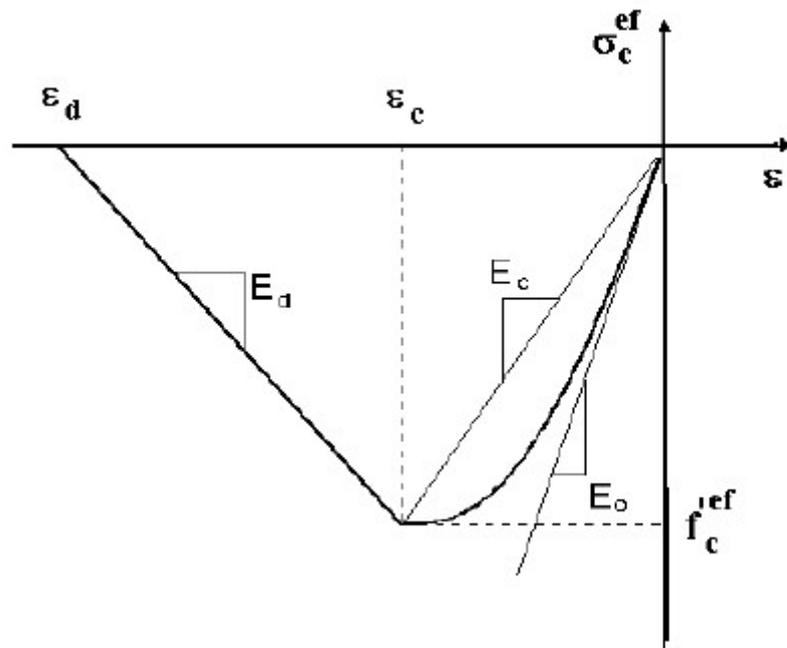
Onde os parâmetros " $c_1$ " e " $c_2$ " são relativos as posições do nível de tensão e o parâmetro " $c_3$ " é relativo a deformação:

$$c_1 = \frac{f_1}{f_t^{'ef}} \quad \text{Equação (58)}$$

$$c_2 = \frac{f_2}{f_t^{'ef}} \quad \text{Equação (59)}$$

### 8.2.3 COMPORTAMENTO A COMPRESSÃO ANTERIOR A TENSÃO DE PICO.

A Equação 60 recomendada pelo código modelo 90 CEB-FIP foi adaptada para o trecho ascendente do diagrama tensão x deformação do concreto a compressão (Figura 50). Esta fórmula permite ampla gama de formas de curvas, de linear para curva, sendo apropriada para concreto normal e de alta resistência.



**Figura 50 - Diagrama tensão x deformação para o concreto a compressão**  
 Fonte: CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016).

$$\sigma_c^{ef} = f_c^{'ef} * \frac{kx - x^2}{1 + (k - 2) * x} \quad \text{Equação (60)}$$

$$x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \quad \text{Equação (61)}$$

$$k = \frac{E_0}{E_c} \quad \text{Equação (62)}$$

$$k = \frac{E_0}{E_c} \quad \text{Equação (63)}$$

em que:

- $\sigma_c^{ef}$  – Tensão de compressão do concreto;
- $f_c'^{ef}$  – Resistência efetiva a compressão;
- $x$  – deformação normalizada;
- $\varepsilon$  – Deformação;
- $\varepsilon_c$  – Deformação no ponto de pico de tensão  $f_c'^{ef}$ ;
- $k$  – Parâmetro de forma (maior ou igual a 1, ex.  $k = 1$  (linear),  $k = 2$  (parábola));
- $E_0$  – Módulo de elasticidade inicial;
- $E_c$  – Módulo de elasticidade secante no ponto de pico de tensão;

Como consequência destas suposições, o dano distribuído é considerado anterior ao ponto de pico, ao contrário do dano localizado que é considerado após o ponto de pico ser alcançado.

#### 8.2.4 COMPORTAMENTO A COMPRESSÃO APÓS A TENSÃO DE PICO

A lei de abrandamento do concreto a compressão é linearmente descendente. Existem dois modelos de abrandamento da deformação sobre compressão, uma baseada em dissipação de energia e outra baseada no abrandamento local da deformação.

O modelo plano a compressão fictício é baseado nas premissas de que a ruína a compressão ocorre localizada em um plano normal a direção da tensão de compressão normal principal, onde todos os picos de deslocamentos compressivos e energias de dissipação estão localizadas, assume-se que esses deslocamentos são independentes do tamanho da estrutura, sendo esta hipótese suportada pelos experimentos conduzidos por Van MIER (1986). Essa

hipótese é análoga a teoria da fissuração fictícia a tração, onde a forma da abertura de fissura e a energia de fratura são propriedades do material.

Sobre compressão o ponto final da curva é definido pelo deslocamento plástico " $w_d$ ", e a energia necessária a formação da área unitária de ruína definida indiretamente. A partir dos experimentos de Van MIER (1986) o deslocamento plástico ( $w_d = 0,5 \text{ mm}$ ) foi utilizado para definição do abrandamento na compressão. A lei de abrandamento é transformada a partir de um plano fictício de ruína, para a relação tensão x deformação válida para o volume correspondente de material contínuo. O declive do diagrama tensão x deformação, é definido pelo ponto de máxima tensão e pelo ponto de deformação a compressão correspondente a tensão nula, sendo que esta deformação é calculada a partir do ponto de deslocamento plástico e tamanho da banda ( $L_d'$ ) de acordo com a Equação 64.

$$\varepsilon_d = \varepsilon_c + \frac{w_d}{L_d'} \quad \text{Equação (64)}$$

A vantagem desta formação é reduzir a dependência da malha de elementos finitos definida.

### 8.2.5 *COMPORTAMENTO DO ABRANDAMENTO DA LEI DE DEFORMAÇÃO A COMPRESSÃO BASEADA NA DEFORMAÇÃO*

O declive da lei de abrandamento da deformação é definido principalmente pelo modulo de elasticidade abrandado ( $E_d$ ), sendo está formulação dependente do tamanho do elemento finito da malha.

### 8.2.6 *LIMITADORES DE LOCALIZAÇÃO*

Os limitadores de localização controlam a localização das deformações no estado de ruína. Estes definem uma região (banda) do material, que representa um plano de ruína discreto

na análise de elementos finitos. Sobre tração a ruína é caracterizada pela fissura, sobre compressão é caracterizada por um plano de esmagamento.

Essas regiões de ruína possuem uma dada dimensão, no entanto, de acordo com os experimentos, as dimensões dessas regiões independem do tamanho da estrutura, sendo assumidas como planos fictícios. No caso de fissuras de tração, esta aproximação é conhecida como “teoria da banda de fissura” (BAZANT, OH, 1983) e possui o mesmo conceito utilizado para a ruína a compressão, o objetivo da banda de ruína é eliminar duas deficiências que ocorrem na aplicação da análise em elementos finitos, o efeito do tamanho do elemento e a orientação do elemento.

A direção dos planos de ruína é assumida como normal as tensões principais (tração e compressão) respectivamente. As bandas de ruína são definidas como projeções dos elementos finitos no plano de ruína.

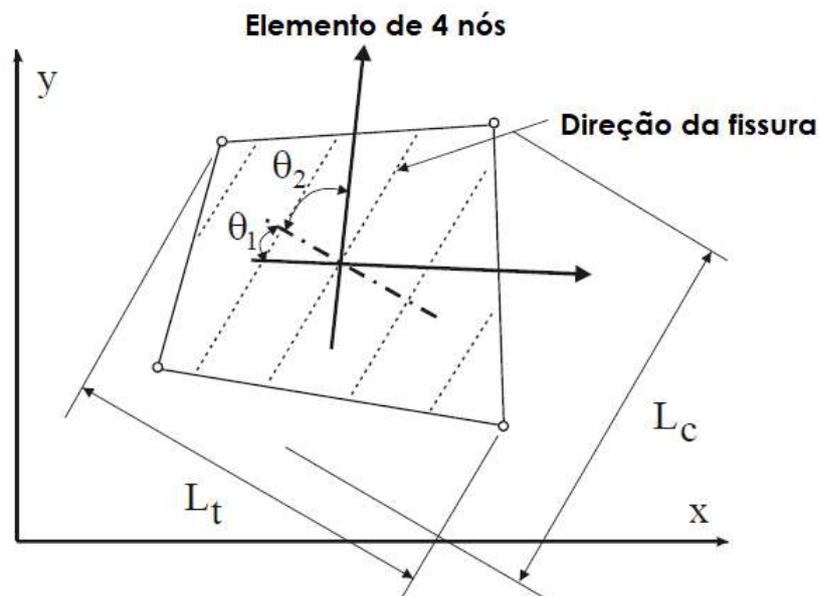
O efeito de orientação do elemento é reduzido, aumentado ainda mais a banda de ruína para malhas inclinadas, de acordo com Cervenka et. Al (1995) (Equação 65 e 66).

$$L'_t = \gamma * L_t \quad \text{Equação (65)}$$

$$L'_d = \gamma * L_d \quad \text{Equação (66)}$$

$$\gamma = 1 + (\gamma^{max} - 1) * \frac{\theta}{45} \Leftrightarrow \theta \in (0; 45) \quad \text{Equação (67)}$$

O ângulo " $\theta$ " é o menor ângulo ( $\min(\theta_1, \theta_2)$ ) entre a direção normal ao plano de ruína e os lados do elemento. No caso genérico de elemento quadrilateral a direção dos elementos é calculada pela média entre dois lados opostos na mesma direção. A Equação 67 é uma interpolação linear entre o fator " $\gamma = 1,0$ " relativo a direção paralela com os lados do elemento, e " $\gamma = \gamma^{max}$ " para direção de  $45^\circ$ , sendo recomendado o valor de " $\gamma^{max} = 1,5$ ".

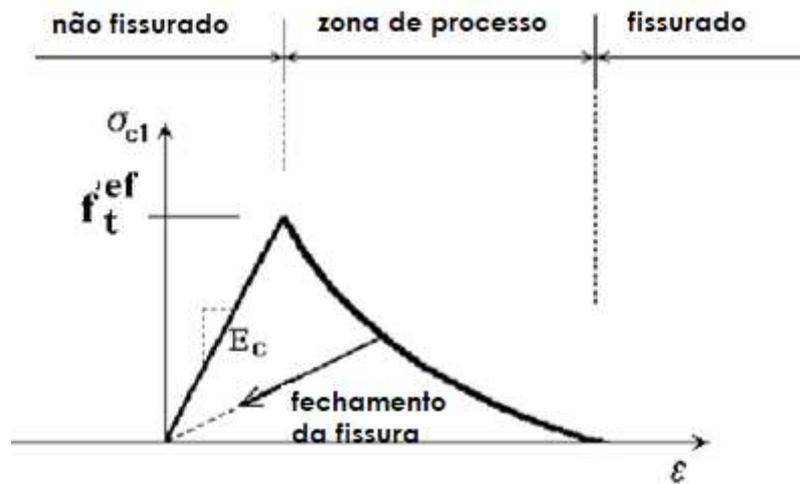


**Figura 51 - Definição dos localizadores de banda**

Fonte: Adaptado de CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016).

### 8.2.7 PROCESSO DE FRATURA E LARGURA DE ABERTURA

De acordo com Cervenka, Jendele e Cervenka (2016) o processo de formação de fissura pode ser dividido em três estágios, o primeiro estágio segue entre o ponto de tensão zero e o ponto em que a resistência a tração é atingida, após esse pico o processo de formação de fissura ocorre em uma região de potencial formação de fissura, onde com o avanço da deformação a tensão de tração desce, até o ponto em que o concreto não oferece mais resistência a tração e a abertura da fissura continua com a ausência de tensão. A Figura 52 apresenta os estágios de abertura de fissura.



**Figura 52 - Estágio de abertura de fissuras**

Fonte: Adaptado de CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016).

A largura das fissuras ( $w$ ) é calculada pela Equação 68, como a largura total de abertura dentro da banda de fissuras.

$$w = \epsilon_{cr} * L_t' \quad \text{Equação (68)}$$

em que:  $\epsilon_{cr}$  – é a deformação de abertura de fissura, que é igual a deformação normal a direção da fissura após a completa ausência de tensão.

## 8.2.8 CRITÉRIO DE RUPTURA SOB ESTADO BIAXIAL DE TENSÕES DO CONCRETO

### 8.2.8.1 RUPTURA À COMPRESSÃO

O critério de ruptura utilizado está em acordo com KUPFER et al. (1969, apud CERVENKA; JENDELE; CERVENKA, 2014). Em uma situação de compressão-compressão a função que descreve o estado de tensão é dada pela Equação 69.

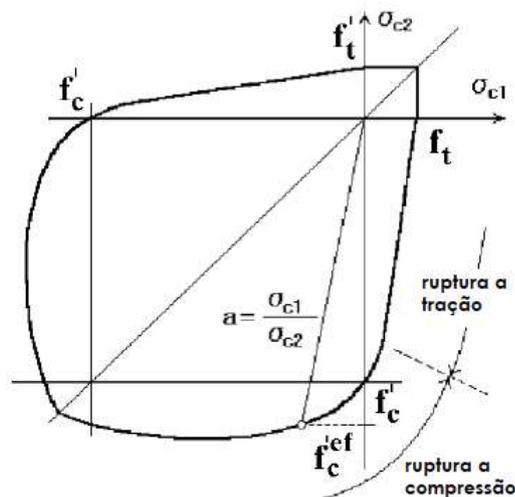
Sobre estado de tração-compressão a função de ruptura segue do ponto " $\sigma_{c1} = 0$ ", " $\sigma_{c2} = f_c'$ ", dentro da região de tração-compressão com decaimento linear de acordo com a Equação 70.

$$f_c'^{ef} = \frac{1 + 3,65a}{(1 + a)^2} * f_c' \quad \text{Equação (69)}$$

$$a = \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} \quad \text{Equação (70)}$$

em que:  $\sigma_{c1}, \sigma_{c2}$  – São as tensões principais do concreto;  
 $f_c'$  - É a resistência cilíndrica uniaxial;

As Equações 69 e 70 são válidas no intervalo " $1,0 \geq r_{ec} \geq 0,9$ ", onde " $r_{ec}$ " é o fator de redução da tensão de compressão principal na direção 2, devido a tensão de tração na direção principal 1. A Figura 53 apresenta o diagrama biaxial para a ruína do concreto.



**Figura 53 - Função biaxial de ruína do concreto**

Fonte: Adaptado de CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016).

### 8.2.8.2 RUPTURA À TRAÇÃO

Sobre estado de tração-tração, a resistência a tração é constante e igual a resistência uniaxial " $f_t'^{ef}$ ". Sobre estado de tração-compressão a resistência é reduzida pela relação 71 e 72, onde a 73 descreve a parte linear e a equação 74 a curva hiperbólica.

$$r_{et} = 1 - 0,95 * \frac{\sigma_{c2}}{f_c'} \quad \text{Equação (71)}$$

$$r_{et} = \frac{A + (A - 1) * B}{AB} \quad \text{Equação (72)}$$

$$B = Kx + A \quad \text{Equação (73)}$$

$$x = \frac{\sigma_{c2}}{f_c'} \quad \text{Equação (74)}$$

### 8.2.9 MODELO DE FISSURAÇÃO DISTRIBUIDA

A abordagem para modelagem de fissuras distribuídas é adaptada no modelo material SBETA. Dentro do conceito de distribuição, duas opções estão disponíveis para o modelo: o modelo de fissura fixa e o modelo de fissura rotacionada. Em ambos os modelos a fissura é formada quando a tensão principal excede a resistência a tração do concreto, sendo assumido que a formação de fissuras é distribuída uniformemente dentro do volume de material. Este efeito é representado no modelo constitutivo pela introdução de uma ortotropia (CERVENKA; JENDELE; CERVENKA, 2016).

### 8.2.10 RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO FISSURADO

Segundo Cervenka, Jendele e Cervenka (2014) a redução da resistência a compressão do concreto após a fissuração na direção paralela a direção das fissuras e dada pela Equação 75.

$$f_c'^{ef} = r_c * f_c' \quad \text{Equação (75)}$$

$$r_c = c + (1 - c) * e^{-(128\varepsilon_u)^2} \quad \text{Equação (76)}$$

Onde “c” representa a máxima redução da resistência sobre a grande deformação transversal. A redução da resistência a compressão não tem que ser resistida apenas pelas barras de reforço, uma vez que entre as faces de uma fissura no concreto ocorre um efeito de ponte, que possibilita que escoras de compressão atravessem a fissura.

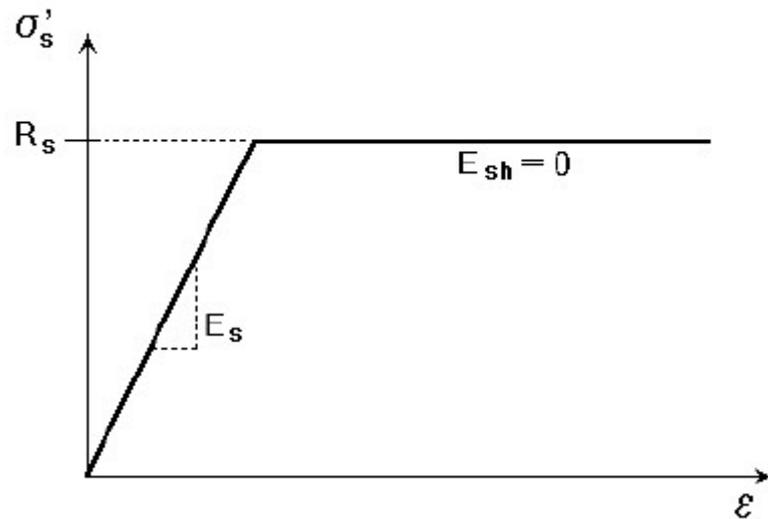
### 8.3 MODELO CONSTITUTIVO DO AÇO

Reforços podem ser modelados de forma discreta e distribuída, na forma discreta o reforço é simulado como barras de reforço e modelado por elementos de treliça, no modelo distribuído o reforço encontra-se no formato de uma malha distribuída por todo o concreto. Em ambos os modelos o reforço resiste apenas a esforço axiais, caracterizando um estado uniaxial de tensão, sendo que lei a de tensão x deformação é a mesma para os dois casos (CERVENKA; JENDELE; CERVENKA, 2016).

O software possui duas relações constitutivas disponível para o reforço:

- Bilinear ou Elasto-Plástico Perfeito:

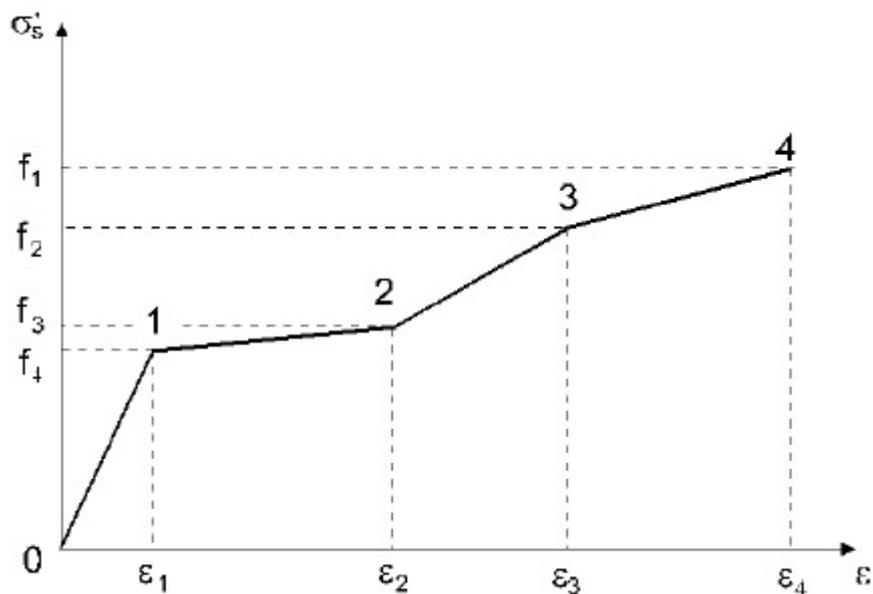
A Figura 54 apresenta o diagrama tensão x deformação para a relação bilinear, onde a parte elástica inicial possui o módulo elástico do aço " $E_s$ ", a segunda parte representa a plasticidade do aço com endurecimento, onde para o caso perfeitamente plástico o módulo assume o valor de " $E_{sh} = 0$ ".



**Figura 54 - Diagrama tensão x deformação bilinear**  
 Fonte: CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016).

- Multi-Linear:

O modelo multi-linear é formado por 4 linhas que representam os 4 estágios do comportamento do aço, elástico, escoamento, endurecimento e fratura, como demonstrado na Figura 55. Este modelo pode ser utilizado tanto para o reforço em sua forma discreta como distribuída.



**Figura 55 - Diagrama tensão x deformação multi-linear**  
 Fonte: CERVENKA, JENDELE E CERVENKA (2016).

No Software ATENA os materiais *CCReinforcement* e *CCSmearredReinforcement* incluem a capacidade de desativar a sua resposta a esforços de compressão, esta habilidade é essencial na simulação de reforços que possuem baixa rigidez a flexão, onde, quando submetidos a esses esforços se flambarão e sua resistência a compressão será negligenciada.

## 9 ANÁLISE NÃO-LINEAR DE CONSOLOS

Para o estudo do reforço com protensão externa em consolos, foram simulados numericamente amostras ensaiadas experimentalmente por NAGRODZKA-GODYCKA (1999). A análise não-linear foi realizada com o software ATENA 2D (Versão Demo 5.3.4.0) e seus resultados comparados aos de NAGROZKA-GODYCKA (1999).

Os consolos analisados são classificados como consolos curtos, um com relação  $a/d = 1,0$  e outro com relação  $a/d = 0,6$ . Ambos os formatos foram simulados em duas configurações diferentes. A primeira, chamada de consolo básico, trata-se da situação em que o consolo é formado apenas por concreto e barras de aço passivas, a segunda, trata-se da situação em que o mesmo consolo (formado apenas por barras passivas) é submetido a uma carga inicial conhecida, na sequência descarregado e simultaneamente reforçado por barras externas protendidas, e analisado novamente.

Os consolos com relação  $a/d = 1,0$  são nomeados de WI-4 e os consolos com relação  $a/d = 0,6$  são nomeados como WII-4, ou seja, aqueles que receberam o reforço externo, recebem em sua nomenclatura o número 2, e aqueles que não receberam barras de reforço externas recebem em sua nomenclatura o número 4. As Figuras 56 a 59 demonstram as características e geometrias dos mesmos.

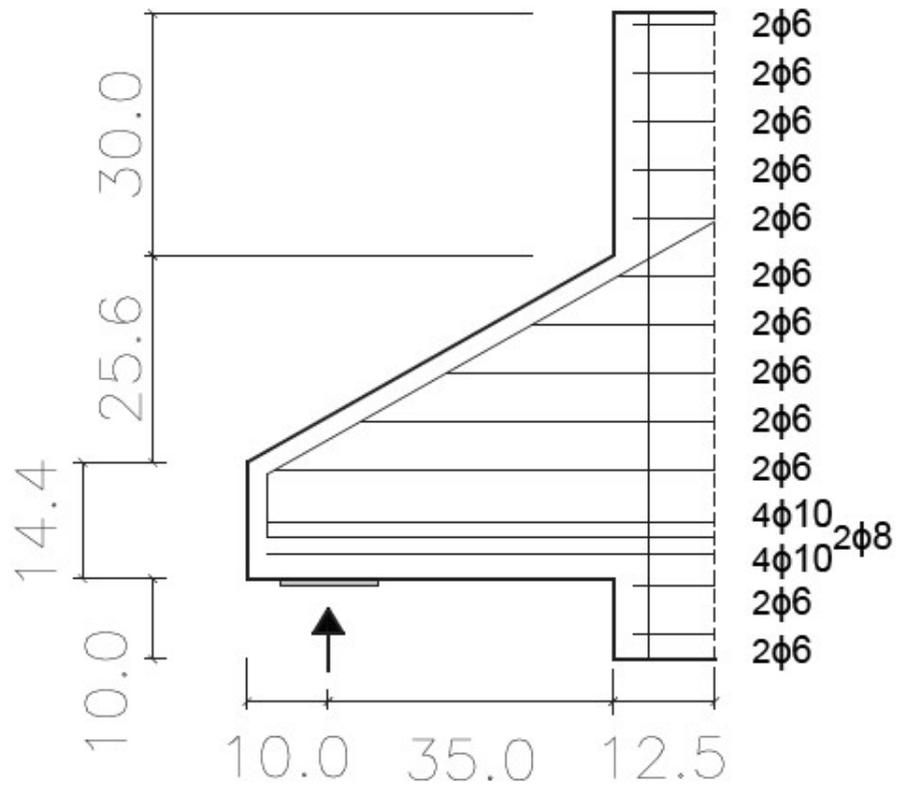


Figura 56 – Detalhes do consolo WI-4

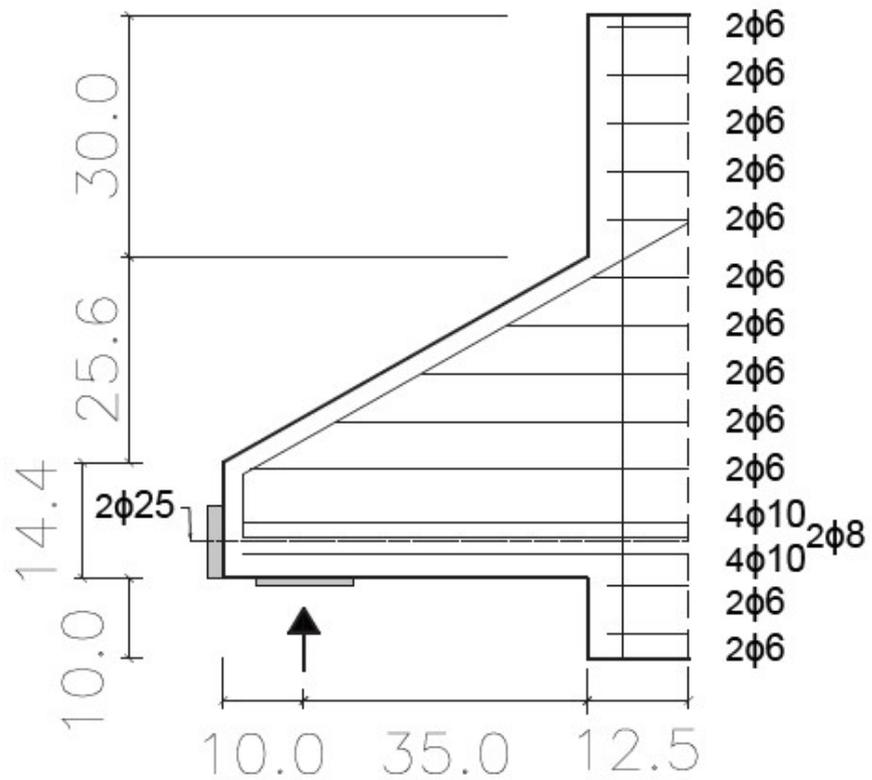
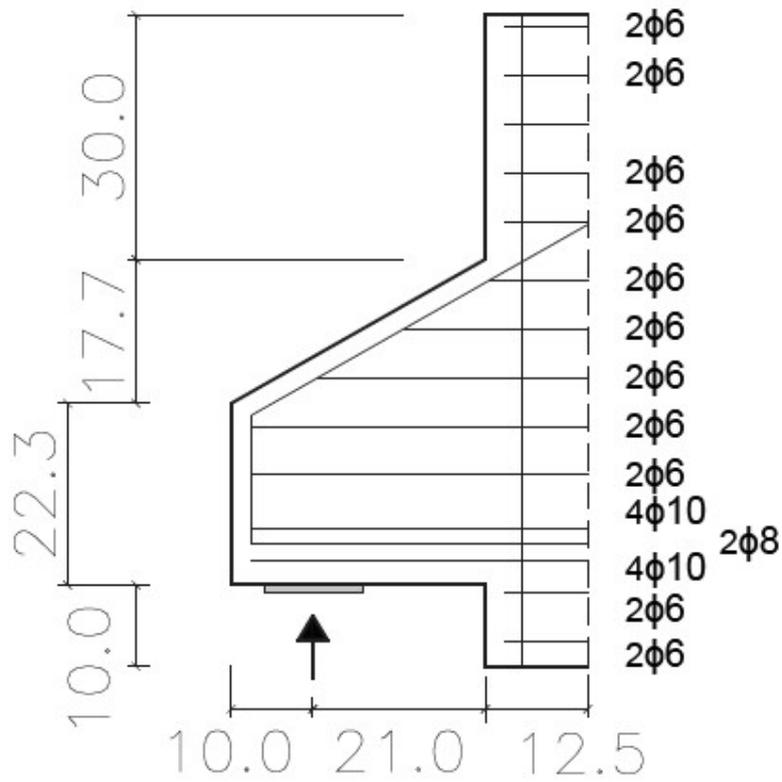
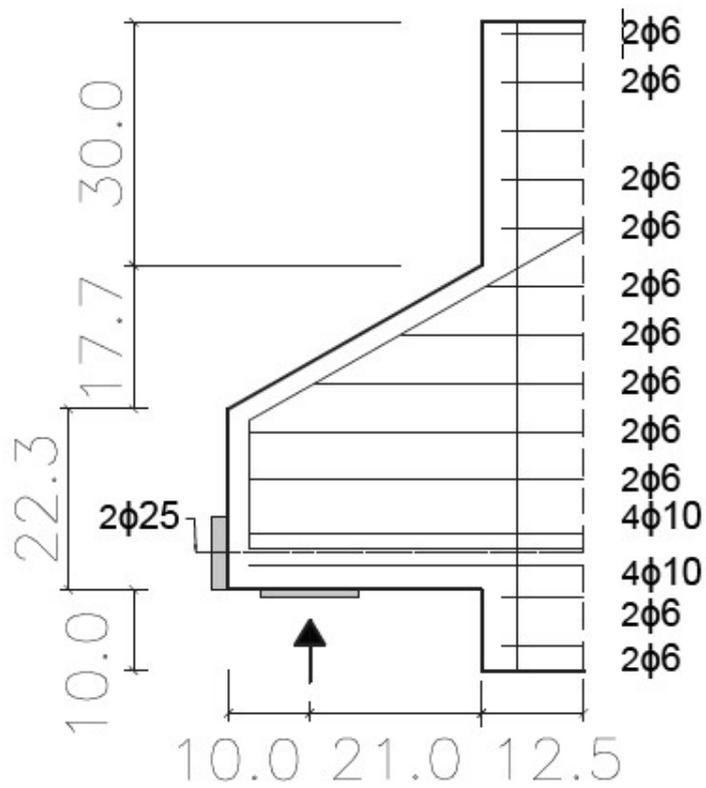


Figura 57 – Detalhes do consolo WI-2

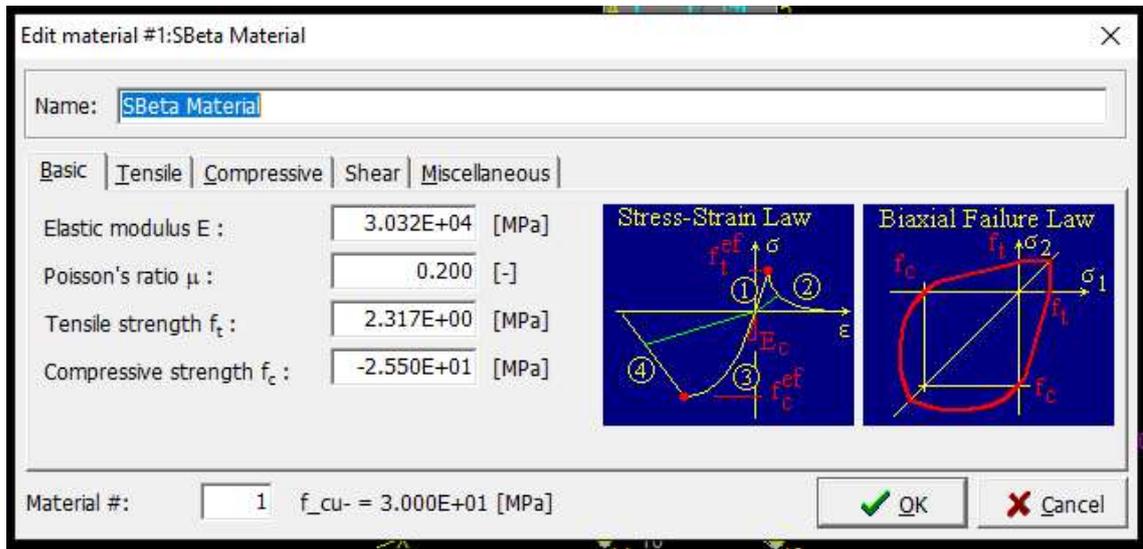


**Figura 58 – Detalhes do consolo WII-4**



**Figura 59 – Detalhes do consolo WII-2**

O material utilizado na análise, relativo ao concreto, foi gerado a partir do modelo constitutivo SBETA, onde os parâmetros de resistência do material foram gerados automaticamente pelo ATENA a partir da inserção da resistência característica a compressão cúbica ( $f_{ck_{ube}} = 30MPa$ ).



**Figura 60 - Modelo Constitutivo SBETA**

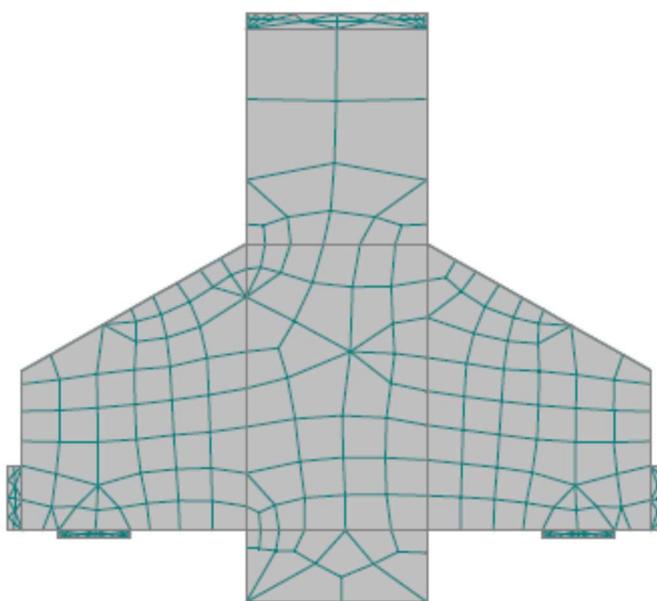
Para as barras de aço utilizadas nos consolos, foram criados diferentes materiais de acordo com o diâmetro e tensão de escoamento ( $f_{yk}$ ) de cada barra, conforme a Tabela 12, no entanto todos eles foram definidos a partir do material básico *reinforcement*. O modelo constitutivo utilizado para as barras de aço foi um modelo bilinear sem patamar escoamento, sendo que as barras utilizadas na região do tirante principal possuem efeito de encruamento após o início do escoamento.

Para as regiões de aplicações dos esforços concentrados (carregamento, apoio, placa de ancoragem da protensão) foi criado o material *placa de aço*, a partir do material básico *reinforcement*. Para este material foi utilizado um modelo constitutivo linear com módulo de elasticidade:  $E = 210 GPa$ .

**Tabela 12 – Tensões de escoamento conforme a diâmetro da armadura**

Material	Tensão de escoamento (MPa)	Encruamento
Reinf. 32 mm	390	Não
Reinf. 25 mm	396	Não
Reinf. 10 mm	493	Sim
Reinf. 8 mm	483	Não
Reinf. 6 mm	291,4	Não

Inicialmente ambos os consolos duplos foram simulados em sua forma completa (Figura 61), porém como a versão demo do ATENA possui uma limitação de 300 elementos finitos, os elementos finitos ficaram com dimensões da ordem 0,05 a 0,06 m, o que para alguns consolos acarretou uma perda de convergência prematura da análise, impedindo o prosseguimento do estudo. Desta forma, optou-se por simular ambos os consolos a meia-seção, o que tornou possível um tamanho médio de elementos finitos da ordem 0,03 m, o que impediu a perda de convergência prematura.

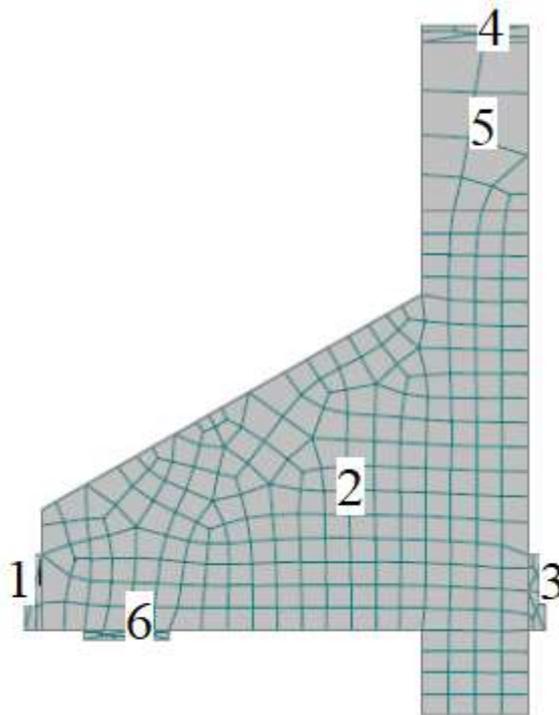


**Figura 61 – Configuração inicial (consolo duplo)**

Testes realizados em relação a carga aplicada a cada passo de carregamento, permitiram identificar que uma carga maior do que 25 kN e menor do que 2 kN, também levaram a uma perda de convergência prematura. Assim, optou-se por utilizar passos de carga de 5 kN.

## 9.1 CARACTERÍSTICAS DO CONSOLO WI-4 E WI-2

Para a formação dos consolos WI-4 e WI-2, os mesmos foram divididos em regiões chamadas de *macro-elementos* (Figura 62). Esses macro-elementos se fazem necessário para que possamos definir qual material será correspondente a cada região, estipulando assim, as leis de formação de cada macro-elemento.



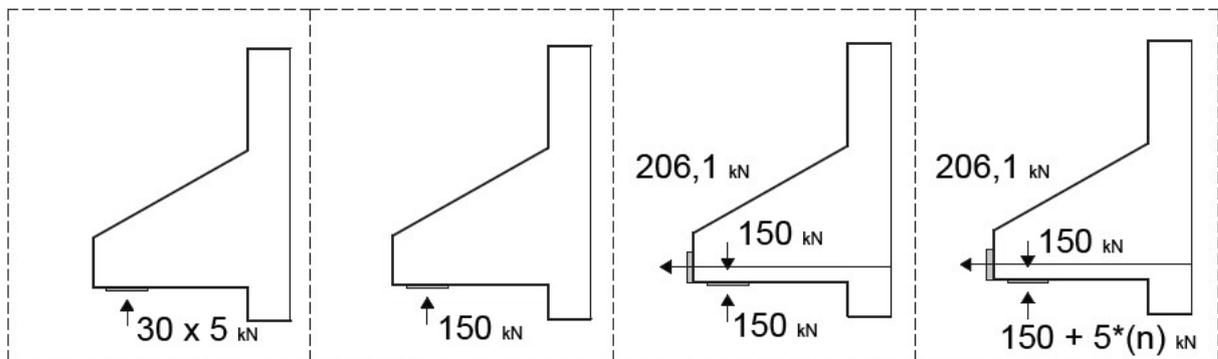
**Figura 62 – Distribuição dos macro-elementos WI**

Para a construção da malha de elementos finitos foi utilizado a ferramenta *run mesh generation*, a qual gera automaticamente a malha de elementos finitos a partir da definição prévia das características relativas a cada macro-elemento. No geral a malha ficou composta por 289 elementos finitos e 596 nós. A Tabela 13 apresenta o material, tamanho do elemento finito e tipo de elemento finito utilizado para cada macro-elemento.

**Tabela 13 – Características dos macro-elementos**

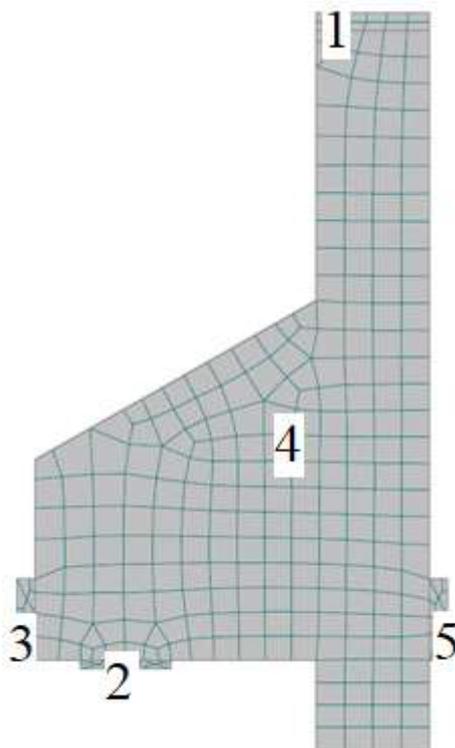
Macro-elemento	Material	Tamanho do elemento	Tipo do elemento
01	Placa de aço	0,05 m	Quadrilateral
02	SBETA	0,03 m	Quadrilateral
03	Placa de aço	0,05 m	Quadrilateral
04	Placa de aço	0,05 m	Quadrilateral
05	SBETA	0,05 m	Quadrilateral
06	Placa de aço	0,05 m	Quadrilateral

A dinâmica de carregamento dos consolos foi baseada no valor encontrado por NAGRODZKA-GODYCKA (1999) para formação das primeiras fissuras inclinadas (150 kN). O consolo WI-4 foi carregado com passos de carga de 5 kN até a sua ruptura. O consolo WI-2 foi carregado conforme a seguinte sequência: aplicação de 30 passos de carga de 5 kN; aplicação de uma carga de 150 kN no mesmo ponto e de sentido contrário ao de carregamento; aplicação de uma de uma força de protensão no valor de 206,1 kN as barras de 25 mm; aplicação de passos de carga até a ruptura. Esta dinâmica é demonstrada na Figura 63.

**Figura 63 – Dinâmica de carregamento (Consolo WI-2)**

## 9.2 CARACTERÍSTICAS DO CONSOLO WII-4 E WII-2

Para a formação dos consolos WII-4 e WII-2, os mesmos foram divididos nos seguintes macro-elementos (Figura 64).



**Figura 64 – Distribuição dos macro-elementos WII-2**

No geral a malha ficou composta por 284 elementos finitos e 564 nós. A Tabela 14 apresenta o material, tamanho do elemento finito e tipo de elemento finito utilizado para cada macro-elemento.

**Tabela 14 – Características dos macro-elementos**

Macro-elemento	Material	Tamanho do elemento	Tipo do elemento
01	Placa de aço	0,05 m	Quadrilateral
02	Placa de aço	0,05 m	Quadrilateral
03	Placa de aço	0,05 m	Quadrilateral
04	SBETA	0,03 m	Quadrilateral
05	Placa de aço	0,05 m	Quadrilateral

A dinâmica de carregamento do consolo foi baseada no valor encontrado por NAGRODZKA-GODYCKA (1999) para a formação das primeiras fissuras inclinadas (275 kN). O consolo WII-4 foi carregado com passos de carga de 5 kN até a sua ruptura. O consolo WII-2 foi carregado conforme a seguinte sequência: aplicação de 55 passos de carga de 5 kN; aplicação de uma carga de 275 kN no mesmo ponto e de sentido contrário ao de carregamento; aplicação de uma força de protensão no valor de 206,1 kN as barras de 25 mm; aplicação de passos de carga até a ruptura. Esta dinâmica é demonstrada na Figura 65.

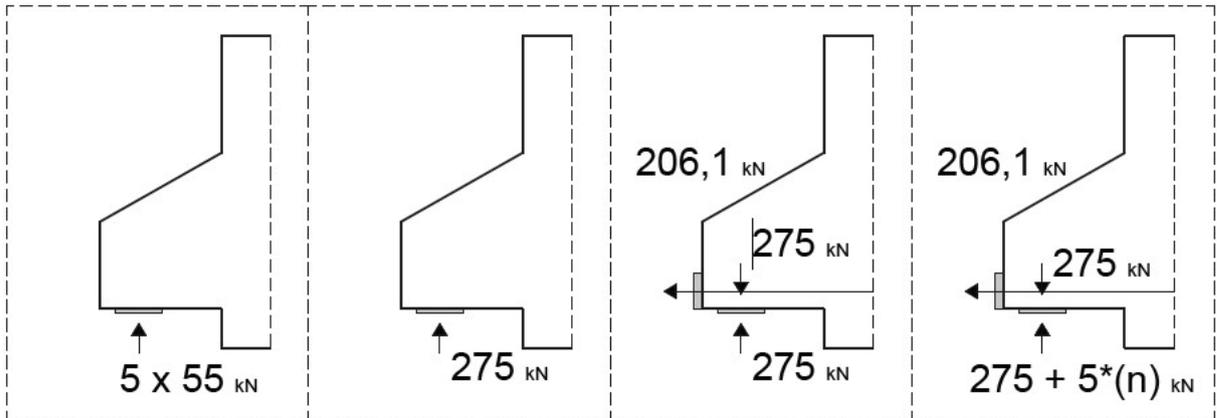


Figura 65 - Dinâmica de carregamento (Consolo WII-2)

### 9.3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como resultado da análise não-linear, o ATENA, apresenta dados em cada passo de carga dos consolos ensaiados, onde em cada passo, é possível observar as tensões atuantes, fissuras, deslocamentos, deformação das barras entre outras informações pertinentes. Como não é viável demonstrar todas essas informações, a seguir, serão demonstrados os resultados dos pontos mais relevantes e passíveis de comparação com os resultados de Nagrodzka-Godycka (1999).

A Figura 66 apresenta os mapas de tensões para o consolo WI-4 (Passo 30) e consolo WII-4 (Passo 55). As cargas aplicadas nestes momentos correspondem as cargas encontradas por Nagrodzka-Godycka (1999) em que as primeiras fissuras inclinadas se desenvolveram. Comparando ambos os mapas de tensões, observa-se que o ângulo formado entre a escora e a vertical é menor para o consolo WII-4, e que as tensões necessárias para formação das primeiras fissuras são maiores no consolo WII-4. Enquanto as tensões máximas na escora WI-4 são da ordem de 17,5 – 20 MPa, as tensões na escora WII-4 são da ordem de 20 – 22,5 MPa.

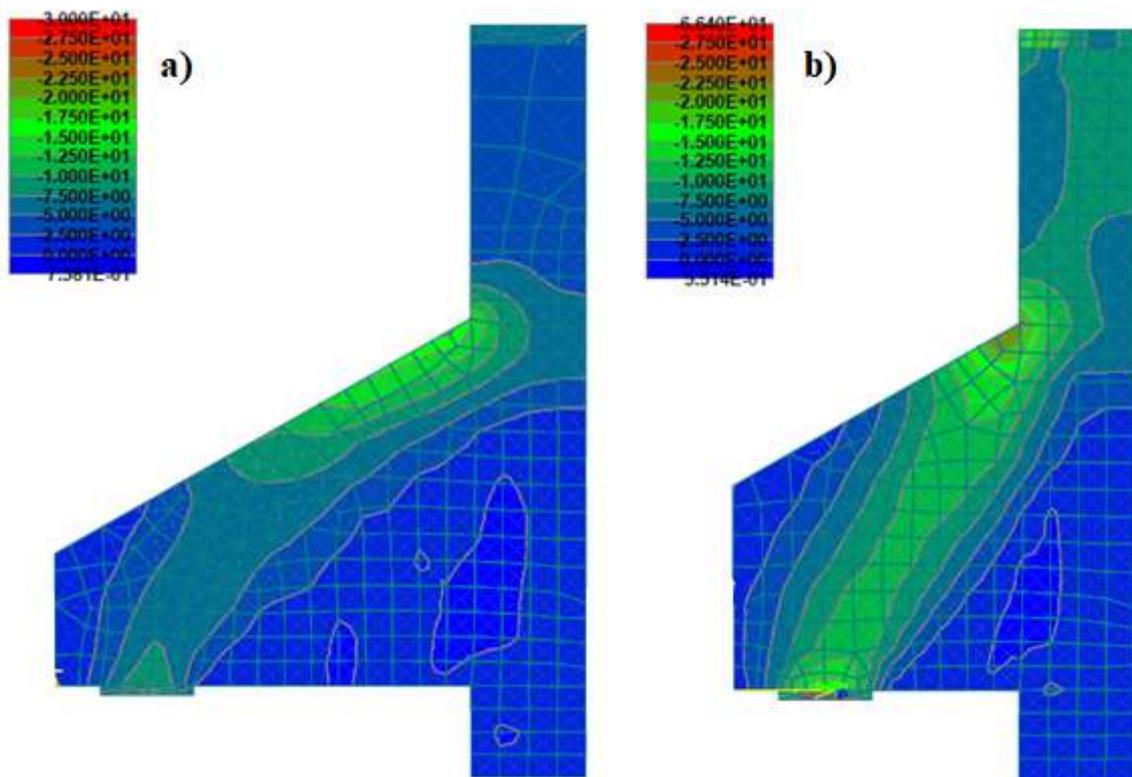
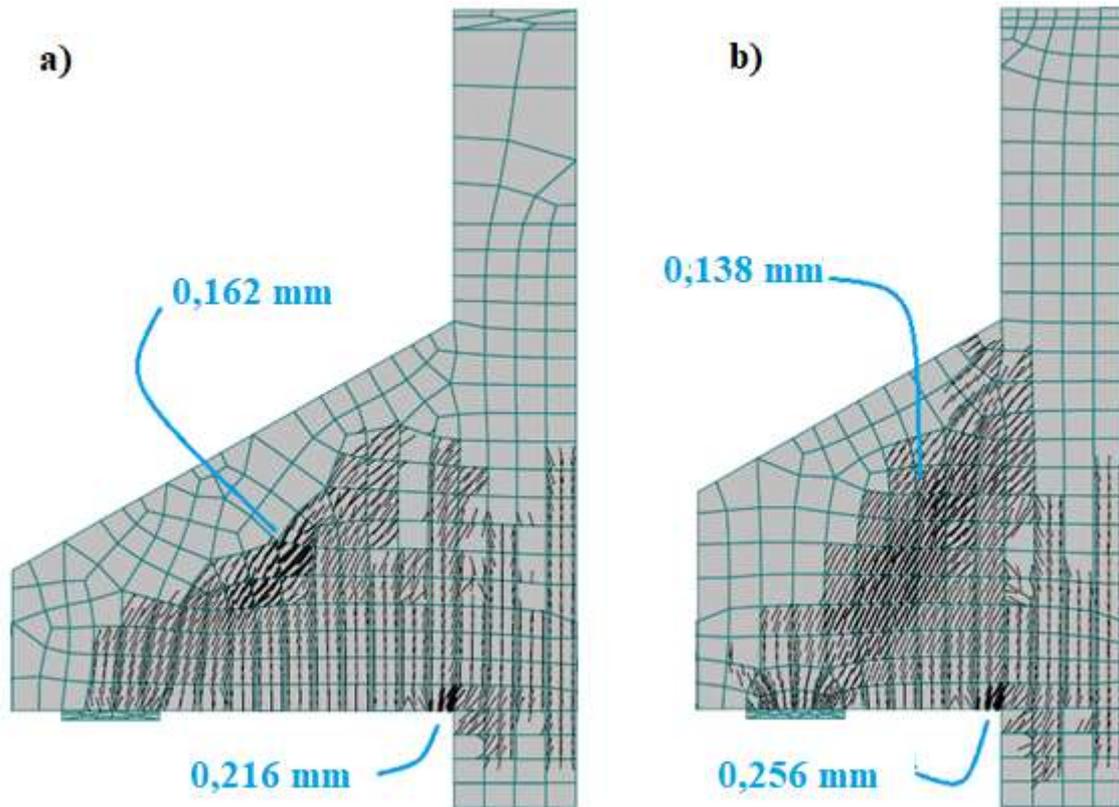


Figura 66 – Tensões nos consolos: a) WI-4 (passo 30), b) WII-4(passo 55)

A fissuração de ambos os consolos no momento que antecedeu a aplicação de protensão é apresentada na Figura 67. Em ambos, as fissuras se desenvolveram principalmente na região delimitada pela escora comprimida e a face do pilar, sendo, que as maiores aberturas ocorrem nas superfícies dos consolos, no ponto de encontro do consolo com a face do pilar.



**Figura 67 – Fissuras nos consolos: a) WI-4 (Passo 30), b) WII-4 (Passo 55)**

O descarregamento do consolo e aplicação da protensão externa, induziu uma mudança abrupta de estado de tensão, enquanto para a situação sem barras externas, os consolos apresentaram tensões de compressão na região da escora comprimida e tração na linha do tirante (Figura 66), na presença das barras externas protendidas, as tensões de compressão ocorreram junto a borda superior do consolo (Figura 68).

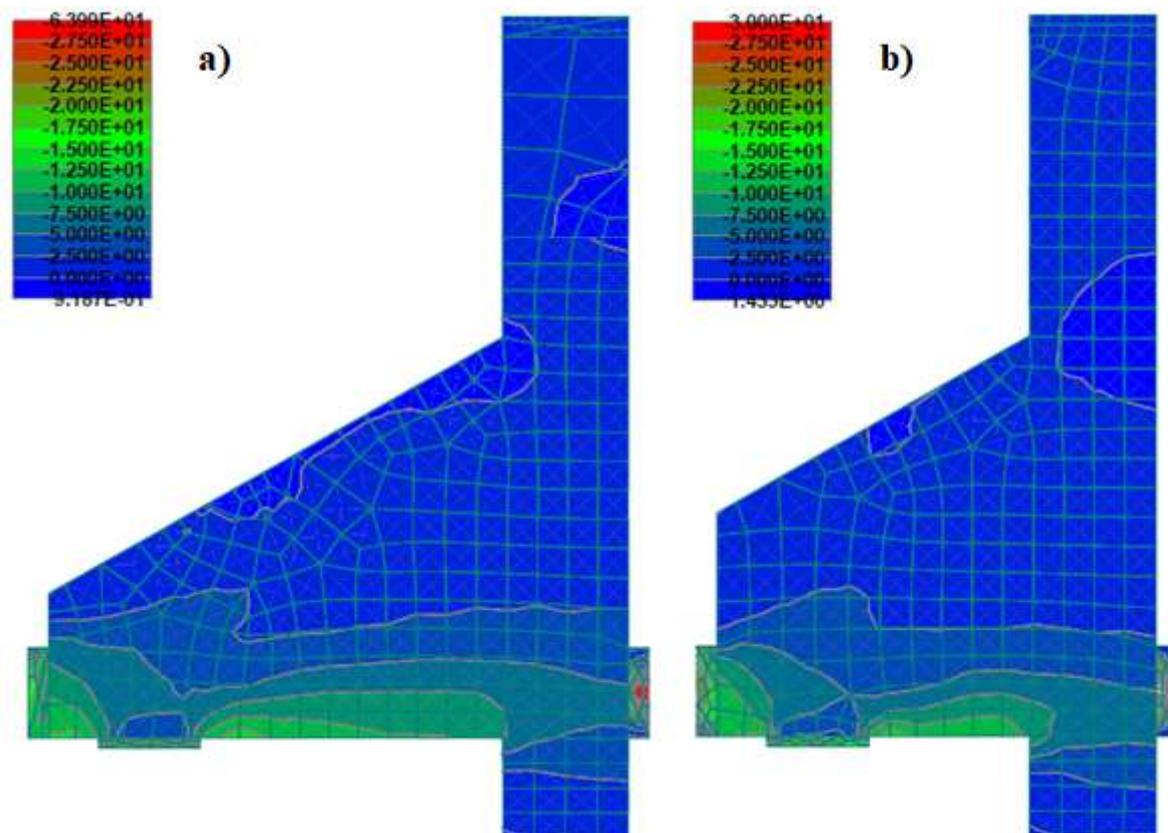


Figura 68 – Tensões nos consolos: a) WI-2 (passo 31), WII-2 (passo 56).

### 9.3.1 CONSOLO WI

A análise não-linear do consolo WI-4, conduziu a um carregamento máximo de 245 kN. O caminhamento das tensões de compressão com o aumento do carregamento é apresentado na Figura 69, onde é possível observar, que a cada incremento de carga as tensões de compressão se ampliaram e concentraram na região da escora comprimida. A partir da aplicação de 185 kN a tensão atuante em alguns pontos ultrapassou o valor de 25,5 MPa, valor este que é assumido pelo ATENA como resistência a compressão para o concreto sob estado uniaxial de tensão, a partir daí, a cada passo de carga estes pontos aumentaram, acompanhados por um aumento expressivo da deformação, até que no passo 49 (245 kN) a armadura do tirante principal entrou em escoamento.

Para a mesma configuração do consolo WI-4, NAGRODZKA-GODYCKA (1999) obteve uma carga última de 250 kN.

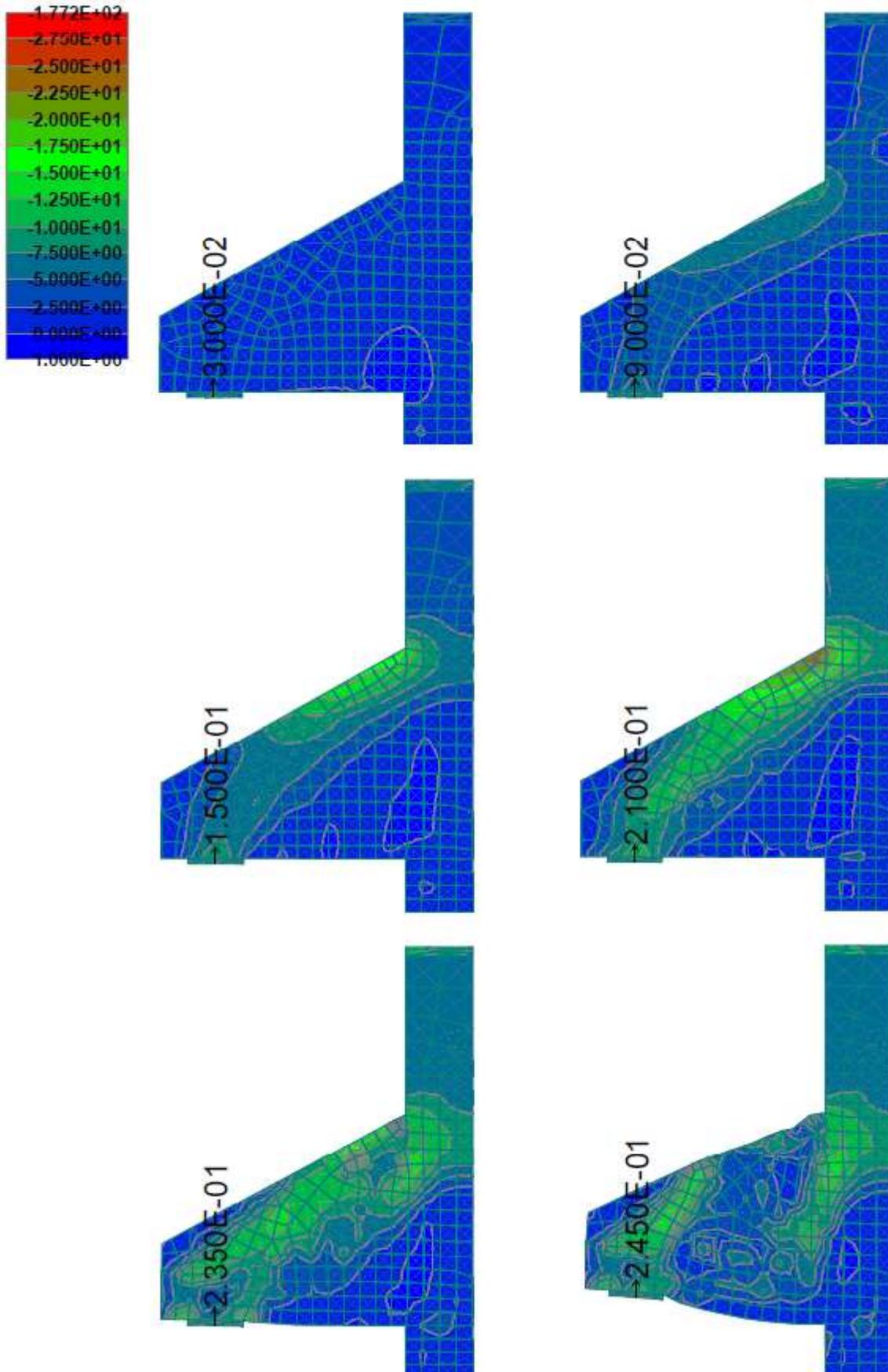


Figura 69 – Progressão das tensões no consolo WI-4

A fissuração do consolo WI-4 é demonstrada na Figura 70 para um carregamento de 150 kN. As principais fissuras se concentraram na região da escora comprimida e no encontro superior do consolo com o pilar, suas aberturas foram menores do que 0,2 mm. Apesar da Figura 70 (a) apresentar o consolo bastante fissurado, grande parte destas fissuras são muito pequenas, assim a Figura 71 apresenta apenas as fissuras maiores do que 0,05 mm.

Comparando os resultados de ambos os trabalhos, pode-se dizer que o ATENA determinou com boa precisão a localização e abertura das fissuras do consolo WI-4 para este nível de carregamento.

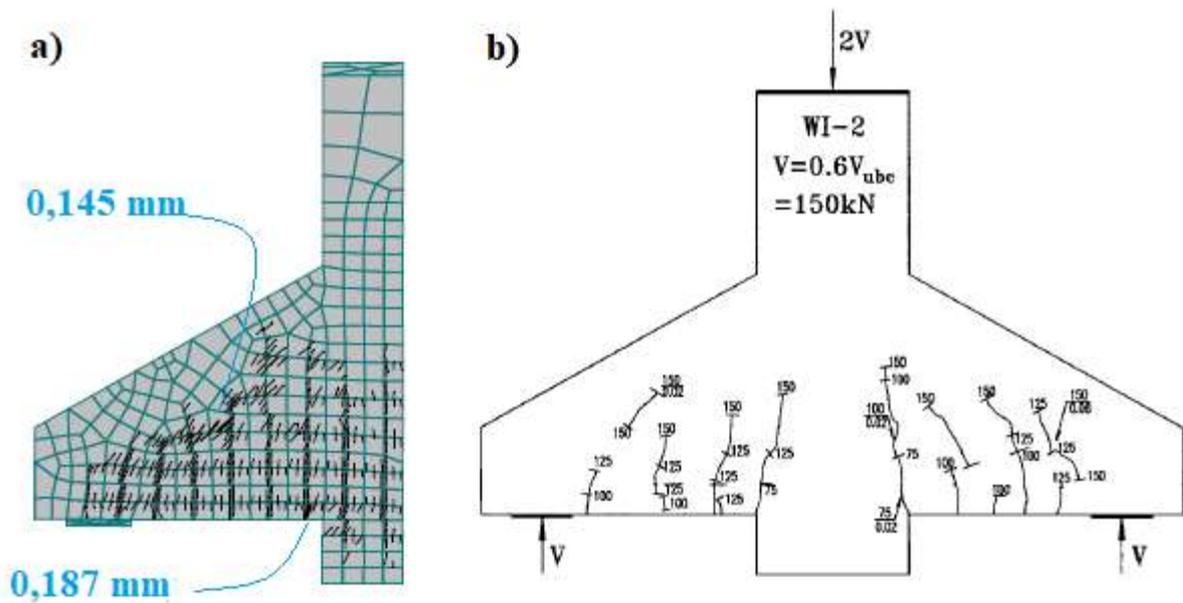
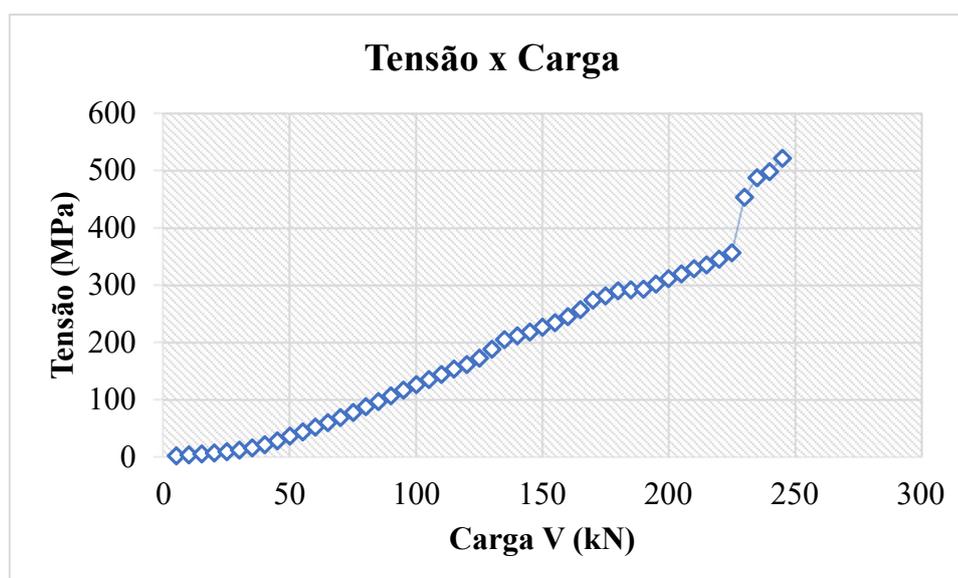


Figura 70 – Fissuração do consolo WI-4 (150 kN)



**Figura 71 – Fissuras maiores do 0,05 mm no consolo WI-4**

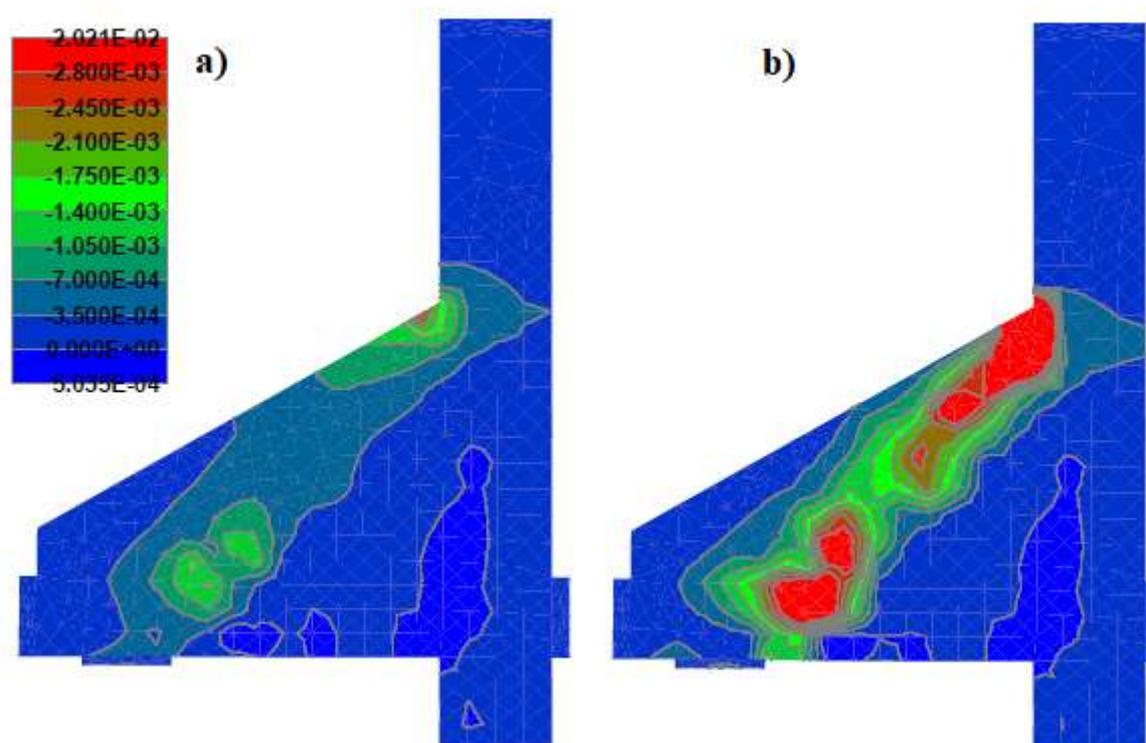
O desenvolvimento das tensões de tração na armadura do tirante em relação a carga  $V$  aplicada no consolo (Figura 72), desenvolveu-se de maneira quase linear até o passo de carga 45 (225 kN).



**Figura 72 – Gráfico das tensões no tirante por carga aplicada: consolo WI-4**

A partir do passo 45 os incrementos de tensão na armadura do tirante, a cada passo de carga aplicado, deram um salto em seu valor, fazendo com que a tensão na armadura logo

alcança-se o seu valor de escoamento. Esse fato está associado a um aumento expressivo das deformações no concreto (Figura 73), o que pode justificar o salto nas tensões entre o passo 45 e 46.



**Figura 73 – Deformações principais no consolo WI-4: a) Passo 45, b) Passo 46**

Analisando os resultados obtidos, pode-se dizer que o consolo WI-4 chegou a ruína devido a falência da escora de compressão. Observando os resultados apresentados, fica caracterizado que o concreto atingiu tensões de compressão que ultrapassaram sua capacidade de resistência, apresentando assim grandes deformações, o que paralelamente acarretou o escoamento das armaduras.

### 9.3.2 CONSOLO WI-2

A partir do descarregamento do consolo WI-4 e aplicação de protensão, as tensões desenvolvidas no agora chamado consolo WI-2 sofreram algumas alterações. Para pequenas ou nenhuma carga aplicada, as principais tensões de compressão ficaram concentradas na região da linha do tirante, e conforme a carga aumentava essas tensões de compressão começaram a se conduzir para a escora inclinada (Figura 74).

Analisando os mapas apresentados, pode-se dizer, que após um carregamento de 125 kN, as maiores tensões de compressão começaram a ocorrer na escora inclinada e não na linha do tirante (abaixo da placa de ancoragem da barra de protensão). Observando os mapas subsequentes, nota-se que a partir deste carregamento o caminhamento das tensões de compressão se equipara ao caminhamento desenvolvido nos consolos normalmente armados, os quais podem ser satisfatoriamente representados por uma escora comprimida e um tirante tracionado.

O formato do mapa de tensões de compressão do consolo, seguiu razoavelmente uniforme até o passo 90 (295 kN), onde, a partir desta carga a escora comprimida perdeu a uniformidade, e regiões de alta concentração de tensões se espalharam por todo o consolo impedindo que uma largura uniforme seja definida para a escora de compressão (Figura 75). O ápice de tensão ocorreu próximo a interseção da face inferior externa do consolo com a face do pilar. A partir da carga de 275 kN as tensões de compressão atingiram níveis superiores a 25,5 MPa.

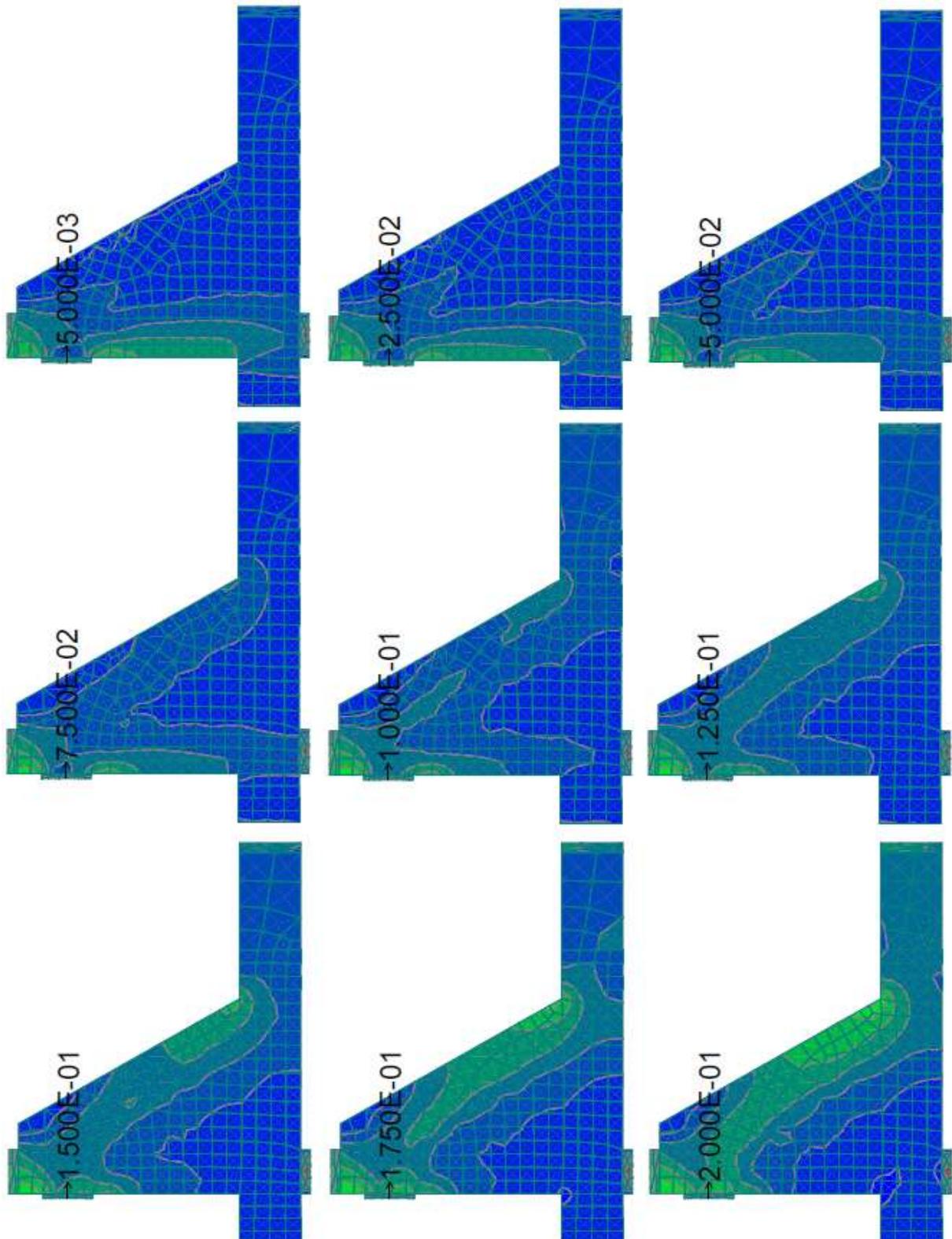
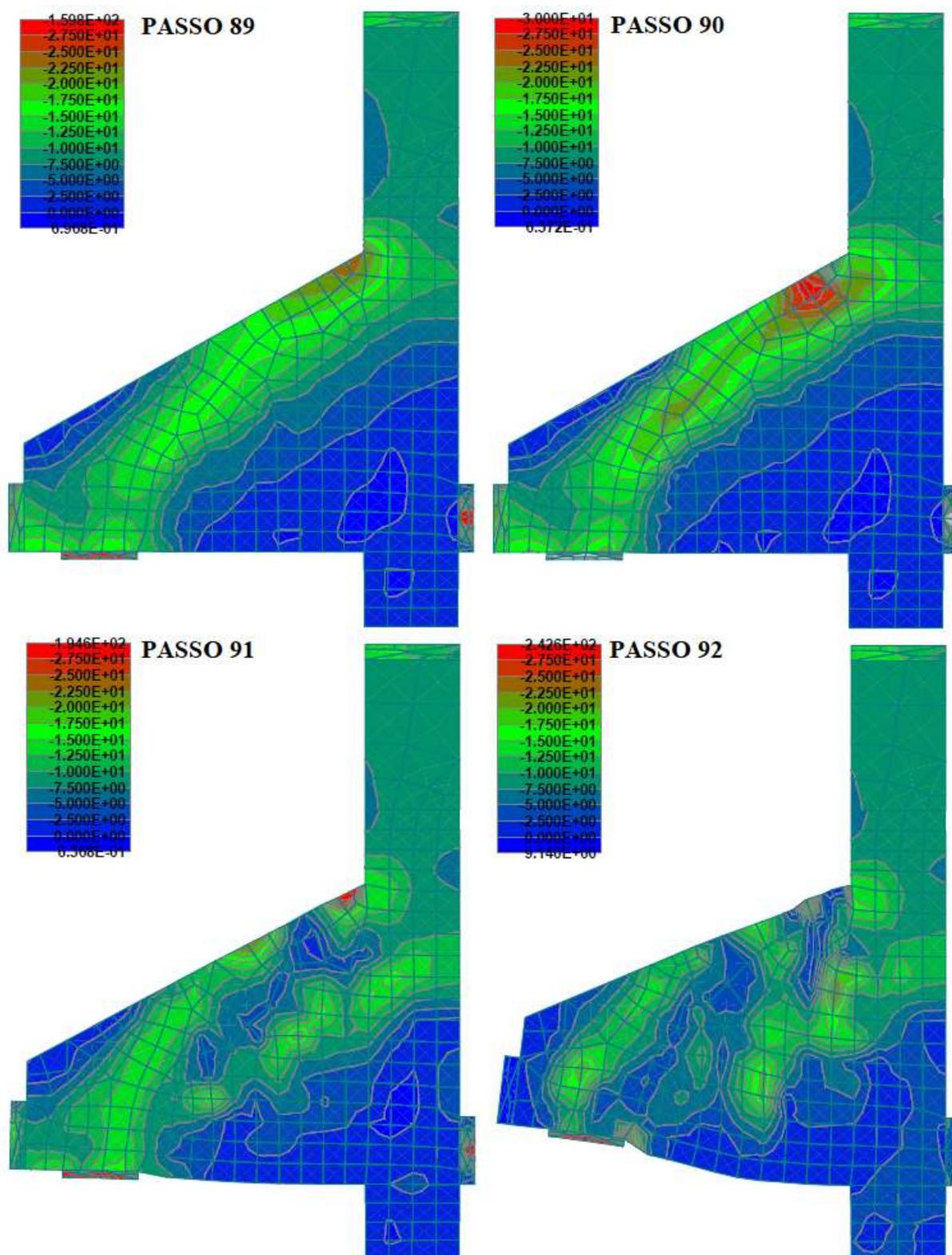


Figura 74 – Progressão das tensões no consolo WI-2

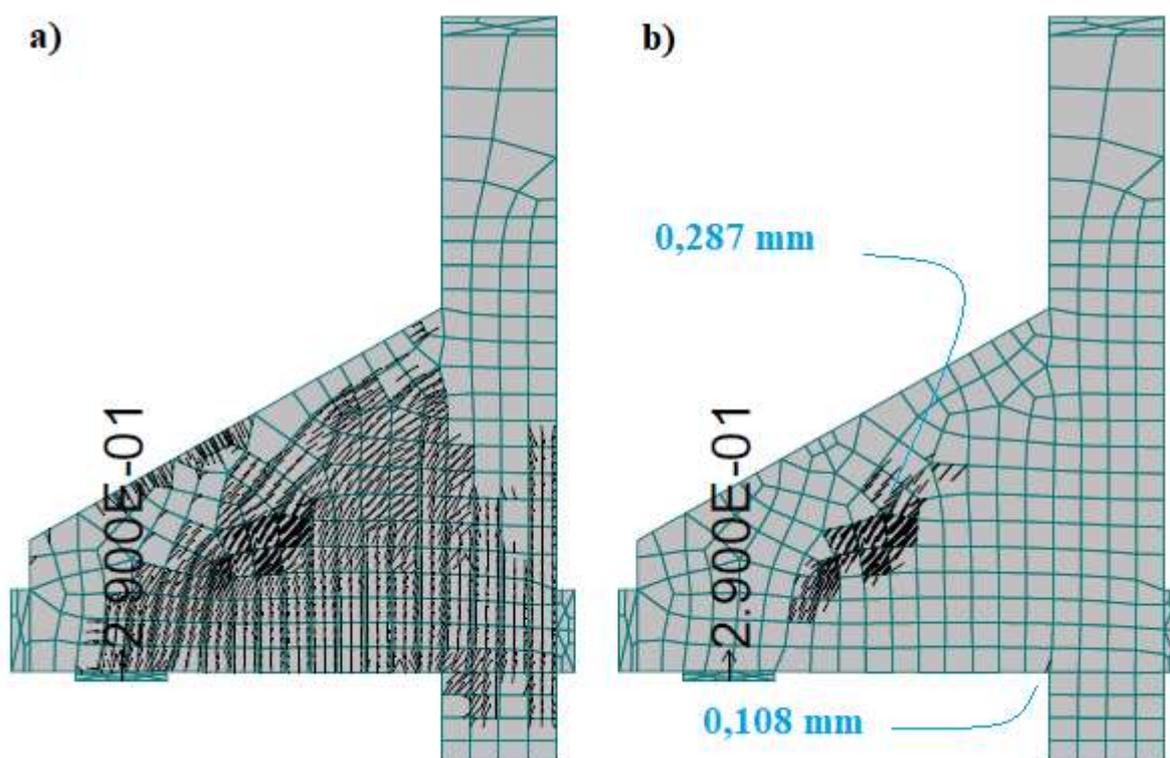


**Figura 75 – Tensões nos últimos passos de carga do consolo WI-2**

A capacidade de carga do consolo WI-2 foi 305 kN em contrapartida aos 350 kN encontrados por NAGRODZKA-GODYCKA (1999). Esses valores representam uma diferença 12,86 % ao encontrado experimentalmente.

No momento de carregamento máximo do consolo WI-2 as aberturas de fissuras chegaram a 0,013 m, porém cabe aqui ressaltar que o avanço das fissuras cresceu exponencialmente nos últimos 4 passos de carga, situação em que os primeiros pontos da escora comprimida ultrapassaram a tensão de 25,5 MPa.

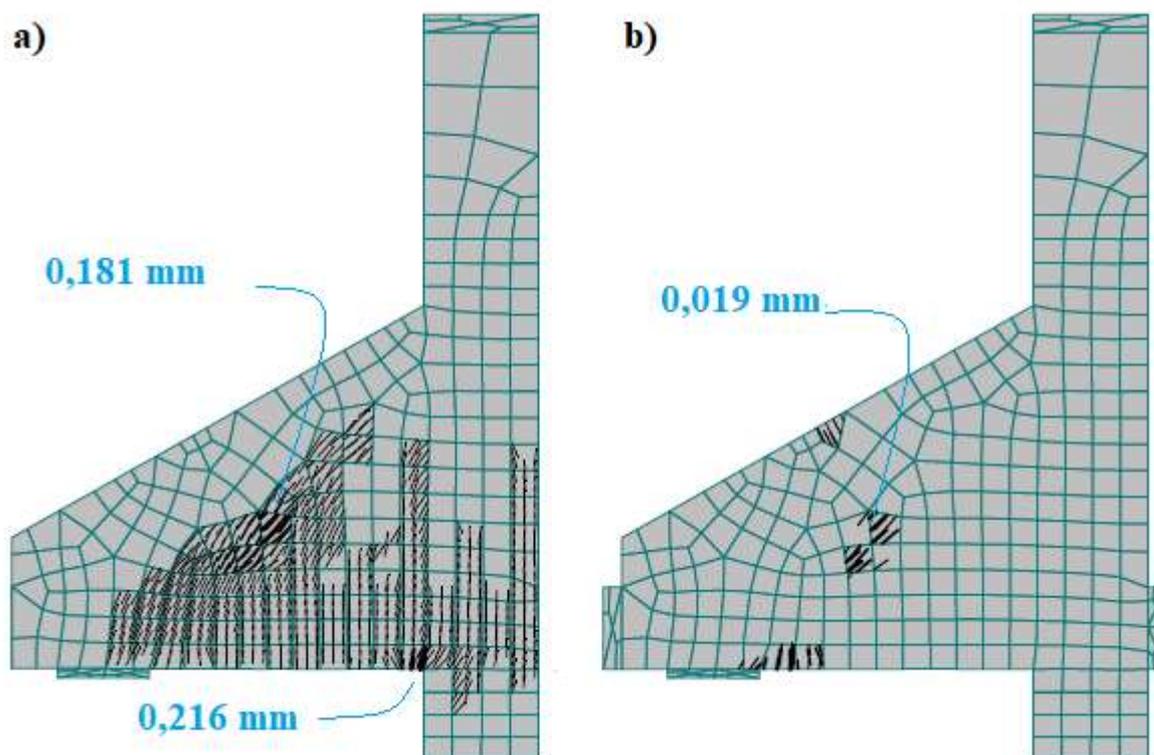
Na Figura 76 (a) é apresentado o mapa de fissuração do consolo WI-2 sob um carregamento de 290 kN. Na Figura 76 (b) estão visíveis apenas as fissuras com abertura maior do que 0,1 mm. Analisando estes mapas, observa-se que o consolo apresentou fissuras quase que em sua totalidade, porém as fissuras com abertura maior do que 0,1 mm se concentraram na direção da escora comprimida, ocorrendo apenas uma fissura na interseção do consolo com o pilar.



**Figura 76 - Fissuração do consolo WI-2 (290 kN): a) Fissuras totais, b) Fissuras maiores que 0,1 mm**

Um benefício ocasionado pela protensão externa pode ser observado na Figura 77. A Figura 77 (a) demonstra a fissuração do consolo no passo de carga 30 (150 kN), onde as maiores aberturas ficaram concentradas na escora inclinada e na interseção do consolo com o pilar, sendo estas da ordem de 0,2 mm. A Figura 77 (b) demonstra as fissuras para o consolo no passo de carga 61 (150 kN), situação análoga a anterior, porém com protensão externa, onde as

maiores fissuras ocorreram na escora inclinada não havendo fissuras significativas no encontro do consolo com o pilar.

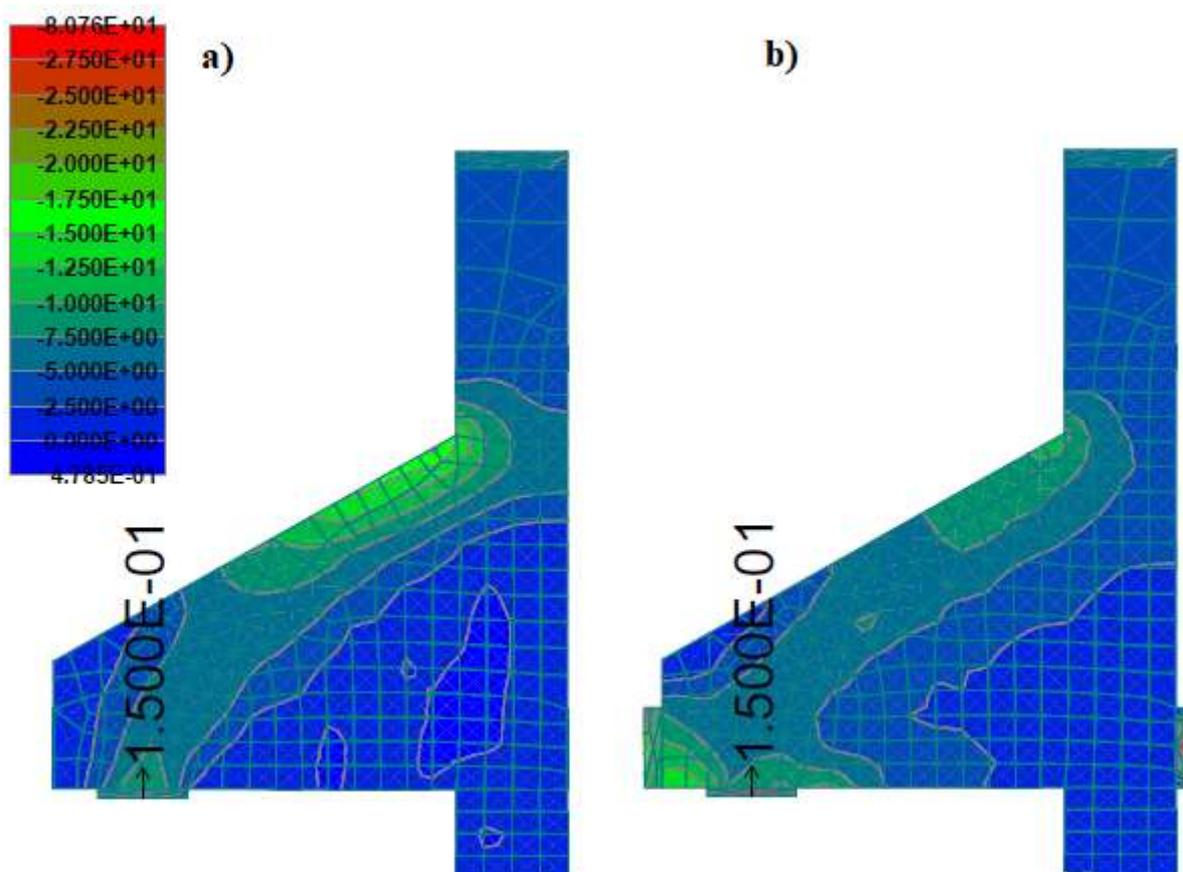


**Figura 77 - Fissuração do consolo (150 kN): (a) WI-4 (b) WI-2**  
 Nota: Unidade de comprimento em (m). Fissuras maiores do 0,01 mm.

Em relação a fissuração da peça, a aplicação da protensão externa ocasionou um fechamento das fissuras, principalmente naquelas localizadas na superfície do consolo. Cabe ressaltar, que a maior abertura de fissura na situação (a) da Figura 77, ocorreu justamente na superfície do consolo, local onde a protensão externa foi mais efetiva em relação a fissuração.

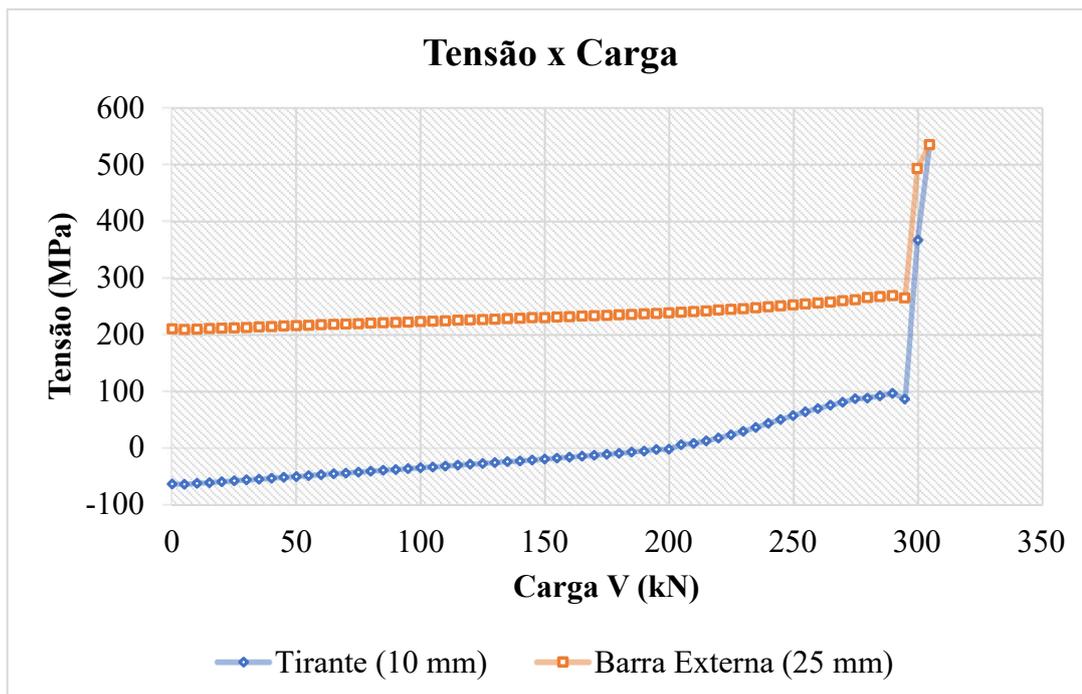
A comparação das tensões atuantes para as situações sem protensão externa e com protensão externa, sob um mesmo carregamento, demonstrou que as tensões atuantes na escora comprimida são menores na presença de protensão externa. Enquanto na presença de protensão a tensão máxima atuante na base da escora foi da ordem de 11,73 MPa, para a situação sem protensão a tensão máxima foi da ordem de 18,30 MPa (Figura 78).

Em relação a capacidade de carga a protensão acarretou um aumento de 60 kN, elevando a carga máxima para 305 kN em relação aos 245 kN do consolo WI-4, o que representa um aumento de 24,89% na capacidade de carga.



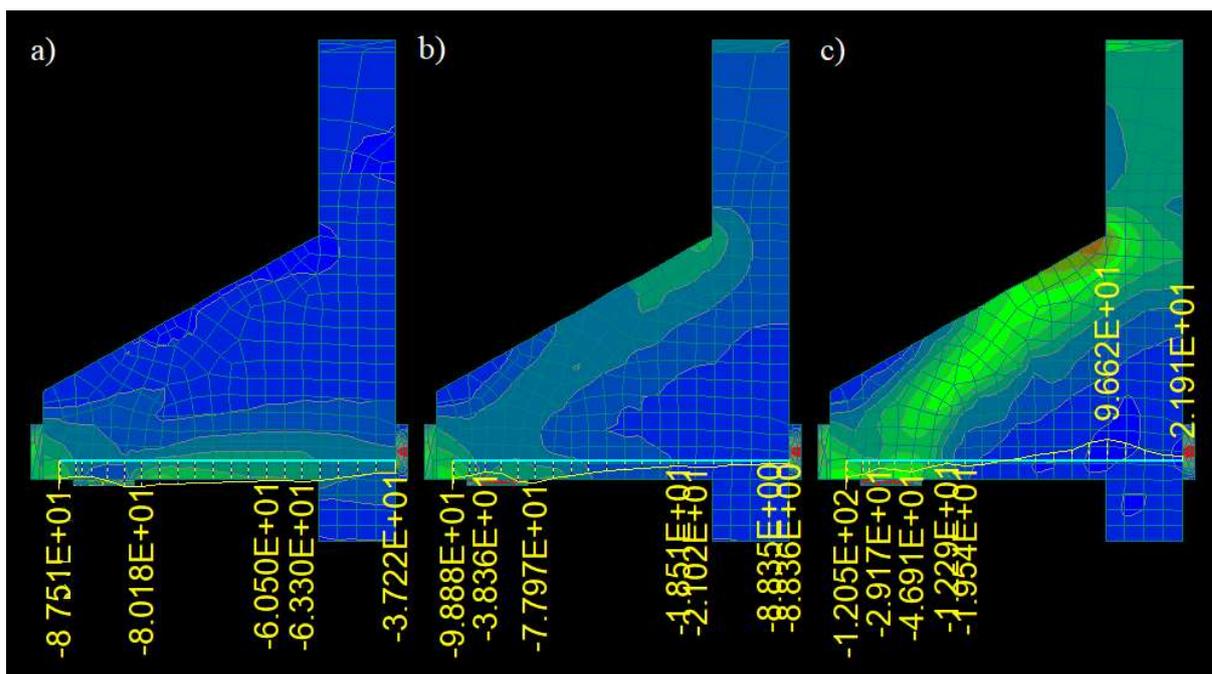
**Figura 78 – Comparativo das tensões principais de compressão para o mesmo carregamento: a) consolo WI-4, b) consolo WI-2**

Na Figura 79 é possível observar o desenvolvimento das tensões na armadura do tirante e nas barras de protensão externas, aferidas no ponto de encontro do consolo com o pilar. O gráfico contempla apenas as tensões desenvolvidas nas barras após o descarregamento e tensionamento das barras externas, uma vez que as tensões desenvolvidas no tirante anteriormente a isto, são iguais ao gráfico da Figura 72.



**Figura 79 – Gráfico das tensões no tirante e barras externas por carga aplicada: consolo WI-2**

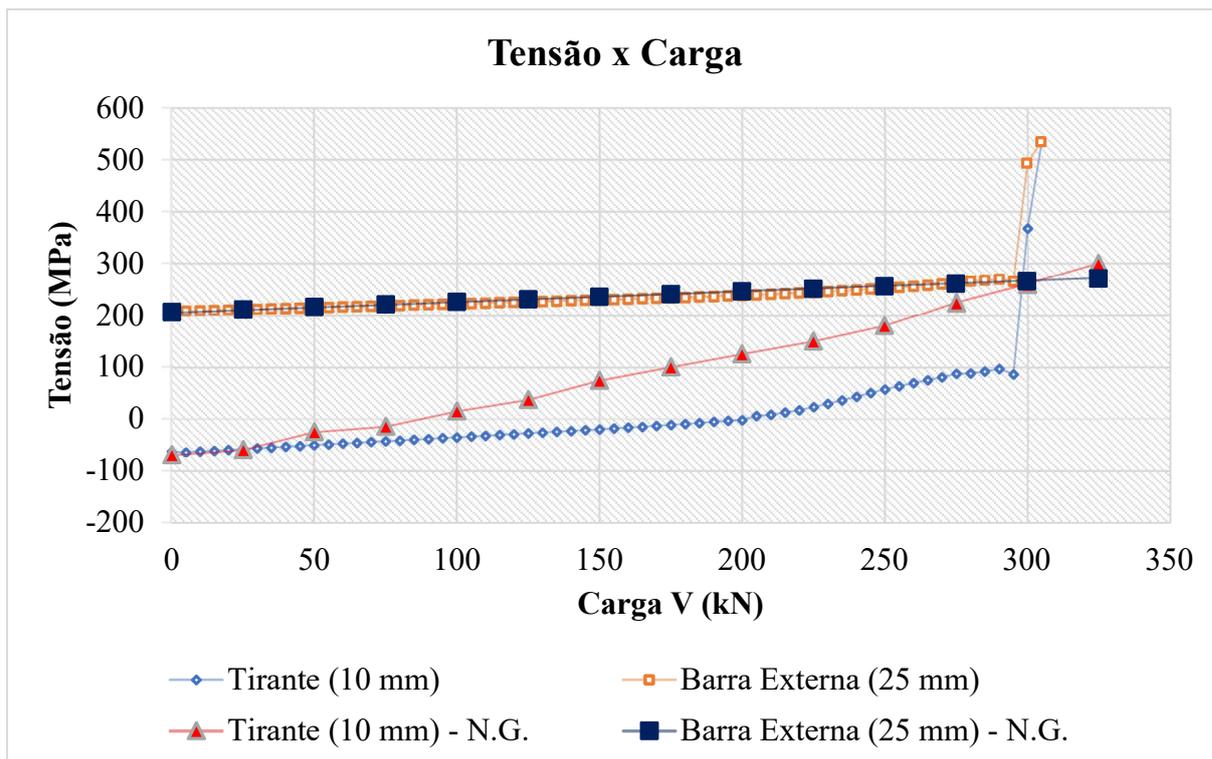
Diferentemente do consolo WI-4, a armadura do tirante do consolo WI-2, está submetida inicialmente a tensões de compressão, fato que decorre da compressão gerada pela placa de ancoragem do tirante, porém conforme a carga  $V$  aumenta e o modelo de treliça começa a ser solicitado, as tensões de compressão na barra do tirante convergem aos poucos para tensões de tração conforme o concreto em seu entorno deixa de ser solicitado. A Figura 80 apresenta as tensões na armadura do tirante em passos distintos de carregamento.



**Figura 80 – Tensões na armadura do tirante para o consolo WI-2: a) Passo 31, b) Passo 60, c) Passo 89**

As tensões na barra interna e externa aumentaram de forma quase linear, de acordo com a carga  $V$ , até o passo de carga 90 (295 kN), onde a partir deste, as tensões saltaram verticalmente ultrapassando a tensão de escoamento.

Comparando as tensões encontradas com as tensões aferidas experimentalmente por NAGRODZKA-GODYCKA (1999), percebe-se que as tensões desenvolvidas nas barras externas foram praticamente iguais, o que já não acontece com as barras do tirante, enquanto o ATENA aferiu tensões menores do que 100 MPa, experimentalmente essas tensões ultrapassaram os 270 MPa para uma mesma carga  $V$ .



**Figura 81 – Comparativo das tensões desenvolvidas no tirante e barras externas do consolo WI-2, aferidas em análise não linear e estudo experimental**

Fonte: Adaptado de NAGRODZKA-GODYCKA (1999).

Nota: N.G. – Sigla para NAGRODZKA-GODYCKA (1999)

A partir do passo 90 os incrementos de tensão nas armaduras do tirante e nas barras externas, a cada passo de carga aplicado, deram um salto em seu valor, fazendo com que suas tensões logo alcançassem o valor de escoamento (Figura 81). Esse fato está associado a um aumento expressivo das deformações no concreto.

Analisando os resultados obtidos, pode-se dizer que o consolo WI-2 chegou a ruína devido a falência da escora de compressão. Observando os resultados apresentados, fica caracterizado que o concreto atingiu tensões de compressão que ultrapassaram sua capacidade de resistência, apresentando assim grandes deformações, o que paralelamente acarretou o escoamento das armaduras.

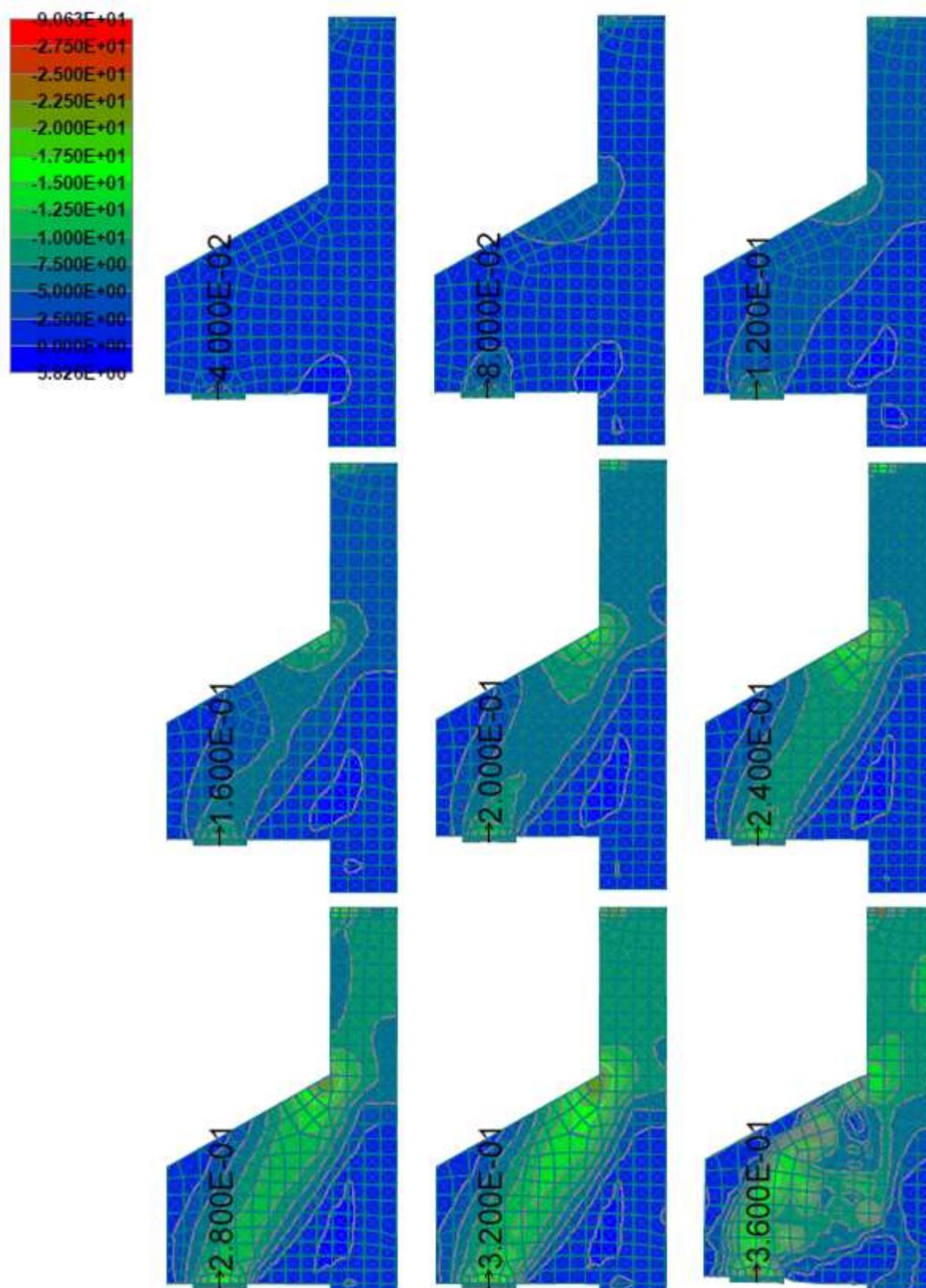
### 9.3.3 CONSOLO WII

A análise não-linear do consolo WII-4 permitiu conhecer o caminho percorrido pelas tensões no elemento, desde o ponto de aplicação da carga ao apoio. Este caminhamento pode

ser observado na Figura 82, onde é visível que a cada incremento de carga as tensões se ampliaram e se concentraram em uma dada direção, formando a escora de compressão.

Este fenômeno também foi observado no consolo WI-4 ( $a/d = 1,0$ ), o que corrobora com o texto da NBR 6118:2014, o qual diz: que os consolos curtos possuem um comportamento típico que pode ser descrito por um modelo de escoras e tirantes.

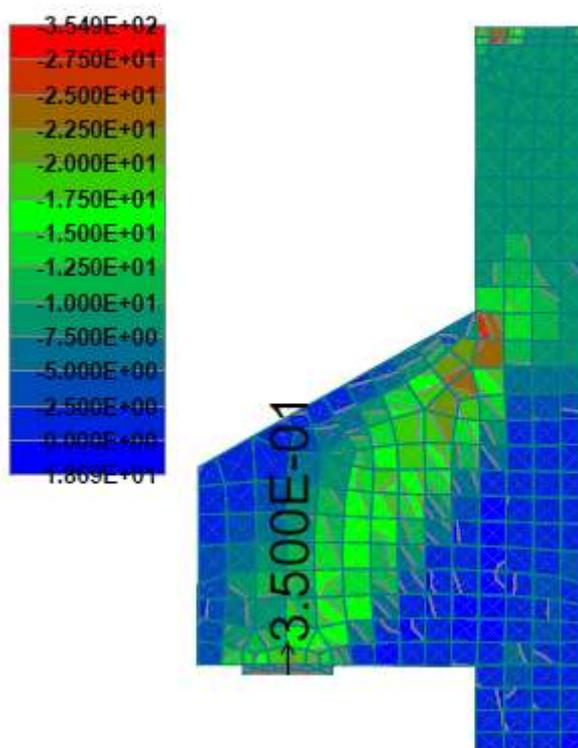
Os mapas de tensão da Figura 82 representam o desenvolvimento das tensões no consolo de acordo com o carregamento aplicado. Nestes, é possível observar, que com o aumento do carregamento (aproximação da ruína), as regiões de concentração de tensão se espalham, não sendo mais possível determinar uma largura uniforme de resistência para a escora inclinada.



**Figura 82 – Progressão das tensões no consolo WII**

Os mapas da Figura 82, foram gerados a partir de uma leitura que considera o resultado oferecido pelo Software, como uma média ponderada do valor da tensão efetiva em cada

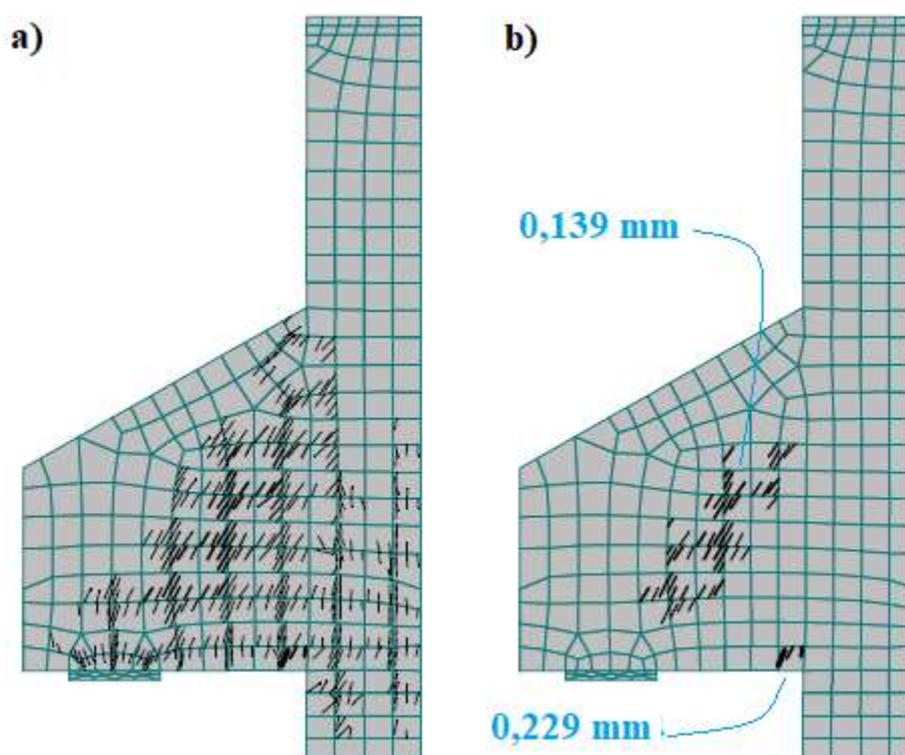
elemento finito que formam um nó, resultando em um valor médio de tensão em cada nó da malha de elementos finitos, esse modo é chamado de *Result Data Evaluated in Nodes*, o que causa uma certa dúvida quanto a falência da escora de compressão, pois, como pode se ver na Figura 82 mesmo para o último passo de carga, as tensões principais de compressão não ultrapassaram a escala de 22,5 MPa. Por isto, foi realizado uma leitura dos resultados a partir do modo *Result Data Evaluated in Element Nodes*, o qual fornece os dados pontuais de cada elemento finito (Figura 83), demonstrando assim, os valores de pico.



**Figura 83 – Tensões no passo 70 (Consolo WII)**

O consolo WII-4 resistiu a um carregamento máximo de 360 kN (72 passos de carga). A armadura do tirante principal não entrou em escoamento, mas chegou a uma tensão máxima de 475,5 MPa no passo 71.

A fissuração do consolo WI-2 é demonstrada na Figura 84 para um carregamento de 275 kN, onde é possível observar que as principais fissuras se concentraram na região da escora comprimida e no encontro superior do consolo com o pilar, sendo suas aberturas menores do que 0,25 mm.

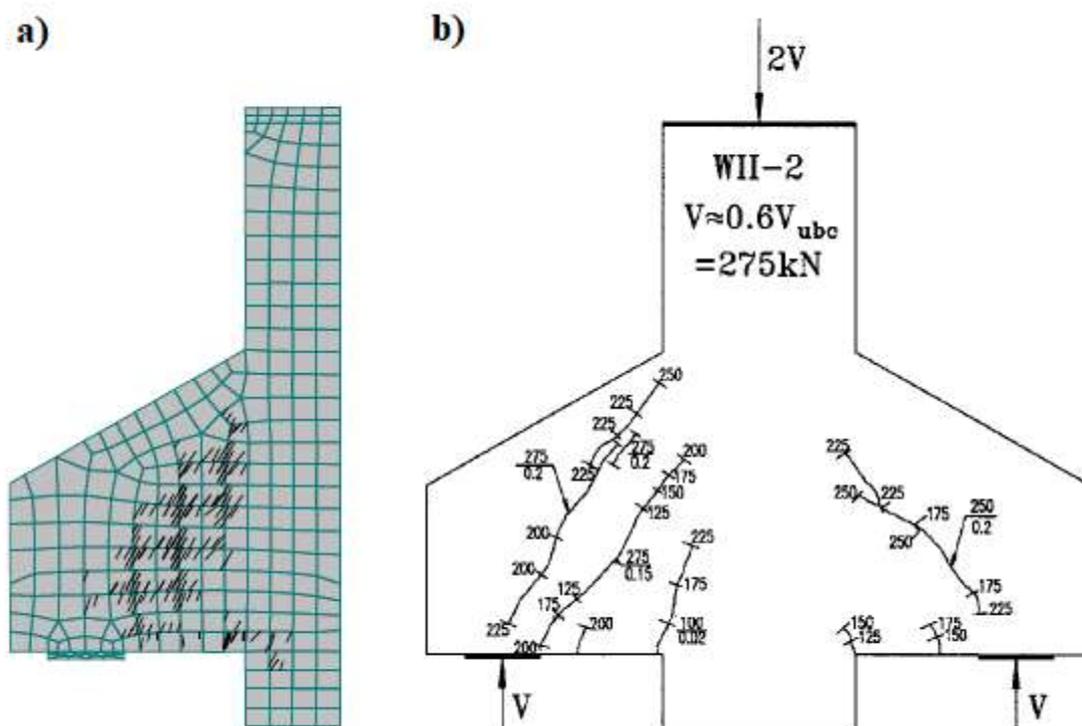


**Figura 84 - Fissuração do consolo WII-4(275 kN)**

Nota: (a) Fissuras sem limite de abertura (b) Fissuras maiores do 0,01 mm.

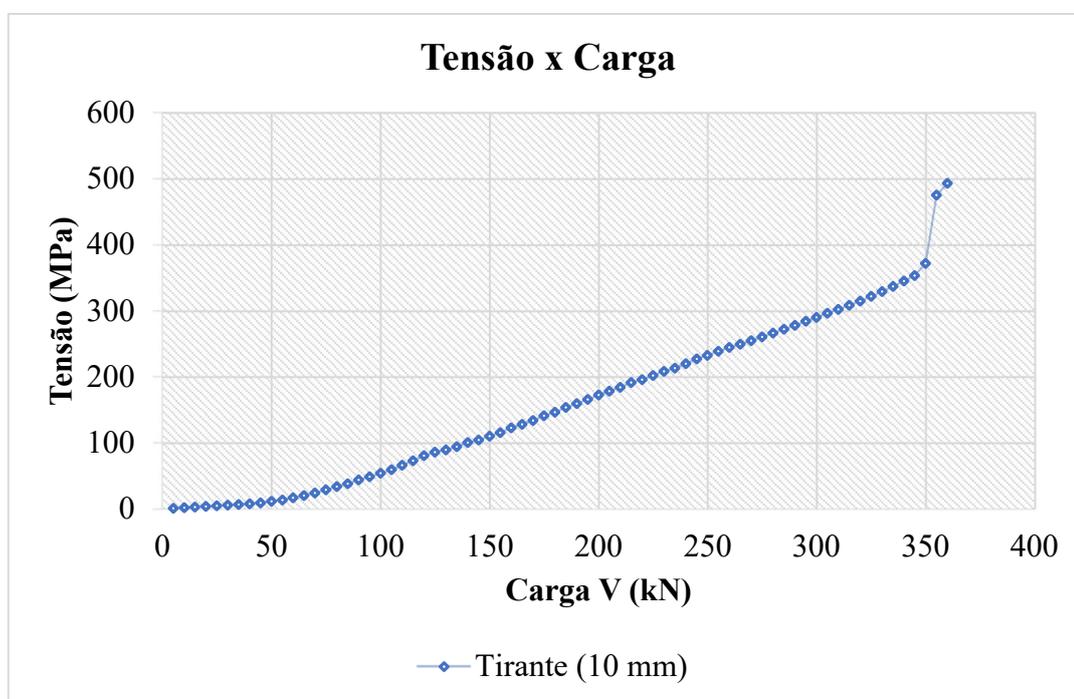
NAGRODZKA-GODYCKA (1999) diz que as maiores fissuras que se desenvolveram no consolo WII-4 foram da ordem de 0,2 mm. A Figura 85 apresenta uma comparação dos mapas de fissuração de ambos os trabalhos.

O desenvolvimento das tensões de tração na armadura do tirante em relação a carga  $V$  aplicada no consolo (Figura 86), desenvolveu-se de maneira quase linear até o passo de carga 70 (350 kN)



**Figura 85 – Fissuração no consolo WII: (a) ATENA, (b) NAGRODZKA-GODYCKA (1999)**

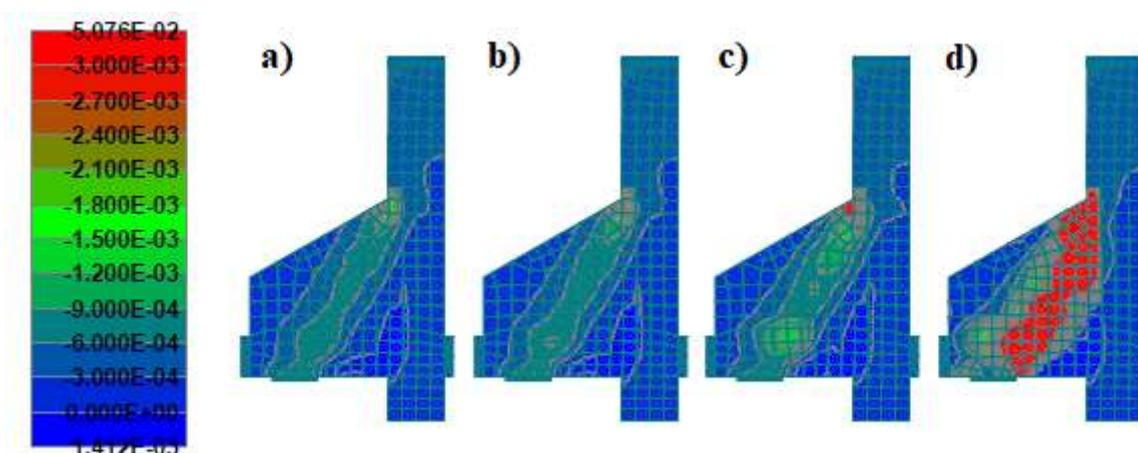
Nota: O mapa em (b) apresenta a carga aplicada que causou a fissura.



**Figura 86 – Gráfico das tensões no tirante por carga aplicada: consolo WII**

A partir do passo 70 os incrementos de tensão na armadura do tirante, a cada passo de carga aplicado, deram um salto em seu valor, fazendo com que a tensão na armadura logo

alcança-se o seu valor de escoamento. Esse fato, está associado a um aumento expressivo das deformações no concreto (Figura 87), o que pode justificar o salto nas tensões entre o passo 70 e 71.



**Figura 87 – Deformações principais no consolo WII: a) Passo 68, b) Passo 69, c) Passo 70, d) Passo 71**

Analisando os resultados obtidos, pode-se dizer que o consolo WII-4 chegou a ruína devido a falência da escora de compressão. Observando os resultados apresentados, fica caracterizado que o concreto atingiu tensões de compressão que ultrapassaram sua capacidade de resistência, apresentando assim grandes deformações, o que paralelamente acarretou o escoamento das armaduras.

#### 9.3.4 CONSOLO WII-2

A partir do descarregamento do consolo WII-4 e aplicação de protensão, as tensões desenvolvidas no consolo WII-2 alteraram o seu caminhamento com o aumento do carregamento. Para as cargas iniciais as principais tensões de compressão ficaram concentradas na região da linha do tirante, tendo em vista a compressão causada pela placa de ancoragem do tirante externo, e conforme a carga aumentava as tensões de compressão se conduziram para a escora inclinada (Figura 88).

Analisando os mapas apresentados, pode-se dizer, que após um carregamento de 150 kN as maiores tensões de compressão começaram a ocorrer na escora inclinada e não na linha do tirante (abaixo da placa de ancoragem da barra de protensão). Observando os mapas subsequentes, nota-se, que a partir deste carregamento o caminhamento das tensões de

compressão se equipara ao caminhamento desenvolvido nos consolos normalmente armados, os quais podem ser satisfatoriamente representados por uma escora comprimida e um tirante tracionado.

O formato do mapa de tensões de compressão do consolo, seguiu razoavelmente uniforme até o passo 146 (450 kN), onde a partir desta carga a escora comprimida perdeu a uniformidade e regiões de alta concentração de tensões se espalharam por todo o consolo, impedindo que uma largura uniforme seja definida para a escora de compressão (Figura 89). O ápice de tensão ocorreu próximo a interseção da face inferior externa do consolo com a face do pilar. A partir do passo 140, as tensões em alguns pontos da escora comprimida, ultrapassaram a tensão de 25,5 MPa.

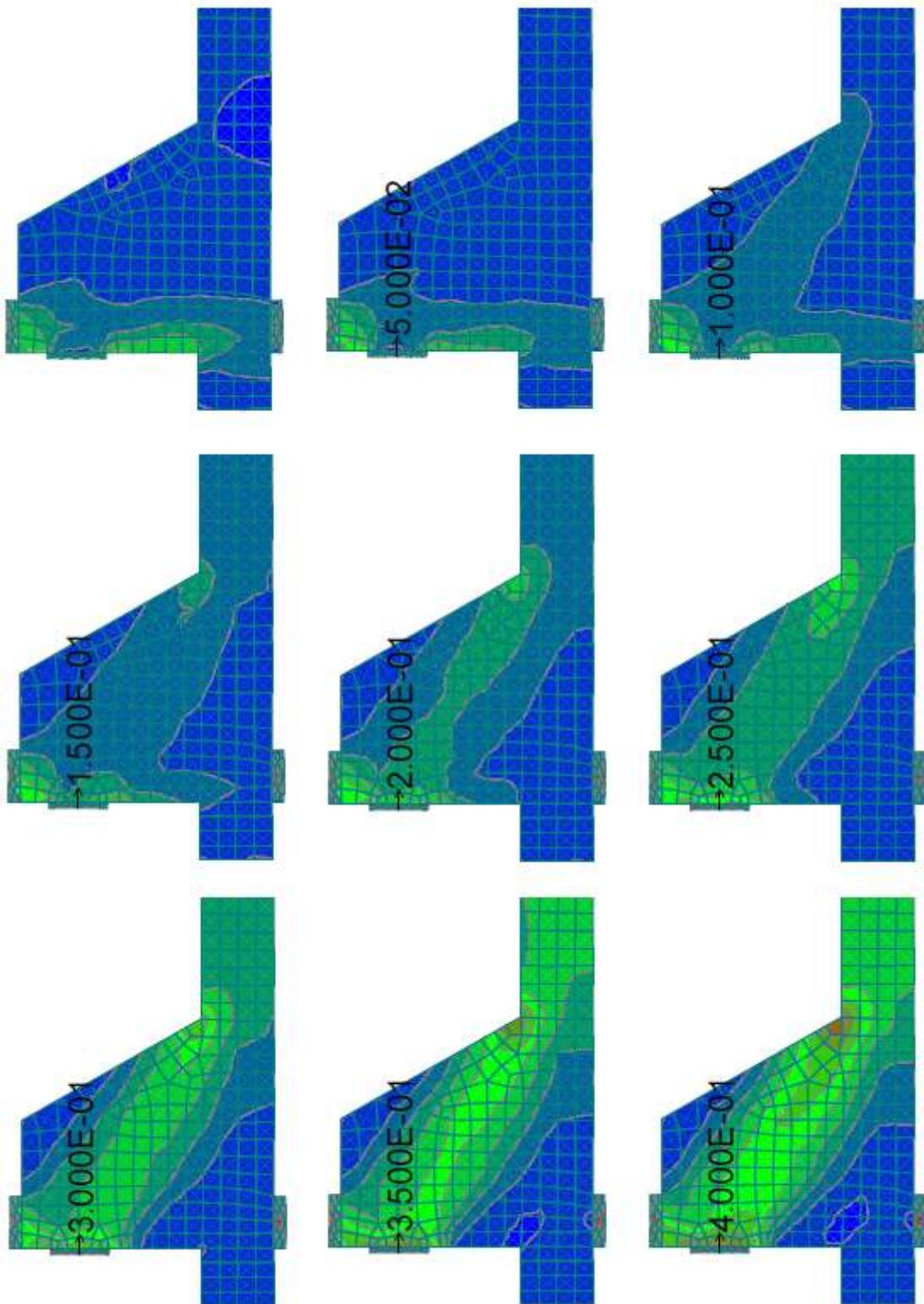
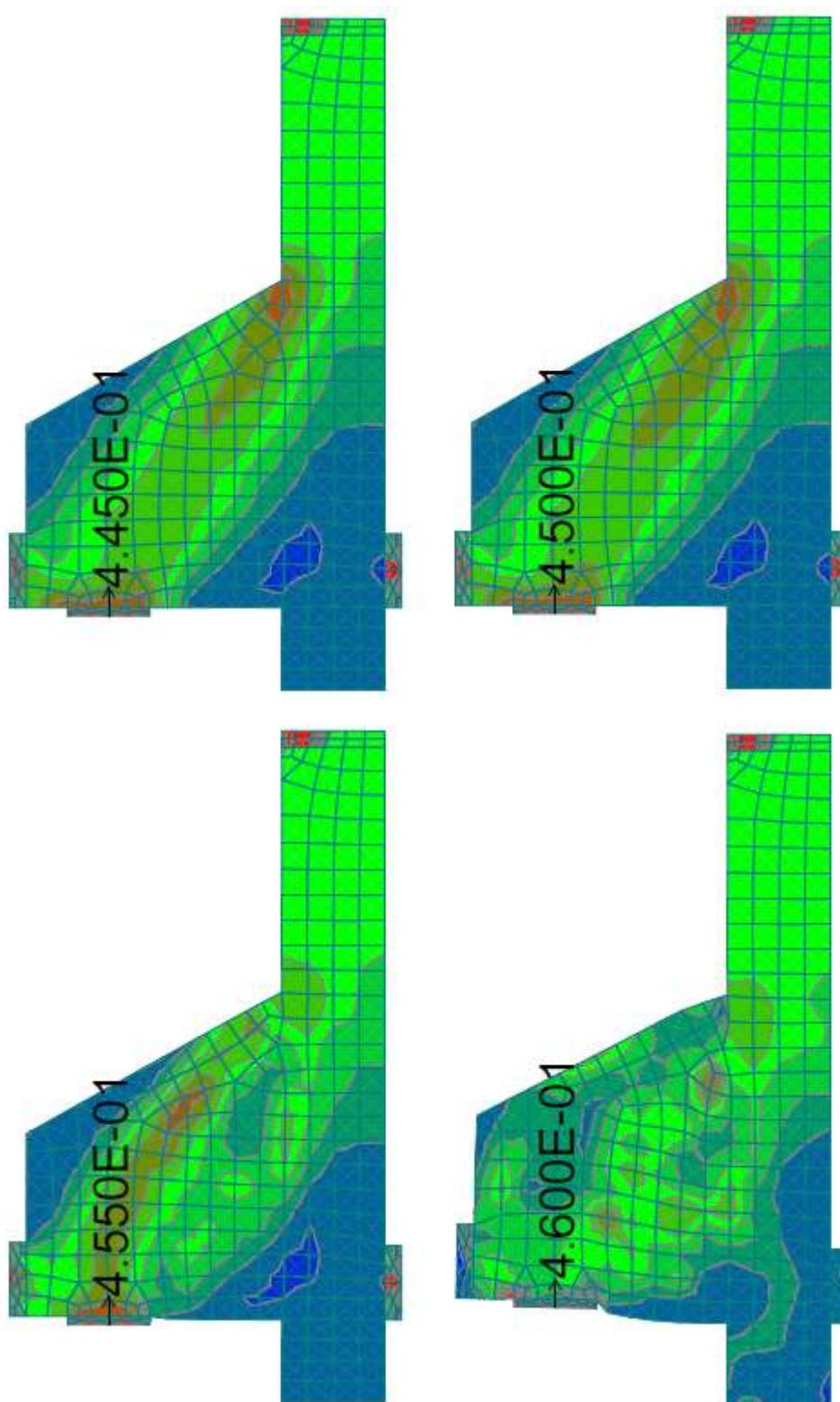


Figura 88 - Progressão das tensões no consolo WII-2

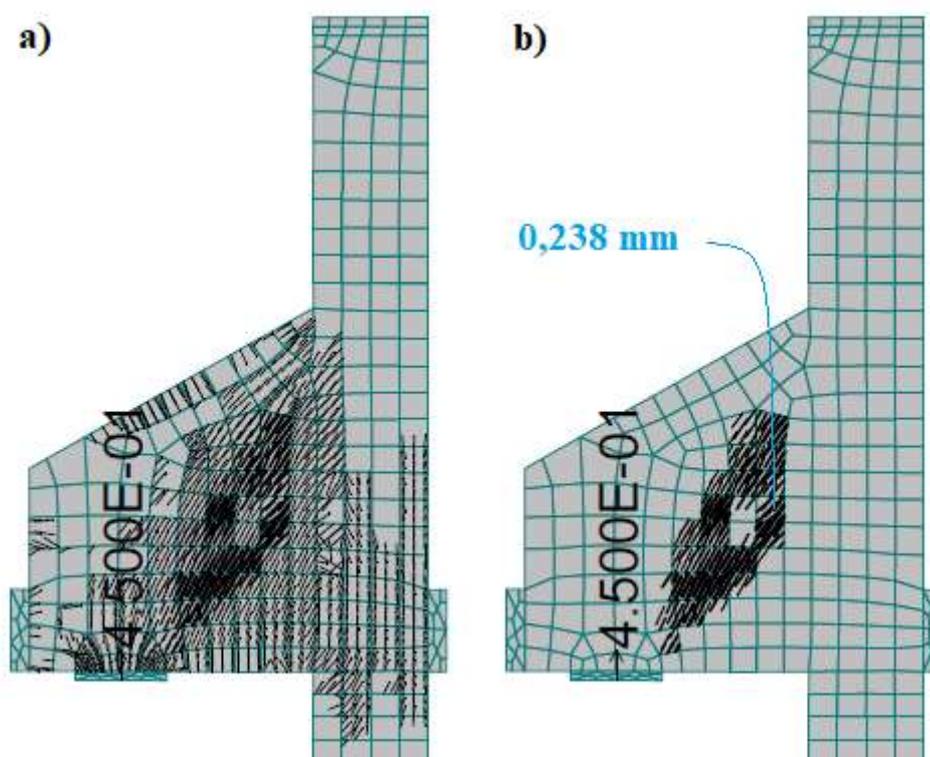


**Figura 89 - Tensões nos últimos passos de carga do consolo WII-2**

A capacidade de carga do consolo WII-2 foi de 460 kN em contrapartida aos 525 kN encontrados por NAGRODZKA-GODYCKA (1999), esses valores representam uma diferença

de 12,38 % ao encontrado experimentalmente. Em relação a situação sem protensão o aumento foi de 100 kN (27,78 %), passando de 360 kN para 460 kN.

No momento de carregamento máximo as aberturas de fissuras chegaram a 14 mm. Esta abertura de fissuras está diretamente relacionada a ocorrência de tensões superiores a 25,5 MPa. Se analisarmos a abertura de fissuras sob tensões inferiores a esta, obteremos valores de abertura por volta de 100 vezes menores. Para o passo de carga 146 (450 kN) a abertura de fissura máxima foi de 0,238 mm.

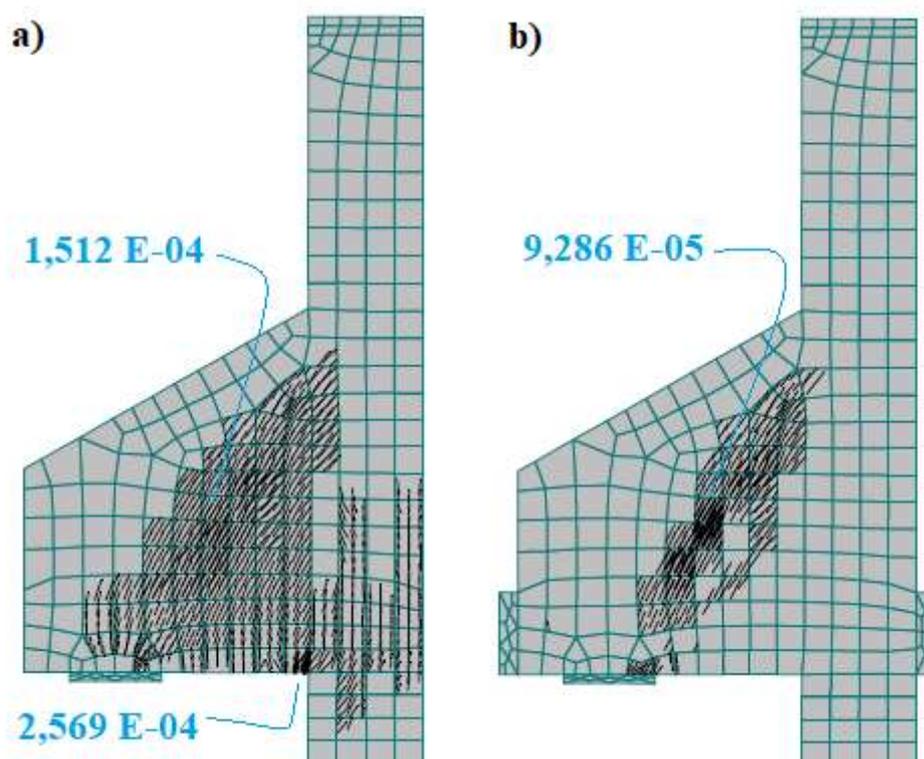


**Figura 90 - Fissuração do consolo WII-2 (450 kN)**

Nota:(a) Fissuras sem limite de aberturas (b) Fissuras maiores do 0,01 mm.

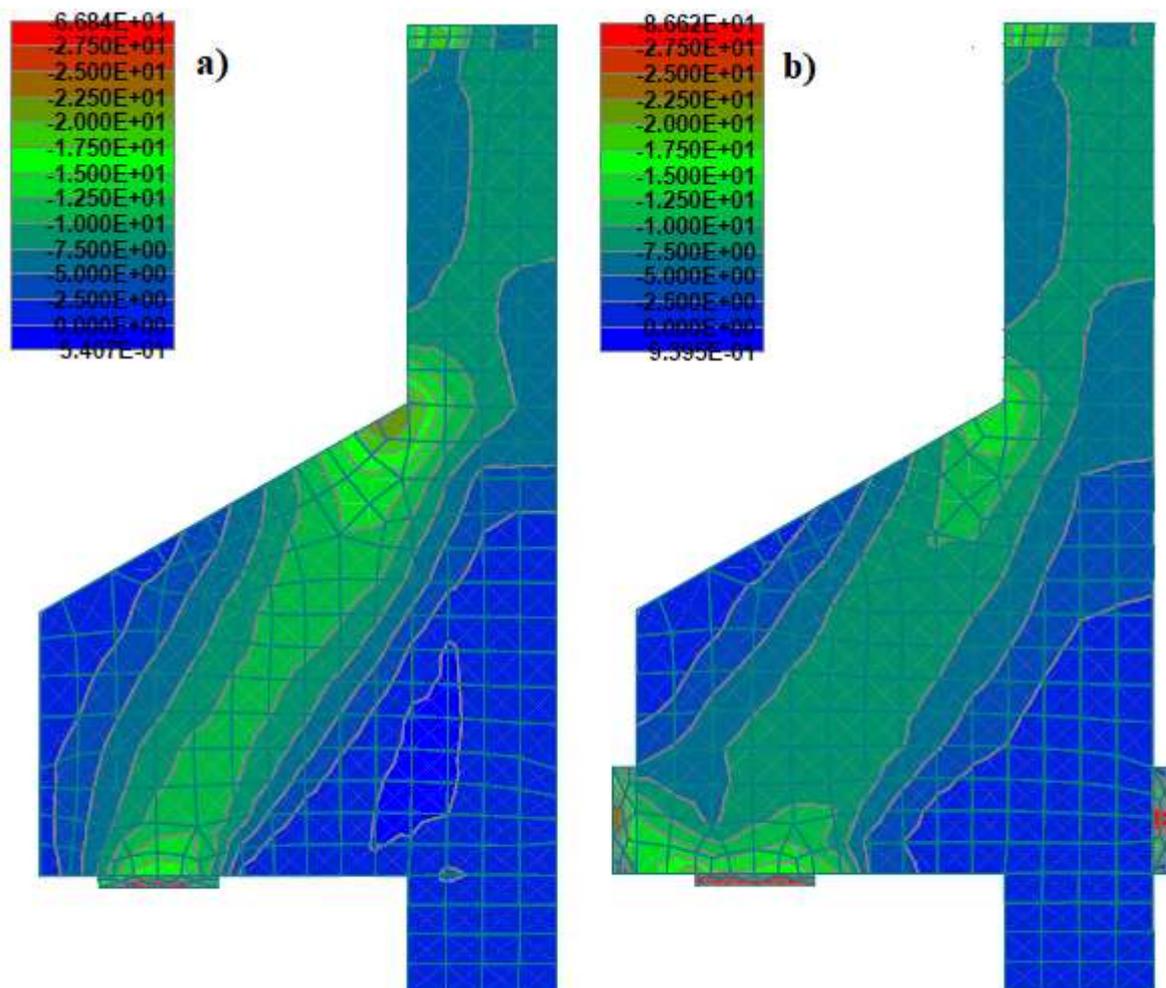
Na Figura 90 (a) pode ser visto o mapa de fissuração do consolo WII-2 sob um carregamento de 450 kN. Na figura 90 (b) estão visíveis apenas as fissuras com abertura maior do que 0,1 mm. Analisando estes mapas, observa-se que o consolo apresentou fissuras quase que em sua totalidade, porém as fissuras com abertura maior do que 0,1 mm se concentraram na direção da escora comprimida.

Comparando a fissuração do consolo com protensão externa com a fissuração do consolo normalmente armado sob uma mesma carga, observa-se que a protensão externa induz uma diminuição da quantidade de fissuras e de largura de abertura destas, sendo a largura para a situação com protensão por volta de 10 vezes menor (Figura 91).



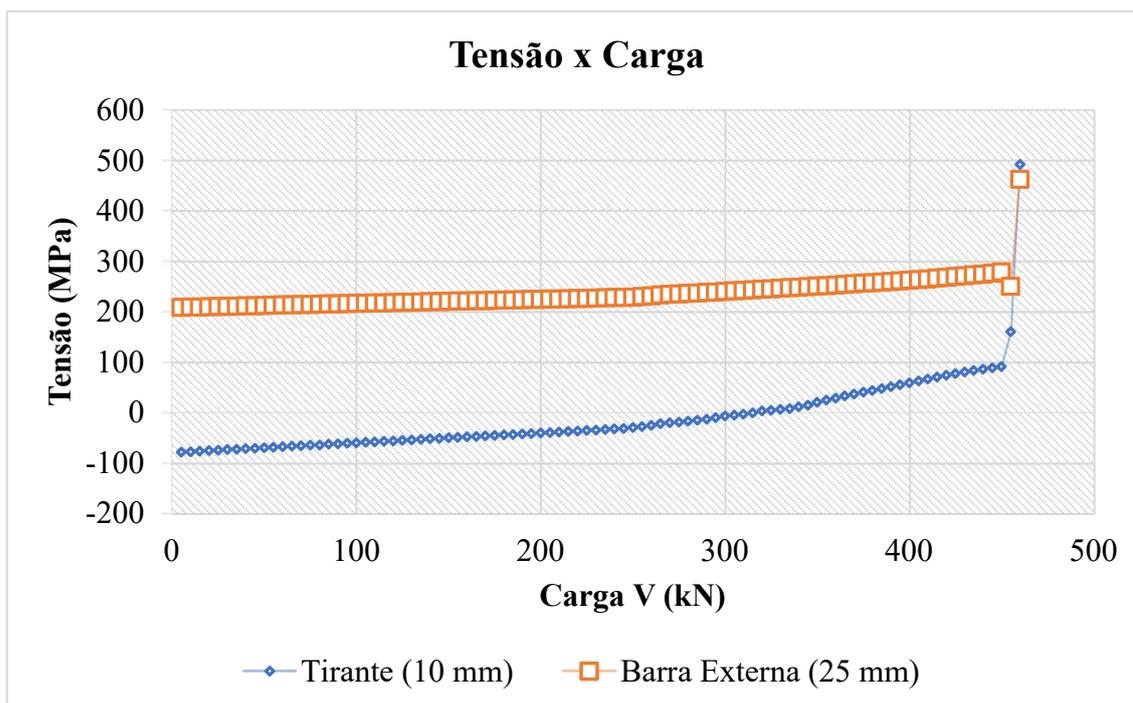
**Figura 91 – Comparação da fissuração do consolo WII-4 e WII-2 paraa carga de 275 kN**  
 Nota: Unidade de comprimento em (m). Fissuras maiores do 0,01 mm.

A comparação das tensões atuantes para as situações sem protensão externa e com protensão externa (Figura 92), sob um mesmo carregamento, demonstrou que as tensões atuantes na escora comprimida são menores na presença de protensão externa. Enquanto para o passo 111 a tensão máxima, atuante na base da escora, foi da ordem de 15,19 MPa, para o passo 55 a tensão máxima foi da ordem de 23,45 MPa. Diferentemente do consolo WI-2, o consolo WII-2 apresentou as maiores tensões abaixo das placas de ancoragem e de aplicação de carga, variando entre 15 e 17,5 MPa.



**Figura 92 – Comparativo entre as tensões principais de compressão sob mesmo carregamento: a) consolo WII-4, b) consolo WII-2**

Na Figura 93 é possível observar o desenvolvimento das tensões na armadura do tirante e nas barras de protensão externas aferidas no ponto de encontro do consolo com o pilar. O gráfico contempla apenas as tensões desenvolvidas nas barras após o descarregamento e tensionamento das barras externas, uma vez que as tensões desenvolvidas no tirante anteriormente a isto, são iguais ao gráfico da Figura 81.

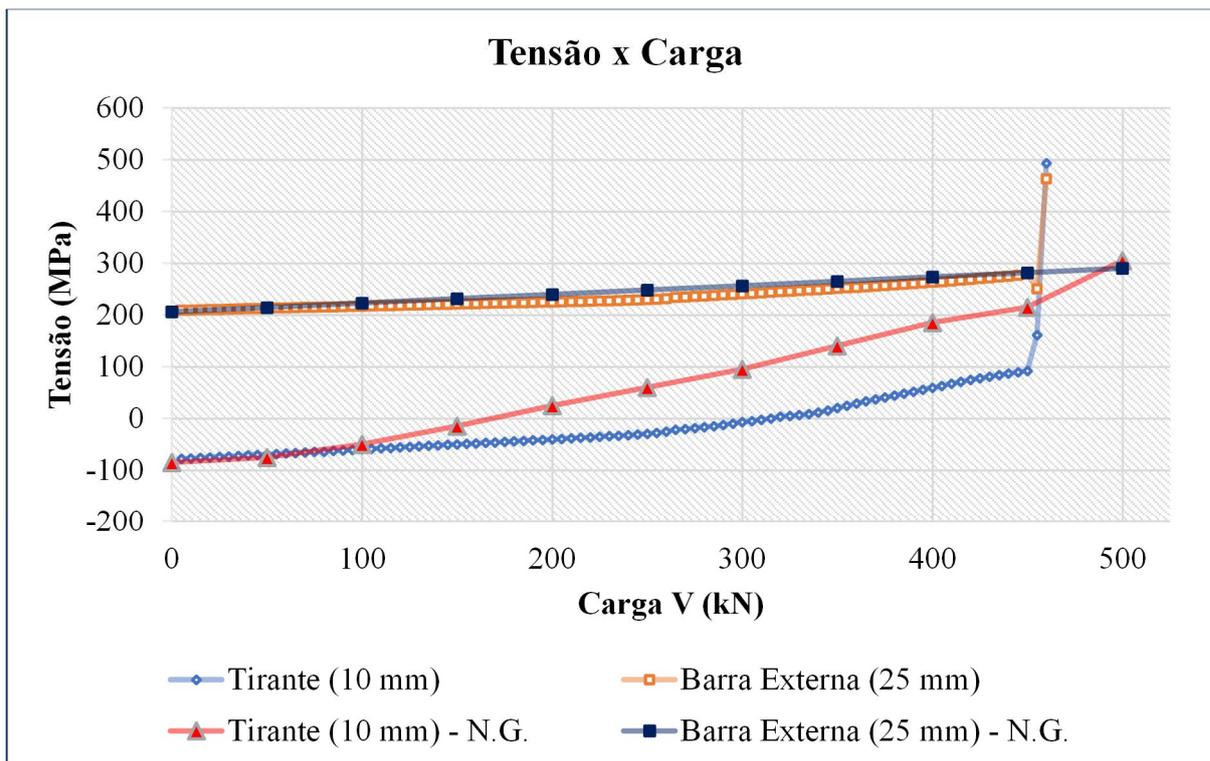


**Figura 93 - Gráfico das tensões no tirante e barras externas por carga aplicada: consolo WII-2**

Diferentemente do consolo WII-4, a armadura do tirante do consolo WII-2, está submetida inicialmente a tensões de compressão, fato que decorre da compressão gerada pela placa de ancoragem do tirante, porém conforme a carga  $V$  aumenta, o modelo de treliça começa a ser solicitado, e as tensões de compressão na barra do tirante convergem aos poucos para tensões de tração conforme o concreto em seu entorno deixa de ser solicitado.

As tensões na barra interna e externa aumentaram de forma quase linear, de acordo com a carga  $V$ , até o passo de carga 146 (450 kN), onde a partir deste as tensões saltaram verticalmente ultrapassando a tensão de escoamento.

Comparando as tensões encontradas com as tensões aferidas experimentalmente por NAGRODZKA-GODYCKA (1999), percebe-se que as tensões desenvolvidas nas barras externas foram praticamente iguais, o que já não acontece com as barras do tirante, enquanto o ATENA aferiu tensões menores do que 100 MPa, experimentalmente essas tensões ultrapassaram os 270 MPa para uma mesma carga  $V$  (Figura 94).



**Figura 94 - Comparativo das tensões desenvolvidas no tirante e barras externas do consolo WII-2, aferidas em análise não linear e estudo experimental**

Fonte: Adaptado de NAGRODZKA-GODYCKA (1999).

Nota: N.G. – Sigla para NAGRODZKA-GODYCKA (1999)

A partir do passo 146 os incrementos de tensão nas armaduras do tirante e nas barras externas, a cada passo de carga aplicado, deram um salto em seu valor, fazendo com que suas tensões logo alcançassem o valor de escoamento. Esse fato está associado a um aumento expressivo das deformações no concreto.

Analisando os resultados obtidos, pode-se dizer que o consolo WII-2 chegou a ruína devido a falência da escora de compressão. Observando os resultados apresentados, fica caracterizado que o concreto atingiu tensões de compressão que ultrapassaram sua capacidade de resistência, apresentando assim grandes deformações, o que paralelamente acarretou o escoamento das armaduras.

## 10 ANÁLISE ANÁLITICA DOS CONSOLOS WI-4, WI-2, WII-4 E WII-2

### 10.1 VERIFICAÇÃO SEGUNDO A NBR 6118:2014

Neste item do trabalho, foi realizado a determinação da capacidade de carga dos consolos WI-4 (Figura 56) e WII-4 (Figura 58) de acordo com a NBR 6118:2014. Para isto, foram calculados os parâmetros de resistência normativos a partir de um coeficiente de segurança unitário ( $\gamma_c = 1$ ), afim de comparar os resultados calculados com os experimentais encontrados por NAGRODZKA-GODYCKA (1999). O modelo de escoras e tirantes utilizado foi o proposto pela norma NBR 6118:2014 (Figura 11).

Como os consolos WI-4 e WII-4 tratam-se de consolos normalmente armados (sem barras externas), os nós presentes neste tipo de arranjo estrutural são nós do tipo CCC e nós do tipo CCT, ou seja, a partir de uma análise embasada na NBR 6118:2014, a escora de compressão é atravessada por apenas um tirante. Desta forma são calculados os parâmetros de resistência normativos para ambas as situações, conforme a seguir:

- Determinação do valor característico de cálculo  $f_{cd}$ :

$$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$$

$$f_{cd} = f_{ck} / 1$$

$$f_{cd} = f_{ck}$$

- Parâmetro de resistência das escoras prismática e nós CCC:

$$f_{cd1} = 0,85 * \alpha_{v2} * f_{ck}$$

$$f_{cd1} = 0,85 * 0,898 * 2,55$$

$$f_{cd1} = 1,946 \text{ kN/cm}^2$$

- Parâmetro de resistência das escoras atravessadas por tirantes único ou nós CCT:

$$f_{cd3}^* = 0,72 * \alpha_{v2} * f_{cd}$$

$$f_{cd3}^* = 0,72 * 0,898 * 2,55$$

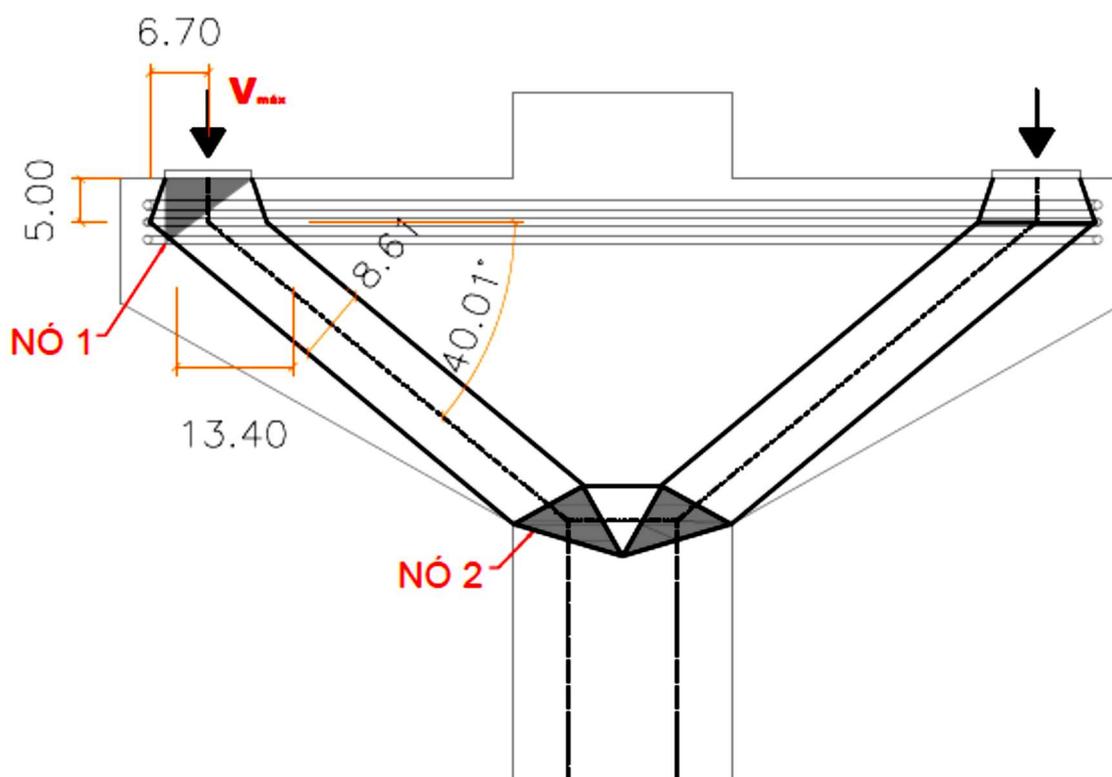
$$f_{cd3}^* = 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

- Cálculo de  $\alpha_{v_2}$

$$\alpha_{v_2} = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$$

$$\alpha_{v_2} = \left(1 - \frac{25,5}{250}\right) = 0,898$$

### 10.1.1 CONSOLO WI-4

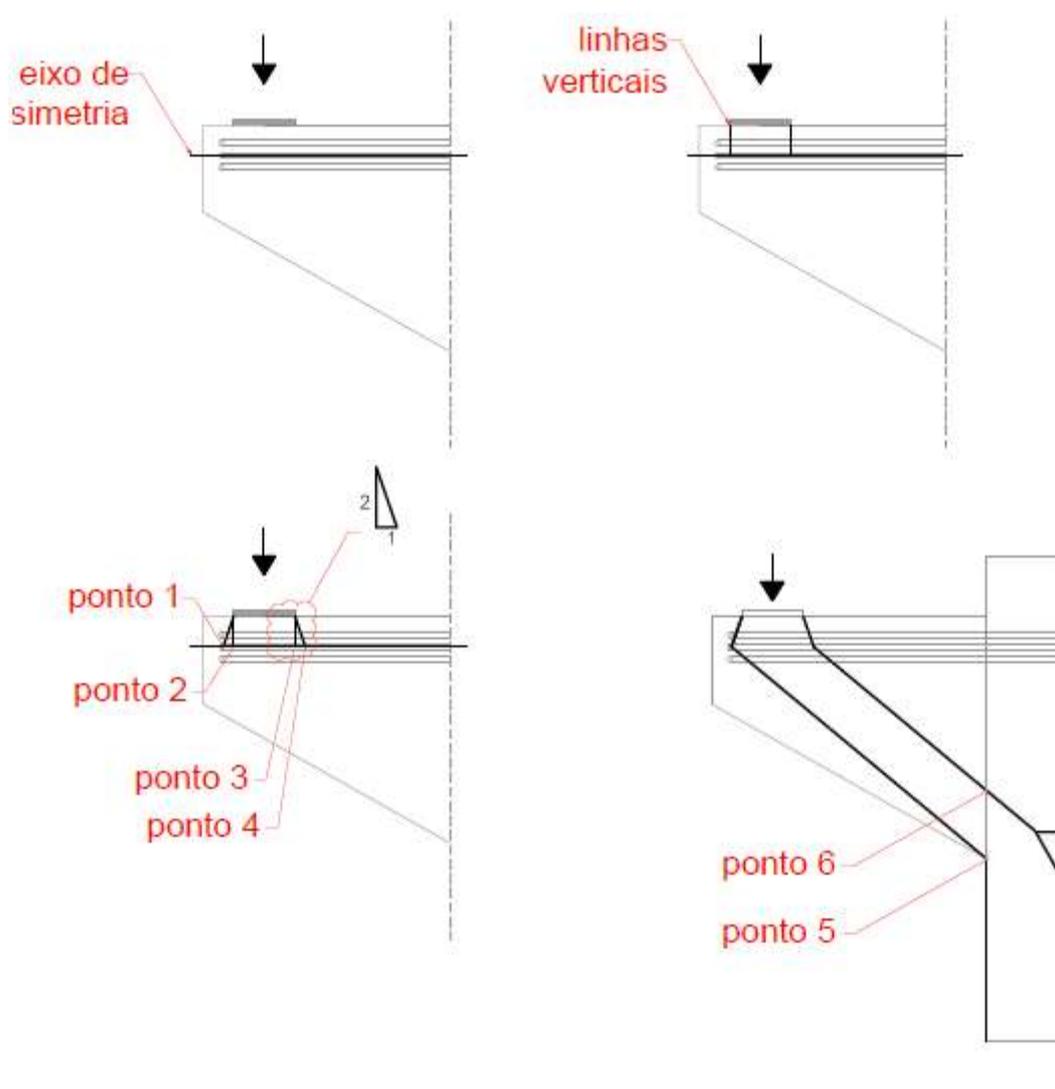


**Figura 95 – Consolo WI-4 de acordo com a NBR 6118:2014**

Para a determinação da capacidade de carga do consolo, calculou-se a carga  $V$  máxima que a escora admitiria, e a carga máxima que a armadura do tirante admitiria. Apresenta-se a seguir o roteiro para determinação do carregamento máximo de acordo com a resistência da escora inclinada:

Inicialmente faz-se necessário determinar a largura máxima da escora, para isto determina-se um eixo de simetria das armaduras do tirante, e dois eixos verticais em ambas as

extremidades da placa de carregamento, agora, caso haja forças desfavoráveis atuando na linha do tirante, traça-se uma linha do ponto 2 ao ponto 5 e uma linha paralela a esta, do ponto 3 ao ponto 6, definindo assim, a largura da escora, uma outra hipótese, é o caso onde não existam forças desfavoráveis atuantes na linha do tirante, então, pode-se realizar uma abertura de 1:2 em relação a vertical abaixo da placa de carregamento, definindo assim o ponto 1 e o ponto 4, onde, a partir disto, traça-se uma linha do ponto 1 ao ponto 5, e uma linha paralela a esta, do ponto 4 ao ponto 6, definindo assim, a largura da escora. A Figura 96 apresenta os pontos acima descritos.



**Figura 96 – Determinação da largura da escora**

A partir da largura da escora definida, calcula-se a tensão máxima que a escora pode resistir, e a força máxima que pode atuar na escora. Na sequência, realizar-se o equilíbrio das

forças que atuam no nó 1, obtendo assim, o valor máximo para carga V ( $V_{max,esc}$ ), a qual deve se equilibrar com a componente vertical da força atuante na escora.

$$\sigma_E = \frac{F_{Emáx}}{A} = 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{Emáx} = 1,649 * 8,61 * 20 = 283,96 \text{ kN}$$

$$V_{max,esc} = F_{Emáx} * \text{sen}(40,01)$$

$$V_{max,esc} = 182,56 \text{ kN}$$

Para a determinação do carregamento máximo que a armadura do tirante é capaz de resistir, deve ser utilizado o roteiro a seguir:

A partir dos dados das armaduras, determinar a área de aço atuando no tirante e a força máxima que estas barras podem suportar sem escoarem. A partir deste valor, realizar o equilíbrio das forças no nó 1, obtendo assim, uma resistência necessária para a escora de compressão. Calcular a componente vertical da força da escora e equilibra-la com a carga V, obtendo assim o máximo carregamento.

$$T_{máx} = f_{y\phi} * A_{s\phi}$$

$$T_{máx} = 8 * 0,785 * 49,3 + 2 * 0,5 * 48,3$$

$$T_{máx} = 357,90 \text{ kN}$$

$$T_{máx} = F_E * \cos(\theta)$$

$$F_E = \frac{357,90}{\cos(40,01)} = 467,24$$

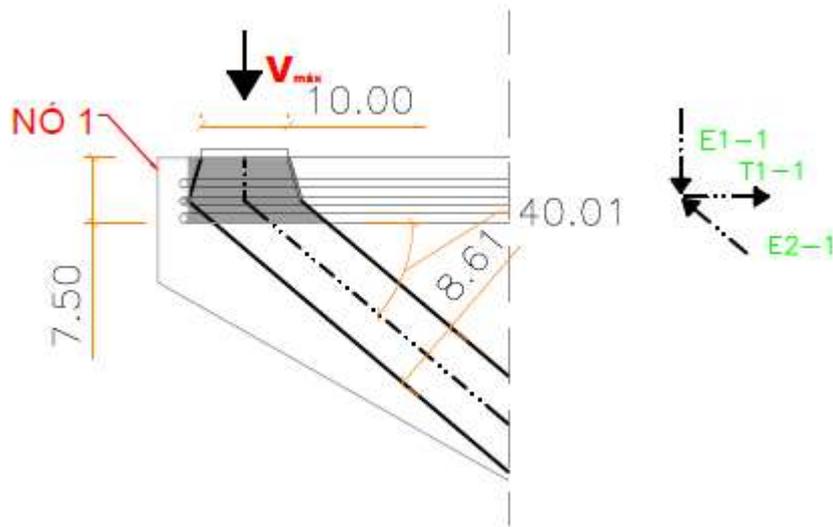
$$V_{máx} = F_E * \text{sen}(40,01)$$

$$V_{máx} = 467,24 * \text{sen}(40,01)$$

$$V_{máx} = 300,43 \text{ kN}$$

Como a menor carga máxima admissível ( $V_{max} = 182,56 \text{ kN}$ ) depende da resistência da escora, isto significa dizer, que a escora é quem controla a ruína do consolo, assim, verifica-se os nós da estrutura para este carregamento. Para a verificação dos nós, deve ser utilizado o roteiro a seguir:

A partir do carregamento máxima previamente definido, verificar as tensões atuantes nos nós.



**Figura 97 - Consolo WI-4 (NBR 6118:2014): Nó 1 (CCT)**

$$\sigma_{E1-1} \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E1-1} = \frac{F_{E1-1}}{A_{E1-1}} = \frac{182,56}{20 * 10} = 0,913 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E1-1} = 0,913 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

$$\sigma_{E2-1} \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E2-1} = \frac{F_{E2-1}}{A_{E2-1}} = \frac{283,96}{20 * 8,61} = 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E2-1} = 1,649 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

em que:  $\sigma_{Ei-1}$  – Tensão exercida pela escora i no nó 1

$F_{Ei-1}$  – Força exercida pela escora i no nó 1

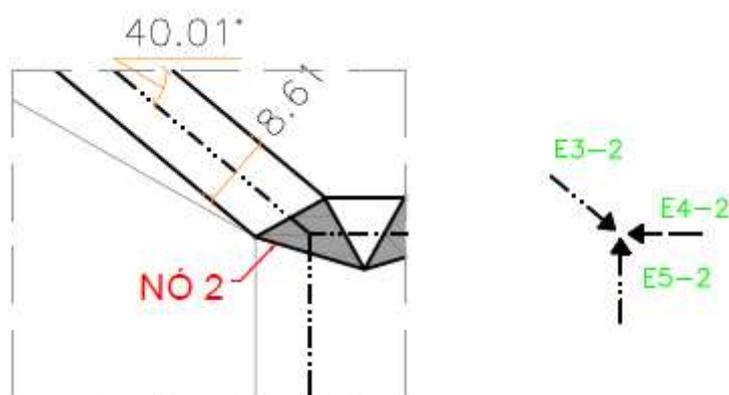


Figura 98 – Consolo WI-4 (NBR 6118:2014): Nó 2 (CCC)

$$\sigma_{E5-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{E5-2} = F_{E2-1} * \text{sen}(40,01) = 283,96 * \text{sen}(40,01)$$

$$F_{E5-2} = 182,56 \text{ kN}$$

$$\sigma_{E5-2} = \frac{182,56}{12,5 * 20} = 0,73 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E5-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

$$\sigma_{E3-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{E3-2} = 283,96 \text{ kN}$$

$$\sigma_{E3-2} = \frac{F_{E3-2}}{A_{E3-2}} = \frac{283,96}{8,61 * 20} = 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E3-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

$$\sigma_{E4-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{E4-2} = F_{E3-2} * \text{cos}(40,01) = 283,96 * \text{cos}(40,01)$$

$$F_{E4-2} = 217,49 \text{ kN}$$

$$\sigma_{E4-2} = \frac{217,49}{8,2 * 20} = 1,33 \text{ kN/cm}^2$$

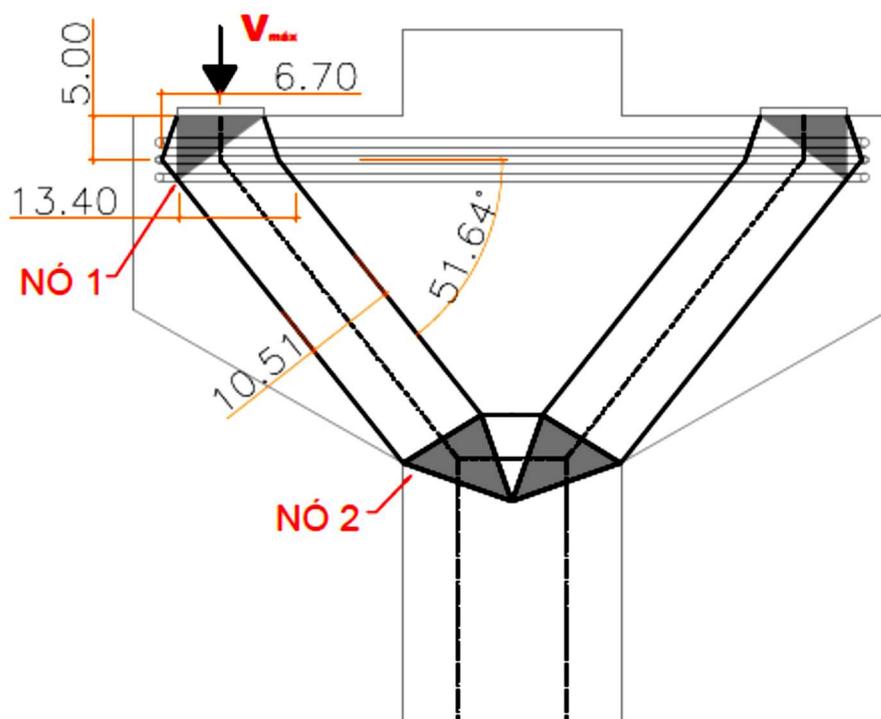
$$\sigma_{E4-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

em que:  $\sigma_{Ei-2}$  – Tensão exercida pela escora i no nó 2

$F_{Ei-2}$  – Força exercida pela escora i no nó 2

A capacidade de carga do consolo WI-4 calculada a partir do modelo proposto pela NBR 6118:2014 e seus parâmetros normativos foi de 182,56 kN. A partir de uma análise dos resultados obtidos verifica-se que a capacidade de carga foi determinada pela resistência da escora diagonal.

## 10.1.2 CONSOLO WII-4



**Figura 99 - Consolo WII-4 de acordo com a NBR 6118:2014**

Da mesma forma que para o consolo WI-4, para a determinação da capacidade de carga do consolo, calculou-se a carga  $V$  máxima admissível, que a escora admitiria, e que a armadura do tirante admitiria.

Determinação do carregamento máximo de acordo com a resistência da escora inclinada:

$$\sigma_E = \frac{F_{E\text{máx}}}{A} = 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{E\text{máx}} = 1,649 * 10,51 * 20 = 346,62 \text{ kN}$$

$$V_{\text{max,esc}} = F_{E\text{máx}} * \text{sen}(51,64^\circ)$$

$$V_{\text{max,esc}} = 271,79 \text{ kN}$$

Determinação do carregamento máximo de acordo com área de armadura do tirante:

$$T_{\text{máx}} = f_{y\phi} * A_{s\phi}$$

$$T_{m\acute{a}x} = 8 * 0,785 * 49,3 + 2 * 5 * 48,3$$

$$T_{m\acute{a}x} = 357,90 \text{ kN}$$

$$T_{m\acute{a}x} = F_E * \cos(\theta)$$

$$F_E = \frac{357,90}{\cos(40,01)} = 467,24$$

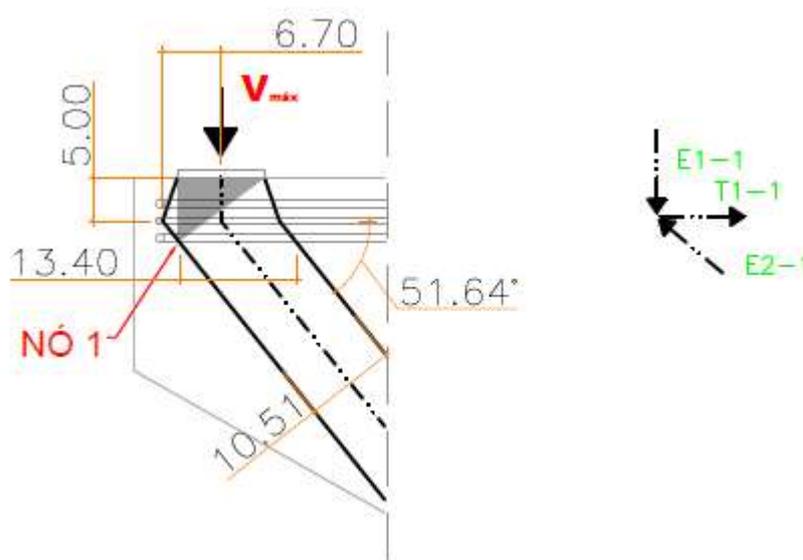
$$V_{max,tir} = F_E * \text{sen}(51,64^\circ)$$

$$V_{max,tir} = 46724 * \text{sen}(51,64^\circ)$$

$$V_{max,tir} = 379,06 \text{ kN}$$

Como a menor carga máxima admissível ( $V_{max} = 271,79 \text{ kN}$ ) depende da resistência da escora, isto significa dizer, que a escora é quem controla a ruína do consolo, assim, verifique-se os nós da estrutura para este carregamento, conforme a seguir.

Verificação dos nós, de acordo com a largura da escora da NBR 6118:2014:



**Figura 100 – Consolo WII-4 (NBR 6118:2014): Nó 1 (CCT)**

$$\sigma_{E1-1} \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E1-1} = \frac{F_{E1-1}}{A_{E1-1}} = \frac{271,59}{20 * 10} = 1,36 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E1-1} = 1,36 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

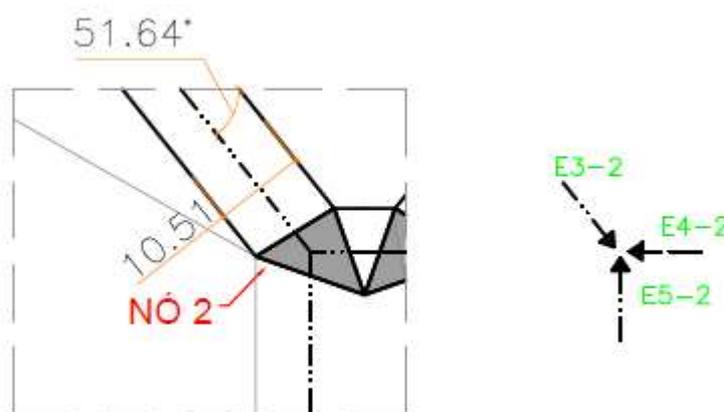
$$\sigma_{E2-1} \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E2-1} = \frac{F_{E2-1}}{A_{E2-1}} = \frac{346,62}{20 * 10,51} = 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E2-1} = 1,649 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

em que:  $\sigma_{Ei-1}$  – Tensão exercida pela escora i no nó 1

$F_{Ei-1}$  – Força exercida pela escora i no nó 1



**Figura 101 – Nó 2 – Consolo WII-4(NBR 6118:2014)**

$$\sigma_{E5-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{E5-2} = F_{E2-1} * \text{sen}(51,64) = 346,62 * \text{sen}(51,64)$$

$$F_{E5-2} = 271,79 \text{ kN}$$

$$\sigma_{E5-2} = \frac{271,79}{12,5 * 20} = 1,09 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E5-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

$$\sigma_{E3-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{E3-2} = 346,62 \text{ kN}$$

$$\sigma_{E3-2} = \frac{F_{E3-2}}{A_{E3-2}} = \frac{346,62}{10,51 * 20} = 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E3-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

$$\sigma_{E4-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{E4-2} = F_{E3-2} * \text{cos}(51,64) = 346,62 * \text{cos}(51,64)$$

$$F_{E4-2} = 215,11 \text{ kN}$$

$$\sigma_{E4-2} = \frac{215,11}{10 * 20} = 1,08 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E4-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2 - OK!$$

em que:  $\sigma_{Ei-2}$  – Tensão exercida pela escora i no nó 2  
 $F_{Ei-2}$  – Força exercida pela escora i no nó 2

A capacidade de carga do consolo WII-4 calculada a partir do modelo proposto pela NBR 6118:2014 e seus parâmetros normativos, foi de 271,79 kN. A partir de uma análise dos resultados obtidos verifica-se que a capacidade de carga foi determinada pela resistência da escora de compressão.

## 10.2 MODELO DE ESCORAS E TIRANTES COM USO DE PROTENSÃO EXTERNA

Como a norma NBR 6118:2014 não sugere um modelo de escoras e tirantes para o consolo na presença de protensão, sugeriu-se um modelo de análise para a situação em que o consolo possua barras de protensão externas, ancoradas por placa na altura da linha do tirante, onde a carga flui para a o pilar através de uma escora única. A resistência da escora de compressão foi calculada de acordo com os parâmetros da NBR 6118:2014.

Diferentemente do modelo de escoras e tirantes proposto para consolo curto pela NBR 6118:2014, onde a definição da largura da escora de compressão é baseada a partir da largura da placa de carregamento e da linha do tirante, sendo ainda possível uma abertura da largura resistente de 1:2 abaixo da placa de carregamento, no modelo proposto a largura da escora é definida a partir da placa de carregamento e da placa de ancoragem do tirante.

A geometria da treliça proposta foi baseada nos mapas de tensões apresentados anteriormente, onde a partir do caminhamento das tensões, o posicionamento das barras e suas inclinações foram definidos, buscando sempre uma estrutura em equilíbrio. O modelo de treliça proposto foi um modelo simples, onde a carga flui para o pilar através de uma única escora de compressão.

A força de protensão aplicada na barra externa foi igual ao valor da Equação (77), valor este que foi utilizado por NAGRODZKA-GODYCKA (1999).

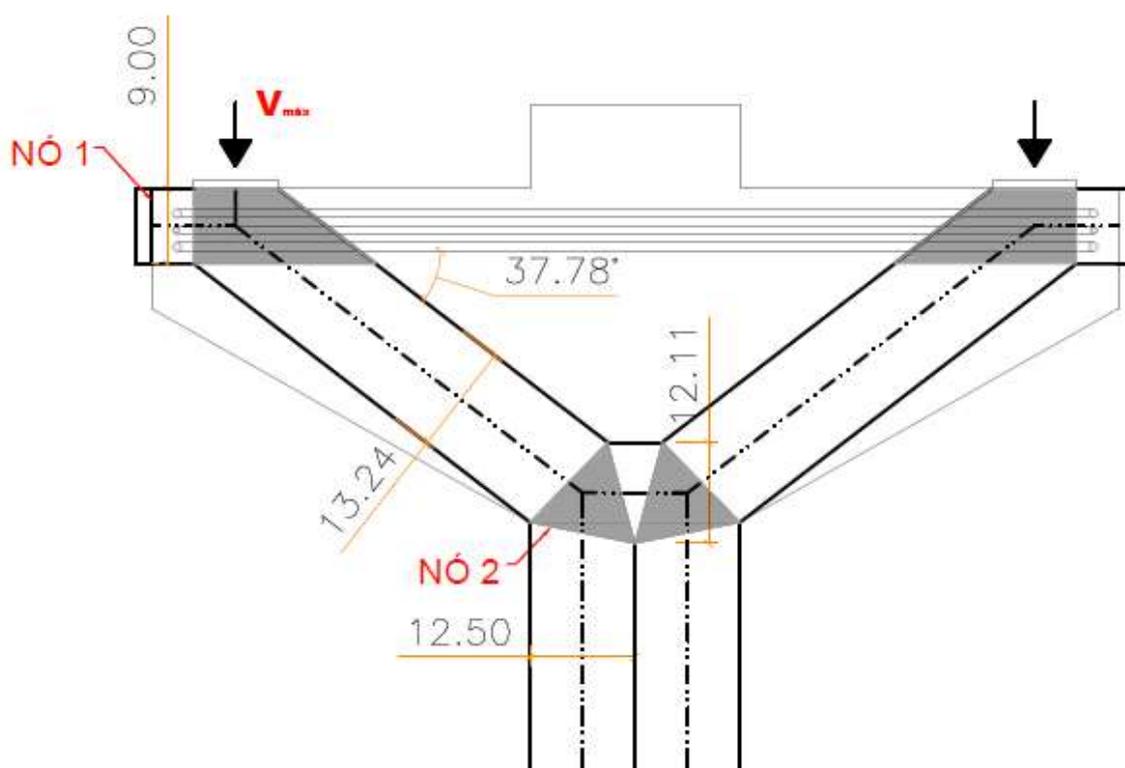
$$P_s = 0,53 * P_y \quad \text{Equação (77)}$$

$$P_y = A_{PS} * f_y \quad \text{Equação (78)}$$

em que:

- $P_s$  – Força de protensão
- $P_y$  – Força capaz de escoamento da barra
- $f_y$  – Tensão de escoamento da barra
- $A_{PS}$  – Área da armadura de protensão

### 10.2.1 CONSOLO WI-2



**Figura 102 – Modelo de bielas proposto para o consolo WI-2**

A partir dos cálculos realizados para o consolo WI-4, sabe-se que o elemento que está governando a resistência do consolo é a escora da compressão, porém devido a consideração de um tirante externo ancorado em placa de protensão, vamos recalculer esses valores considerando parâmetros de resistência de outros autores e a nova largura da escora de compressão.

Determinação do carregamento máximo de acordo com a resistência da escora inclinada (NBR 6118:2014):

$$\sigma_E = \frac{F_{E_{m\acute{a}x}}}{A} = 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

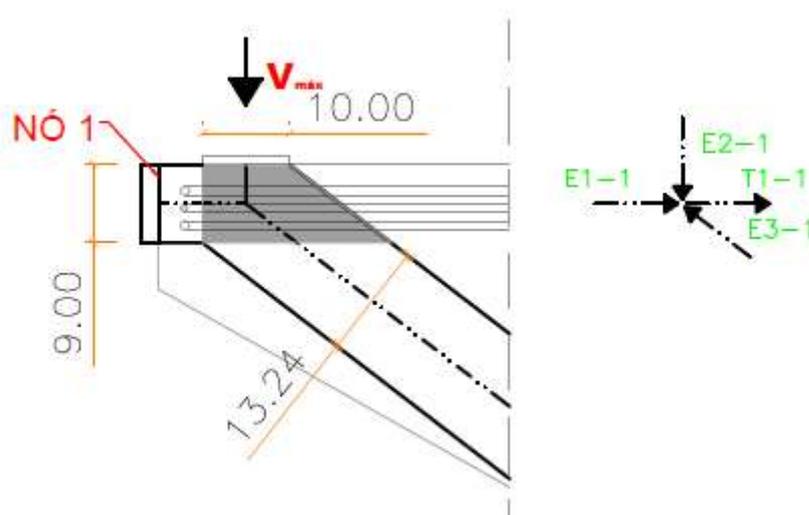
$$F_{E_{m\acute{a}x}} = 1,649 * 13,24 * 20 = 436,65 \text{ kN}$$

$$V = F_{E_{m\acute{a}x}} * \text{sen} (37,78)$$

$$V = 267,51 \text{ kN}$$

Após a determinação do carregamento máximo que a escora inclinada é capaz de resistir ( $V_{max} = 267,51 \text{ kN}$ ), foram verificados os nós 1 e 2 do modelo de escoras e tirantes proposto. Para um melhor entendimento as Figuras 103 e 104 apresentam os nós 1 e 2 e seus esquemas de equilíbrio de forças.

Verificação do nó 1:



**Figura 103 - Nó 1 (WI-2)**

$$\sigma_{E1-1} \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E1-1} = \frac{F_{E1-1}}{A_{E1-1}} = \frac{206,1}{20 * 9} = 1,145 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E1-1} = 1,145 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

$$\sigma_{E2-1} \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E2-1} = \frac{F_{E2-1}}{A_{E2-1}} = \frac{267,51}{20 * 10} = 1,338 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E2-1} = 1,338 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

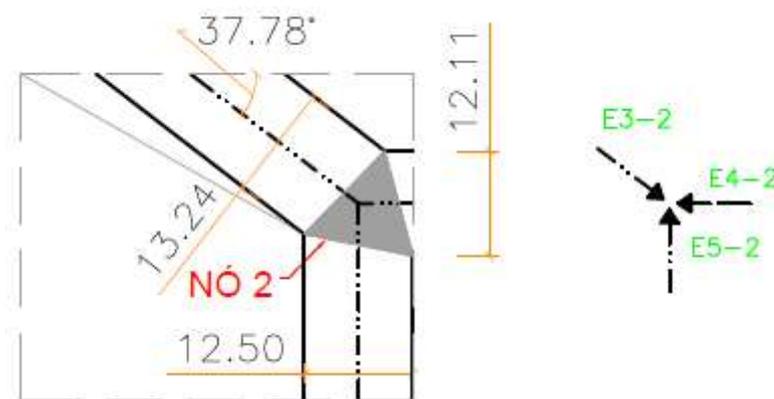
$$\sigma_{E3-1} \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E3-1} = 1,649 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

em que:  $\sigma_{Ei-1}$  – Tensão exercida pela escora i no nó 1

$F_{Ei-1}$  – Força exercida pela escora i no nó 1

Verificação do nó 2:



**Figura 104 – Nó 2 (WI-2)**

$$\sigma_{E5-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{E5-2} = F_{E3-2} * \text{sen}(37,78) = 436,65 * \text{sen}(37,78)$$

$$F_{E5-2} = 267,51 \text{ kN}$$

$$\sigma_{E5-2} = \frac{267,51}{12,5 * 20} = 1,07 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E5-2} = 1,07 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

$$\sigma_{E3-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{E3-2} = 436,65 \text{ kN}$$

$$\sigma_{E3-2} = \frac{F_{E3-2}}{A_{E3-2}} = \frac{436,65}{13,24 * 20} = 1,65 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E3-2} = 1,65 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

$$\sigma_{E4-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{E4-2} = F_{E3-2} * \cos(37,78) = 436,65 * \cos(37,78)$$

$$F_{E4-2} = 345,11 \text{ kN}$$

$$\sigma_{E4-2} = \frac{345,11}{12,11 * 20} = 1,43 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E4-2} = 1,43 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

em que:  $\sigma_{Ei-2}$  – Tensão exercida pela escora i no nó 2

$F_{Ei-2}$  – Força exercida pela escora i no nó 2

Verificação da armadura do tirante:

$$P_s = 0,53 * P_y = 0,53 * A_{ps} * f_y = 0,53 * 9,82 * 39,6$$

$$P_s = 206,10 \text{ kN}$$

$$F_E * \cos(37,78) - P_s = T_{m\acute{a}x}$$

$$436,65 * \cos(37,78) - 206,10 = T_{m\acute{a}x}$$

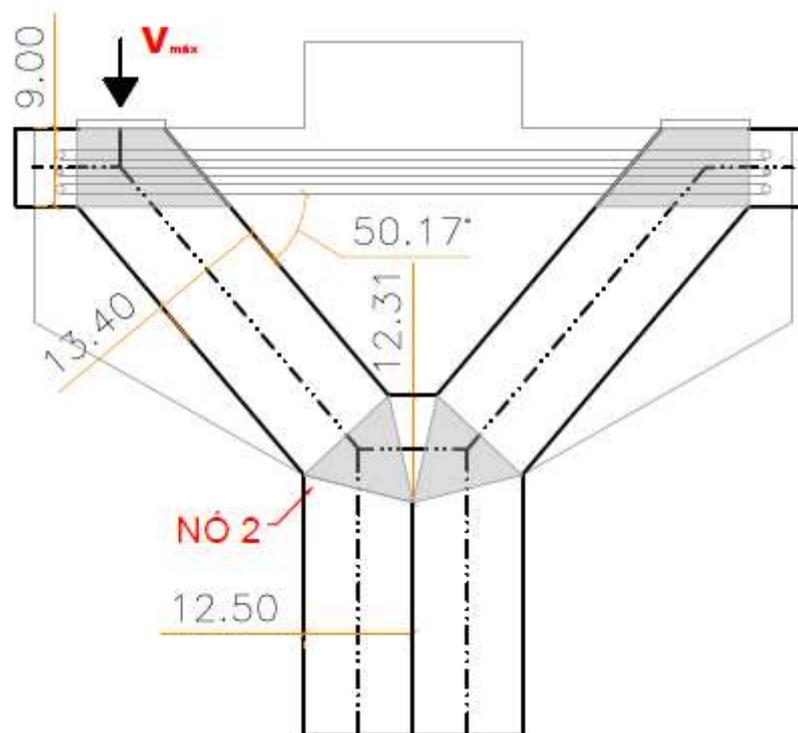
$$T_{m\acute{a}x} = 139,01 \text{ kN}$$

$$\sigma_T = \frac{139,01}{7,536} = 18,446 = 184,46 \text{ MPa}$$

$$\sigma_T \leq f_y \therefore 184,46 \text{ MPa} < 493 \text{ e } 483 \text{ MPa} - \text{OK!}$$

A capacidade de carga do consolo WI-2-S a partir do modelo de escoras e tirantes proposto foi de 267,51 kN.

## 10.2.2 CONSOLO WII-2



**Figura 105 - Modelo de bielas proposto para o consolo WII-2**

A partir dos cálculos realizados para o consolo WII-2, já sabemos que o elemento que está governando a resistência do consolo é a escora de compressão, porém devido a consideração de um tirante externo ancorado em placa de protensão, vamos recalcular esses valores considerando a nova largura da escora de compressão.

Determinação do carregamento máximo de acordo com a resistência da escora inclinada (NBR 6118:2014):

$$\sigma_E = \frac{F_{E_{m\acute{a}x}}}{A} = 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{E_{m\acute{a}x}} = 1,649 * 13,45 * 20 = 443,58 \text{ kN}$$

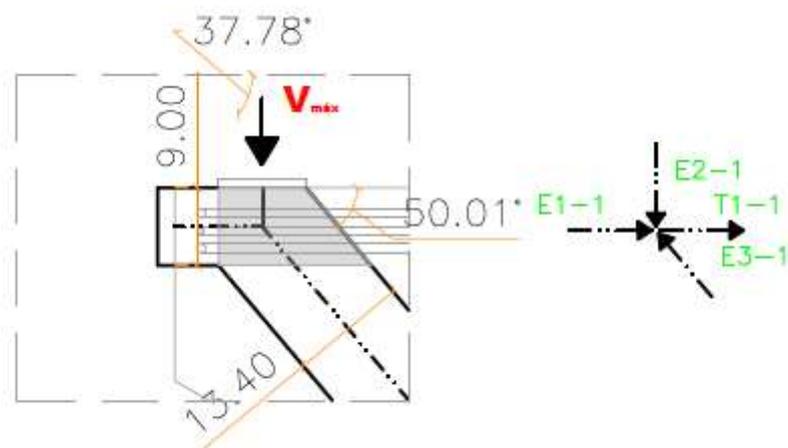
$$V = F_{E_{m\acute{a}x}} * \text{sen}(50,01)$$

$$V = 339,85 \text{ kN}$$

Após a determinação do carregamento máximo que a escora inclinada é capaz de resistir ( $V_{max} = 339,85 \text{ kN}$ ), foram verificados os nós 1 e 2 do modelo de escoras e tirantes proposto.

Para um melhor entendimento as Figuras 106 e 107 apresentam os nós 1 e 2 e seus esquemas de equilíbrio de forças.

Verificação do nó 1:



**Figura 106 - Nó 1 (WII-2)**

$$\sigma_{E1-1} \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E1-1} = \frac{F_{E1-1}}{A_{E1-1}} = \frac{206,1}{20 * 9} = 1,145 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E1-1} = 1,145 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

$$\sigma_{E2-1} \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E2-1} = \frac{F_{E2-1}}{A_{E2-1}} = \frac{339,85}{20 * 10} = 1,699 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E2-1} = 1,699 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2 - \text{ERRO!}$$

$$\sigma_{E3-1} \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E3-1} = 1,649 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,649 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

em que:  $\sigma_{Ei-1}$  – Tensão exercida pela escora i no nó 1

$F_{Ei-1}$  – Força exercida pela escora i no nó 1

A tensão no nó 1 gerada pela escora de compressão 2 ficou acima do valor de  $1,649 \text{ kN/cm}^2$ , o que implica em calcular uma nova capacidade de carga que atenda esta tensão, porém Schlaich e Schafer (1991) sugerem para alguns nós típicos outros valores de

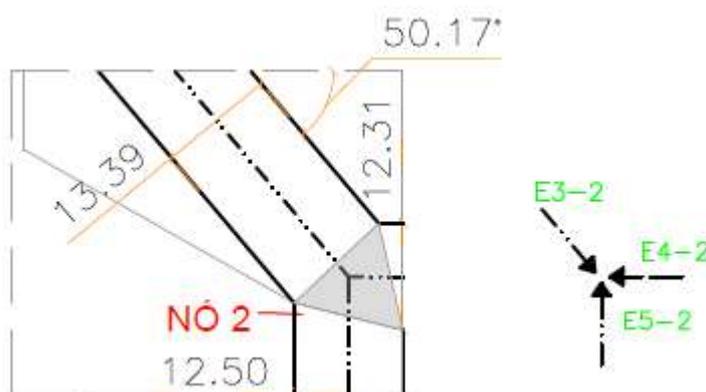
tensões máximas, e entre eles está o nó 1, onde determinam que a tensão exercida pela placa de carregamento não deve exceder o valor de  $f_{ck}$ , assim verificando novamente a tensão exercida pela escora E2 no nó 1, tem-se:

$$\sigma_{E2-1} \leq f_{ck}$$

$$\sigma_{E2-1} = \frac{F_{E2-1}}{A_{E2-1}} = \frac{339,85}{20 * 10} = 1,699 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E2-1} = 1,699 \text{ kN/cm}^2 \leq 2,55 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

Verificação do nó 2:



**Figura 107 – Nó 2 (WII-2)**

$$\sigma_{E5-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{E5-2} = F_{E3-2} * \text{sen}(50,17) = 443,58 * \text{sen}(50,17)$$

$$F_{E5-2} = 340,65 \text{ kN}$$

$$\sigma_{E5-2} = \frac{340,65}{12,5 * 20} = 1,363 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E5-2} = 1,363 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

$$\sigma_{E3-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{E3-2} = 443,58 \text{ kN}$$

$$\sigma_{E3-2} = \frac{F_{E3-2}}{A_{E3-2}} = \frac{443,58}{13,39 * 20} = 1,656 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E3-2} = 1,656 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

$$\sigma_{E4-2} \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{E4-2} = F_{E3-2} * \cos(50,17) = 443,58 * \cos(50,17)$$

$$F_{E4-2} = 284,118 \text{ kN}$$

$$\sigma_{E4-2} = \frac{284,118}{12,31 * 20} = 1,154 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{E4-2} = 1,154 \text{ kN/cm}^2 \leq 1,946 \text{ kN/cm}^2 - \text{OK!}$$

em que:  $\sigma_{Ei-2}$  – Tensão exercida pela escora i no nó 2

$F_{Ei-2}$  – Força exercida pela escora i no nó 2

Verificação da armadura do tirante:

$$P_s = 0,53 * P_y = 0,53 * A_{ps} * f_y = 0,53 * 9,82 * 39,6$$

$$P_s = 206,10 \text{ kN}$$

$$F_{E_{m\acute{a}x}} * \cos(50,17) - P_s = T_{m\acute{a}x}$$

$$443,58 * \cos(50,17) - 206,10 = T_{m\acute{a}x}$$

$$T_{m\acute{a}x} = 78,02 \text{ kN}$$

$$\sigma_T = \frac{78,02}{7,536} = 10,35 = 103,53 \text{ MPa}$$

$$\sigma_T \leq f_y \quad \therefore 103,53 \text{ MPa} < 493 \text{ e } 483 \text{ MPa} - \text{OK!}$$

A capacidade de carga do consolo WII-2 a partir do modelo de escoras e tirantes proposto foi de 339,85 kN.

### 10.3 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS COM DADOS EXPERIMENTAIS

A Tabela 16 apresenta o valor da capacidade de carga para os consolos WI-4 e WI-2, WII-4 e WII-2, a partir dos resultados obtidos neste trabalho e os resultados apresentados por NAGRODZKA-GODYCKA (1999).

**Tabela 15 – Capacidade de carga por diversos métodos**

Cons.	Exp.	Atena	Nbr 6118
WI-4	250 kN	245 kN (-2%)	183 kN (-27)
WI-2	350 kN	305 kN (-13%)	268 kN (-23%)
WII-4	475 kN	360 kN (-24%)	272 kN (-43%)
WII-2	525 kN	460 kN (-12%)	340 kN (-35%)

Nota: NAGRODZKA-GODYCKA (N.G.); Experimental (Exp.).

Fonte: Adaptado de NAGRODZKA-GODYCKA (1999).

Analisando a Tabela 15 observa-se que os valores de capacidade de carga obtidos através de diversos métodos, divergem entre si, ressaltando a importância de se utilizar o método adequado para cada situação, reconhecendo que cada método possui as suas particularidades e limitações.

Comparando a capacidade de carga obtida de acordo com NBR 6118:2014, com os valores experimentais, constata-se que a NBR 6118:2014 conduziu a valores entre 27 e 43 % menores do que os experimentais, o que pode indicar um certo conservadorismo da NBR 6118:2014 em seu modelo proposto e parâmetros de resistência, porém analisando estes resultados a partir do olhar da segurança dos dimensionamentos, pode-se afirmar que a norma conduziu a resultados satisfatórios.

Em relação as tensões nas armaduras e barras externas a Tabela 16 apresenta uma comparação de valores.

**Tabela 16 – Comparação da tensões na armadura no momento da ruptura dos consolos**

Cons.	Exp.		Atena		NBR 6118	
	10 mm	25 mm	10 mm	25 mm	10 mm	25 mm
WI-4	-	-	356,7 Mpa		298 MPa	-
WI-2	300 MPa	271 MPa	86,51 MPa	264,6 MPa	184,46 MPa	206 MPa
WII-4	-	-	353,4		295 MPa	-
WII-2	305 MPa	290 MPa	89,47 MPa	279,3 MPa	103,53 MPa	206 MPa

Um ponto que pode ser observado e indicado como uma falha do modelo de escoras e tirantes proposto para os consolos WI-2 e WII-2, é a determinação das tensões nas barras externas, pois, no consolo estudado a protensão das barras externas é realizada com o consolo descarregado, e com a aplicação da carga  $V$  no mesmo, as tensões nas barras externas crescem devido a reação do concreto sobre a placa de ancoragem, fato este, que o modelo de treliça adotado não considera. Se observamos as Figuras 103 e 106, veremos que para o cálculo do nó 1, a força advinda das barras externas é representada como uma escora por de trás do nó, como se fosse um apoio indeslocável, o que, por sua vez não representa a realidade, visto que a placa de ancoragem se desloca para trás em razão do carregamento e deformação das barras.

## 11 CONCLUSÃO

O reforço de consolos através da instalação de barras externas pós tensionadas, se trata de uma técnica viável e eficaz, capaz de aumentar a capacidade de carga de consolos que romperiam por falência da escora de compressão, e diminuir as suas fissurações.

A análise não-linear dos consolos WI-4, WI-2, WII-4 e WII-2 demonstrou que o desenvolvimento das tensões nos consolos curtos, pode ser descrito por uma escora de compressão e um tirante, mesmo para os consolos que receberam barras externas protendidas. A análise dos consolos WI-2 e WII-2 demonstrou que para pequenos carregamentos as principais tensões de compressão se encontram na região abaixo da placa de ancoragem do tirante, mas que com o aumento do carregamento, fluem para a escora de compressão, sendo o ponto de maior de tensão nos consolos, próximo ao encontro da base do consolo com o pilar. A comparação das tensões principais de compressão entre os consolos WI-4 e WI-2, e WII-4 e WII-2, demonstrou que para um mesmo carregamento os consolos protendidos desenvolveram tensões menores do que os consolos sem protensão.

A fissuração dos consolos é altamente influenciada pela protensão externa, enquanto para os consolos WI-4 e as maiores fissuras ocorreram no ponto de encontro da face superior do consolo com o pilar, nos consolos WI-2 e WII-2, estas ocorreram na região da escora comprimida. Em relação a abertura das fissuras, a protensão, conduziu a aberturas por volta de 10 vezes menores para o consolo protendido, submetido a um mesmo carregamento.

O gráfico das tensões nas armaduras pela carga aplicada no consolo, demonstrou que as tensões se desenvolveram de forma quase linear em relação ao carregamento, mas ultrapassaram as tensões de escoamento por volta dos 3 últimos passos de carga devido a grande a deformação do concreto no momento de ruína.

Assim conclui-se que a ferramenta computacional ATENA, é capaz de determinar com boa precisão o comportamento dos consolos normalmente armados, como dos consolos reforçados com barras de protensão externas. A comparação das saídas do programa com os dados experimentais de NAGRODZKA-GODYCKA (1999), conduziu a resultados satisfatórios, entre eles: a determinação da capacidade de carga dos consolos WI-4, WI-2, WII-4 e WII-2 foi 2%, 13%, 24% e 12% divergente; a determinação do mapa de fissuração dos consolos foi adequada, sendo os valores de abertura de fissuras da mesma ordem de grandeza; a determinação das tensões nas barras externas foi adequada, fato que não ocorreu em relação as armaduras do tirante interno para os consolos WI-2 e WII-2.

Em relação ao estudo analítico realizado no trabalho, a determinação da capacidade de carga dos consolos de acordo com a NBR 6118:2014, conduziu a resultados menores do que os experimentais, o que está a favor da segurança, porém ao mesmo tempo pode indicar que o modelo de treliça proposto pela norma seja muito conservador.

A determinação das tensões atuantes nas armaduras (internas e externas) não foi adequada, uma vez que, o modelo não é capaz de mensurar o acréscimo de tensão nas barras externas ocasionado pelo carregamento do consolo.

Como sugestão para trabalhos futuros, indica-se que sejam realizados mais ensaios experimentais, como ensaios de consolos com tirante protendido (sem fissuração inicial), consolos instalados posteriormente com uso de barras de protensão, estudo de consolos muito curtos, estudos a longo prazo, estudos dos efeitos de perda de protensão, estudos analíticos sobre modelos de dimensionamento.

## 12 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, T. G. M. **Reforço de vigas de concreto armado por meio de cabos externos protendidos**. 2001. 201f. Dissertação (Mestre em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318M-14: Building code requirements for structural concrete (ACI 318M-14) and commentary (ACI 318RM-14)**. Michigan, 2015.

ARAÚJO, A. H. M.; GUERRA, E. O.; LIRA, A. F.; REZENDE, A. S. **Cobertura mineirão – solução integrada concreto-aço**. In: CONGRESSO LATINA AMERICANO DA CONSTRUÇÃO METÁLICA, 5, São Paulo, 2012. Disponível em: <<http://www.abcem.org.br/construmetal/2012/contribuicoes-tecnicas.php>>. Acesso em: 04 julh. 2017.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 9062: Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado**. Rio de Janeiro, 2006.

BASTOS, P. S. S. **CONCRETO PROTENDIDO: NOTAS DE AULA**. 2015. Disponível em: <<http://www.feb.unesp.br/pbastos/>>. Acesso em: 23 ago. 2017

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. 2. ed. Massachusetts: Watertown, 2014.

BUTTIGNOL, T. E. T. **Análise computacional de blocos sobre estacas**. 2011. 182f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.

CAMARGOS, U. A. **Patologia nas obras civis (palestra sobre reforço estrutural)**, Instituto IDD, Belo Horizonte, 2013.

CAMPIONE, G.; MINAFÒ, G. Behaviour of concrete deep beams with openings and low shear span-to-depth ratio. **Engineering Structures**, v. 41, p. 294–306, 2012.

CANHA, R. M. F.; KUCHMA, D. A.; DEBS, M. K. E.; SOUZA, R. A. Numerical analysis of reinforced high strength concrete corbels. **Engineering Structures**, v. 74, p. 130–144, 2014.

ČERVENKA, V.; JENDELE, L.; ČERVENKA, J. **ATENA Program Documentation Part 1: Theory**. Prague, 2016.

ČERVENKA, V.; ČERVENKA, J. **ATENA Program Documentation Part 2-1: User's Manual for ATENA 2D**. Prague, 2015.

COMITÉ EUROPÉEN DE NORMALISATION – CEN. **EN 1992-1-1:2004**. Eurocode 2: Design of concrete structures – Part. 1-1: General rules and rules for buildings, [S.I.], 2004.

CONSELHO DE ARQUITETURA E URBANISMO (Brasil). **Pesquisa 2015**. [2015]. Disponível em: <<http://www.caubr.gov.br/pesquisa2015/>>. Acesso em: 29 set. 2017.

COSTA, J. B. A. **Estudo experimental de consolos de concreto com fibras moldados em etapas distintas dos pilares**. 2009. 124f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

DAMASCENO, J. H. L. **Consolos instalados em etapa posterior à concretagem de pilar com auxílio de adesivo químico**. 2016. 127p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016.

FEDERATION INTERNATIONALE DE LA PRÉCONTRAÎNTE. **FIP: Practical design of structural concrete**. London, 1999.

FIGUEIROA, J. P. **Apresentação de um modelo para reabilitação e reforço de bloco de fundação sujeito a RAA**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 52, FORTALEZA, 2010. Disponível em: <<http://www.ibracon.org.br/eventos/52cbc/FIGUEIROA.pdf>>. Acesso em: 04 julh. 2017.

GODYCKA, N. K. Behavior of Corbels with External Prestressing Bars – Experimental Study, **ACI Structural Journal**, V. 96, N.6, p. 1033-1039, 1999.

GOMES, E. A. O. **Recuperação estrutural de blocos de fundação afetados pela reação álcali-agregado – a experiência do Recife**. 2008, 138p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Católica de Pernambuco, Recife, 2008.

GRIBNIAK, V.; CERVENKA, V.; KAKLAUSKAS, G. Deflection prediction of reinforced concrete beams by design codes and computer simulation. **Engineering Structures**, v. 56, p. 2175–2186, 2013.

HAGBERG, T., **Design of Concrete Brackets: On the Application of the Truss analogy**. ACI Journal, 1983.

HANAI, J. B. **Fundamentos do concreto protendido**. São Carlos: Universidade de São Paulo, 2005. Apostila.

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE. **FIB BULLETIN 61**: Design examples for strut-and-tie models. Switzerland, 2011.

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE. **FIB BULLETIN 43**: Structural connections for precast concrete buildings. Switzerland, 2008.

KRIZ, L. B.; RATHS, C. H. Connections in Precast Concrete Structures: Strength of Corbels, **Pci Journal**, [S.I.], p. 16-61, 1965.

LACHOWICZ, M; NAGRODZKA-GODYCKA, K. Experimental study of the post tensioned prestressed concrete corbels. **Engineering Structures**, [s.l.], v. 108, p.1-11, fev. 2016. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.11.007>.

LOURENÇO, P. B.; FIGUEIRAS, J. A. Solution for the Design of Reinforced Concrete Plates and Shells. **Journal of Structural Engineering**, v. 121, n. 5, p. 815–823, 1995.

MACALLOY (Reino Unido). **Macalloy post tensioning system**: macalloy 1030, macalloy s1030. Sheffield: Macalloy, 2017.

QUANTRILL, R. J.; HOLLAWAY, The flexural rehabilitation of reinforced concrete beams by the use of prestressed advanced composite plates. *Composites Science and Technology*, v. 59, p. 1259-1275.

RADES, M. **Finite Elements Analysis**. Bucuresti: Printech, 2006.

RAO, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**. 5. ed. Burlington: Elsevier, 2011.

RECUPERAÇÃO ESTRUTURAL: sistemas, técnicas e materiais para reabilitar estruturas de concreto. sistemas, técnicas e materiais para reabilitar estruturas de concreto. **Téchne**, [S.I.], v. 1, p.1-2, mar. 2004. Edição 84. Disponível em: <<http://techne.pini.com.br/>>. Acesso em: 29 set. 2017.

ROMERO, D. V. S. **Reforço à flexão de vigas de concreto armado por meio de protensão externa**. 2007. 128f. Dissertação (Mestre em ciências em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007

RUDLOFF. **Concreto protendido**: catálogo. Revisão 6. [S.I.], novembro de 2015. Pag. 32.

SAYED-AHMED, E. Y.; SHRIVE, N. G. A new steel Anchorage system for post-tensioning applications using carbono fibre reinforce plastic tendos. *Canadian Journal of Engineering*, [S.I.] v. 25, p. 113-127, 1998.

SCHLAICH, J.; SCHAFER, K. Design and detailing of structural concrete using strut-and-tie models. **The Structural Engineer**, v. 69, n. 6, p. 113-125, 1991.

SCHLAICH, J.; SCHAFER, K.; JENNEWEIN, M. Toward a consistent design of structural concrete. **PCI JOURNAL**, v. 32, n. 3, p. 74-150, 1987.

SILVA, R. C. **Concreto Armado: Aplicações de Modelos de Bielas e Tirantes**, 1991. 202f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

SINGH, B.; SINGH, S. P.; KAUSHIK, S. K. Strength and deformation characteristics of steel fibrous concrete beams. **Journal of Zhejiang University**, v. 8, n. 2, p. 257–263, 2007.

SOUZA, R. A. **Concreto estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades**. 2004. 442f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

SOUZA, R. A. **Análise e Dimensionamento de Elementos de Membrana em Concreto Estrutural**. Maringá, 2012b.

SOUZA, V. C. M.; RIPPER, T. **Patologia, recuperação e reforço de estruturas de concreto**. 1º Ed., São Paulo: Pini, 1998.

TEJEDOR, C. M. **Patologias, recuperação e reforço com protensão externa em estruturas de pontes**. 2013. 139f. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

TODUT, C.; DAN, D.; STOIAN, V. Theoretical and experimental study on precast reinforced concrete wall panels subjected to shear force. **Engineering Structures**, v. 80, p. 323–338, 2014.

TRIANAFILLOU, T. C.; DESKOVIC, N.; DEURING, M. **Strengthening of concrete structures with prestressed fiber reinforced sheets**. *ACI Structural Journal*, v.89, n.3.

TRIANAFILLOU, T. C.; DESKOVIC, N. **Innovative prestressing with FRP sheets: mechanics of short-term behavior**. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 117, n. 7, p. 1652-1672, July, 1991.

URBAN, T; KRAWCZYK, Ł. Strengthening corbels using post-installed threaded rods. **Structural Concrete**, [s.l.], v. 18, n. 2, p.303-315, abr. 2015. Wiley-Blackwell. <http://dx.doi.org/10.1002/suco.201500215>.

VITÓRIO, J. A. P.; BARROS, R. C. **Reforço e alargamento de pontes rodoviárias com a utilização de protensão externa**. 7º Congresso Internacional sobre Patologia e Reabilitação de Estruturas. Fortaleza, 14p. Junho de 2011.