

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

HERALDO BRIGO

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE LAJES LISAS PROTENDIDAS
COM CABOS NÃO ADERENTES SUBMETIDAS À PUNÇÃO**

MARINGÁ
2023

HERALDO BRIGO

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE LAJES LISAS PROTENDIDAS COM
CABOS NÃO ADERENTES SUBMETIDAS À PUNÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Elyson Andrew Pozo Liberati

Coorientadora: Prof^ª. Dra. Marília Gonçalves Marques

MARINGÁ
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

B856a

Brigo, Heraldo

Análise não linear de lajes lisas protendidas com cabos não aderentes submetidas à punção / Heraldo Brigo. -- Maringá, PR, 2023.
157 f.: il. color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Elyson Andrew Pozo Liberati.

Coorientadora: Profa. Dra. Marília Gonçalves Marques.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2023.

1. Estruturas de concreto. 2. Lajes lisas de concreto. 3. Punção em lajes lisas de concreto. 4. Protensão (Engenharia civil). 5. Análise não linear. I. Liberati, Elyson Andrew Pozo, orient. II. Marques, Marília Gonçalves, coorient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. IV. Título.

CDD 23.ed. 624.1834

ANÁLISE NÃO LINEAR DE LAJES LISAS PROTENDIDAS COM CABOS NÃO ADERENTES SUBMETIDAS À PUNÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada no dia 22/03/2023, julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente

 ELYSON ANDREW POZO LIBERATI
Data: 22/03/2023 13:40:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Elyson Andrew Pozo Liberati
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá
Professor Orientador

Documento assinado digitalmente

 MARILIA GONCALVES MARQUES
Data: 22/03/2023 14:22:27-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Marília Gonçalves Marques
Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade Federal de Viçosa - Campus Rio Paranaíba
Professora Coorientadora

Documento assinado digitalmente

 LEANDRO MOUTA TRAUTWEIN
Data: 22/03/2023 18:22:02-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Leandro Mouta Trautwein
Faculdade de Engenharia Civil
Universidade Estadual de Campinas

Documento assinado digitalmente

 LEONARDO HENRIQUE BORGES DE OLIVEIRA
Data: 23/03/2023 08:23:43-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Leonardo Henrique Borges de Oliveira
Departamento de Engenharias e Tecnologia
Universidade Federal Rural do Semi-Árido

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me dar forças e uma vida de saúde e me proporcionar à oportunidade de atingir este sonho.

Aos meus pais, Geraldo Brigo e Fatima Demétrio Brigo, minha eterna gratidão, por toda educação e exemplos de vida que sempre me deram, pois sem eles nada seria possível.

Ao meu orientador, professor Elyson Andrew Pozo Liberati, pelo seu incentivo, orientação, acompanhamento, amizade e por me confiar este trabalho.

À minha coorientadora, Marília Gonçalves Marques, pelas contribuições dadas a esta pesquisa. A conclusão deste trabalho não seria alcançada sem a sua participação e contribuições de grande valor.

A Universidade Estadual de Maringá, que possibilitou, mesmo em período de pandemia, todo meu aprendizado como aluno do PCV.

A Universidade Federal de Viçosa (UFV), campus Rio Paranaíba pela disponibilização dos recursos computacionais e do programa computacional ATENA para a realização das análises numéricas via acesso remoto.

Ao Dr. José Luís Pinheiro Melges, por contribuir com os dados experimentais que tornaram esta pesquisa possível.

Agradeço aos professores que fizeram parte de minha formação acadêmica, e que estiveram sempre prontos a me auxiliar e incentivar durante a minha formação durante todos estes anos transmitindo seus conhecimentos.

Agradeço ao apoio dado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de financiamento 001.

Aos membros da banca examinadora, meus agradecimentos pela colaboração para o aperfeiçoamento do conteúdo desta dissertação.

RESUMO

O sistema de lajes lisas é caracterizado por apresentar as lajes se apoiando rígida e diretamente sobre os pilares. Esse sistema vem se tornando cada vez mais difundida em função da rapidez de execução, redução do pé direito, economia nas fundações e permitir *layouts* mais flexíveis. Um dos fatores contribuintes para sua maior difusão é a aplicação da protensão, que permite adotar vãos maiores, em conjunto com um melhor controle da fissuração e dos deslocamentos em condições de serviço. Tendo em vista o emprego de ferramentas computacionais baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF) capaz de auxiliar na investigação de problemas estruturais por meio de simulações numéricas, este trabalho teve por objetivo pesquisar a influência da protensão na resistência à punção. Com o uso do programa computacional *ATENA*, para simular ensaios experimentais, por meio de análises tridimensionais não lineares, de forma a validar os modelos constitutivos adotados para os materiais, ações atuantes e condições de contorno. Os resultados numéricos obtidos para as curvas de carga *versus* deslocamento, carga *versus* deformação, propagação de fissuras e superfície de ruptura foram confrontados com os resultados experimentais de Melges (2001). Analisando os resultados, concluiu-se que o modelo numérico conseguiu representar corretamente a ruptura por punção. Os índices revelaram, ainda, uma diferença na capacidade de carga inferior a 2% para os modelos experimentais. Com os resultados obtidos a partir dos modelos calibrados, realizou-se um estudo paramétrico que incluiu a simulação de 25 novos modelos com protensão submetidas à punção, variando o espaçamento entre os cabos, a espessura da laje e a retangularidade do pilar. Os resultados obtidos foram comparados com as recomendações do ACI 318 (2019), do Eurocode 2 (2004), da NBR 6118 (2014) e do *fib* Model Code (2010). Ademais, os elementos que compõem as análises numéricas conseguiram representar a ruptura por punção em conjunto com as diferentes características de cada modelo. Por fim, pode-se concluir que os resultados apresentados neste trabalho poderão auxiliar em futuros estudos experimentais e numéricos, além de contribuir para melhorias nos códigos normativos para um melhor entendimento do fenômeno da punção em lajes lisas protendidas.

Palavras-chave: punção; lajes lisas; concreto protendido; análise não linear.

ABSTRACT

The flat slab system is characterized by having the slabs resting rigidly and directly on the columns. This system has become increasingly widespread due to the speed of execution, reduction in the height of the height, savings in foundations and allowing for more flexible layouts. One of the factors that has contributed to its greater diffusion is the application of prestressing, which has allowed the adoption of larger spans, together with better control of cracking and displacements in service conditions. Considering the use of computational tools based on the Finite Element Method (FEM) capable of assisting in the investigation of structural problems through numerical simulations, this work aimed to investigate the influence of prestressing on punching resistance. Using the computer program ATENA, to simulate experimental tests, through non-linear three-dimensional analyses, in order to validate the constitutive models adopted for the materials, acting actions and boundary conditions. The numerical results obtained for the curves of load versus displacement, load versus deformation, crack propagation and failure surface curves were confronted with the experimental results of Melges (2001). Analyzing the results, it was concluded that the numerical model was able to correctly represent punching rupture. The indices also revealed a difference in load capacity of less than 2% for the experimental models. With the results obtained from the calibrated models, a parametric study which included the simulation of 25 new prestressed models subjected to punching, varying the spacing between the cables, the thickness of the slab and the rectangularity of the column. Then results obtained were compared with the recommendations of ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2004), NBR 6118 (2014) and *fib* Model Code (2010). Furthermore, the elements that integrate the numerical analysis were able to represent the punching failure together with the different characteristics of each model. Finally, it can be concluded that the results presented in this work may help in future experimental and numerical studies, in addition to contributing to improvements in normative codes for a better understanding of the punching phenomenon in prestressed flat slabs.

Keywords: punching; flat slabs; prestressed concrete; non-linear analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Tipos de lajes empregadas em edificações.....	15
Figura 1.2 – Ruptura por punção em ligações laje-pilar.....	16
Figura 1.3 – Ruptura por punção Shopping Rio Poty	17
Figura 2.1 – Esquema de ruína por punção em laje lisa sem armadura de cisalhamento.....	21
Figura 2.2 – Possíveis modos de falha	22
Figura 2.3 – Laje cogumelo.....	23
Figura 2.4 – Fenômeno de punção e tipos de pilares.....	24
Figura 2.5 – Contribuição da taxa de armadura para a robustez da estrutura.....	26
Figura 2.6 – Exemplos de sistemas de armaduras transversal.....	28
Figura 2.7 – Arranjos de armadura de punção.....	29
Figura 2.8 – Exemplos de fibras empregadas no concreto	30
Figura 2.9 – Forças atuantes em lajes protendidas	31
Figura 2.10 – Mecanismo de descompressão proposto por Regan (1985).....	34
Figura 2.11 – Distribuição de cabos utilizadas nos ensaios	35
Figura 2.12 – Características dos modelos de Melges (2001) sem armadura de punção	36
Figura 2.13 – Espaçamento em planta das lajes de Ramos (2003).....	37
Figura 2.14 – Curvatura em planta de três lajes ensaiadas por Barbán (2003)	38
Figura 2.15 – Vista lateral do modelo de Honorato (2008) com medidas em milímetros	42
Figura 2.16 – Modelo de ensaio realizado por Clément (2014)	44
Figura 2.17 – Perímetro crítico b_0	46
Figura 2.18 – Perímetros de controle típicos em torno de áreas carregadas	47
Figura 2.19 – Perímetro crítico em pilares internos	50
Figura 2.20 – Efeito dos cabos inclinados.....	52
Figura 2.21 – Perímetro de controle	53
Figura 2.22 – Diferença entre alturas úteis d e d_v	53
Figura 2.23 – Rotação da laje e abertura de fissuras	54
Figura 3.1 – Geometria de elementos quadriláteros planos.....	66
Figura 3.2 – Elementos 3D.....	66
Figura 3.3 – Diagrama tensão x deformação para lei uniaxial de tensões do concreto.....	68
Figura 3.4 – Lei exponencial de abertura de fissura.....	70
Figura 3.5 – Diagrama tensão <i>versus</i> deformação na compressão	71

Figura 3.6 – Curva tensão efetiva <i>versus</i> deslocamento na compressão	72
Figura 3.7 – Definição das faixas de localização	73
Figura 3.8 – Estágios da abertura de fissura	75
Figura 3.9 – Modelo de fissura fixa (estado de tensão e deformação)	76
Figura 3.10 – Modelo de fissuração rotacionada (estado de tensão e deformação)	77
Figura 3.11 – Redução da força de compressão no concreto fissurado	77
Figura 3.12 – Fator <i>Tension Stiffening</i>	78
Figura 3.13 – Representação da armadura.....	79
Figura 3.14 – Elemento de barra	80
Figura 3.15 – Modelo de cabo externo	80
Figura 3.16 – Forças no desviador	81
Figura 3.17 – Forças e deslocamentos no elemento do cabo (seção do cabo)	82
Figura 3.18 – Lei bilinear tensão x deformação para armaduras de reforço	83
Figura 3.19 – Lei multilinear tensão x deformação para reforço	83
Figura 3.20 – Parâmetros de armadura distribuída.....	84
Figura 3.21 – Modelo de aderência de acordo com CEB-FIP Model Code 90.....	85
Figura 3.22 – Método de Newton-Raphson	86
Figura 3.23 – Método de Newton-Raphson Modificado.....	86
Figura 3.24 – Método <i>Arc-Lenght</i>	87
Figura 4.1 – Esquema utilizado para o ensaio das lajes	90
Figura 4.2 – Modelo numérico M1 e condições de contorno	91
Figura 4.3 – Etapas para calibração do modelo.....	91
Figura 4.4 – Comparação e distribuição dos elementos utilizados nas malhas de acordo	93
Figura 4.5 – Parâmetros do Material	94
Figura 4.6 – Métodos interativos de soluções numéricas.....	95
Figura 4.7 – Curvas carga <i>versus</i> deslocamento obtido no estudo das malhas e elementos	97
Figura 4.8 – Curvas cargas <i>versus</i> deslocamento obtidas no estudo dos parâmetros do concreto	100
Figura 4.9 – Parâmetros de solução.....	101
Figura 4.10 – Comparação dos resultados numérico e experimental do modelo M1	103
Figura 4.11 – Panorama de fissuração na superfície e espessura do modelo M1.....	104
Figura 4.12 – Traçado dos cabos utilizados na laje M4	106
Figura 4.13 - Modelo numérico M4 e condições de contorno	107

Figura 4.14 – Curvas carga <i>versus</i> deslocamento obtidas no estudo do <i>Tension Stiffening</i> .	108
Figura 4.15 – Curvas carga <i>versus</i> deslocamento obtidas no estudo da força de protensão ..	109
Figura 4.16 – Comparação dos resultados numéricos e experimental do modelo M4.....	111
Figura 4.17 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo M4.....	113
Figura 5.1 – Configuração da distribuição dos cabos em planta da Série A.....	115
Figura 5.2 – Configurações da espessura nos modelos da Série E.....	116
Figura 5.3 – Configurações das dimensões dos pilares nos modelos da Série P.....	117
Figura 5.4 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento da série A e respectivos valores máximos	118
Figura 5.5 – Curva carga <i>versus</i> deformação do concreto da série A e valores máximos.....	118
Figura 5.6 – Curva carga <i>versus</i> deformação na armadura tracionada a) e comprimida b) da série A.....	119
Figura 5.7 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo A-5	121
Figura 5.8 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo A-15	122
Figura 5.9 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo A-20	123
Figura 5.10 – Curva carga <i>versus</i> deformação do concreto a) na armadura tracionada b) e comprimida c) da série E.....	125
Figura 5.11 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo E-18	128
Figura 5.12 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo E-22	129
Figura 5.13 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo E-30	130
Figura 5.14 – Curva carga <i>versus</i> deslocamento da série P.....	131
Figura 5.15 – Curva carga <i>versus</i> deformação do concreto da série A e valores máximos ...	133
Figura 5.16 – Curva carga <i>versus</i> deformação na armadura tracionada a) e comprimida b) da série P.....	133
Figura 5.17 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo P-20	136
Figura 5.18 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo P-50	137
Figura 5.19 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo P-90	138
Figura 5.20 – Comparação entre as cargas de ruptura numéricos e teóricos, série A.....	142
Figura 5.21 – Comparação entre as cagas de ruptura numéricos e teóricos, série E.....	144
Figura 5.22 – Comparação entre as cargas de ruptura numéricos e teóricos, série P.....	146

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Variáveis das lajes ensaiadas por Silva (2005).....	39
Tabela 2.2 – Resumo das capacidades máximas de cada código normativo.....	57
Tabela 3.1 – Fórmulas padrão para os parâmetros do material	67
Tabela 4.1 – Ensaio experimentais utilizados.....	89
Tabela 4.2 – Propriedades mecânicas dos materiais modelo M1	89
Tabela 4.3 – Refinamento da malha	92
Tabela 4.4 – Estudo do número de etapas que serão geradas durante o intervalo.....	94
Tabela 4.5 – Propriedades iniciais assumidas na modelagem da laje M1	95
Tabela 4.6 – Comparação dos resultados obtidos para as malhas testadas	96
Tabela 4.7 – Resultados para o número de <i>steps</i>	98
Tabela 4.8 – Número de interações requeridas.....	101
Tabela 4.9 – Propriedades mecânicas dos materiais modelo M4	105
Tabela 4.10 – Força de protensão nas cordoalhas dispostas na direção <i>x</i> (kN).....	107
Tabela 4.11 – Força de protensão nas cordoalhas dispostas na direção <i>y</i> (kN).....	107
Tabela 4.12 – Comparação da força de protensão das cordoalhas na ruptura.....	109
Tabela 5.1 – Refinamento da malha da série E	116
Tabela 5.2 – Comparação da força de protensão das cordoalhas na ruptura da série A.....	119
Tabela 5.3 – Comparação da carga e deslocamento na ruptura dos modelos da série E.....	124
Tabela 5.4 – Comparação da força de protensão das cordoalhas na ruptura da série E	126
Tabela 5.5 – Valores máximos para carga e deslocamento da série P	132
Tabela 5.6 – Comparação das forças de protensão nas cordoalhas na ruptura da série P	134
Tabela 5.7 – Estimativa da carga de ruptura por meio dos códigos de projeto, série A.....	141
Tabela 5.8 – Comparação entre as cargas de ruptura numéricos e teóricos, série A.....	142
Tabela 5.9 – Estimativa da carga de ruptura por meio dos códigos de projeto, série E	143
Tabela 5.10 – Comparação entre as cargas de ruptura numéricos e teóricos, série E	144
Tabela 5.11 – Estimativa da carga de ruptura por meio dos códigos de projeto, série P	146
Tabela 5.12 – Comparação entre as cargas de ruptura numéricos e teóricos, série P	147

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
1.1 JUSTIFICATIVA	17
1.2 OBJETIVOS	18
1.2.1 Objetivo Geral	18
1.2.2 Objetivos Específicos	18
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
2.1 ASPECTOS GERAIS	20
2.2 MODOS DE FALHA	21
2.3 PARÂMETROS QUE INFLUENCIAM A RESISTÊNCIA À PUNÇÃO	22
2.3.1 Altura útil da laje	23
2.3.2 Efeito de tamanho (<i>size effect</i>)	23
2.3.3 Dimensões, formato e tamanho do pilar	24
2.3.4 Resistência do concreto	25
2.3.5 Taxa de armadura de flexão	25
2.3.6 Armadura de punção	27
2.3.7 Fibras	29
2.3.8 Protensão	30
2.4 PESQUISAS RELACIONADAS	31
2.5 RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS	45
2.5.1 ACI 318 (2019)	45
2.5.2 Eurocode 2 (2004)	47
2.5.3 NBR 6118 (2014)	49
2.5.4 <i>fib</i> Model Code (2010)	52
2.5.5 Resumo dos códigos normativos	57
3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO À ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS EM CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO	58
3.1 ANÁLISE NÃO LINEAR NO <i>ATENA</i>	61
3.1.1 Considerações gerais	64
3.2 MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO.....	65
3.2.1 Representação do modelo para o concreto	65
3.2.2 Parâmetros do modelo constitutivo	66

3.2.3	Relações tensão <i>versus</i> deformação para o concreto.....	67
3.2.3.1	Concreto não fissurado.....	69
3.2.3.2	Concreto fissurado	69
3.2.3.3	Compressão anterior ao esmagamento do concreto	71
3.2.3.4	Compressão após o esmagamento do concreto	72
3.2.4	Controle das deformações localizadas na ruptura	73
3.2.4.1	Efeito do tamanho do elemento “Element Size Effect”	74
3.2.4.2	Efeito da orientação do elemento.....	74
3.2.5	Processo de formação de fissuras.....	74
3.2.6	Modelos de fissuração distribuída	75
3.2.6.1	Modelo de fissuração fixa	76
3.2.6.2	Modelo de fissuração rotacionada.....	76
3.2.7	Resistência à compressão do concreto fissurado	77
3.2.8	Enrijecimento da tração no concreto fissurado.....	78
3.3	MODELO CONSTITUTIVO DO AÇO.....	79
3.3.1	Representação do modelo para barras.....	79
3.3.2	Representação de elementos especiais do tipo cabo	80
3.3.3	Relações constitutivas do aço	82
3.3.3.1	Lei bilinear	83
3.3.3.2	Lei multilinear.....	83
3.3.4	Aderência entre o aço e o concreto	84
3.4	MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA EQUAÇÕES NÃO LINEARES	85
3.4.1	Método iterativo de Newton-Raphson	85
3.4.2	Método iterativo de Newton-Raphson Modificado.....	86
3.4.3	Método <i>Arc-Length</i>	87
4	SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ENSAIOS EXPERIMENTAIS.....	88
4.1	LAJE LISA DE CONCRETO ARMADO COM RUPTURA POR PUNÇÃO	89
4.1.1	Laje M1 (Melges 2001).....	89
4.1.1.1	Modelagem numérica.....	90
4.1.1.2	Resultados da análise numérica de refinamento da malha.....	95
4.1.1.3	Resultados relacionados ao número de steps	98
4.1.1.4	Resultados relacionados aos parâmetros do concreto	99
4.1.1.5	Resultados relacionados aos parâmetros de convergência.....	100

4.1.1.6	Comparação dos resultados.....	102
4.2	LAJE LISA DE CONCRETO PROTENDIDO COM RUPTURA POR PUNÇÃO...	105
4.2.1	Laje M4 (Melges 2001).....	105
4.2.1.1	Modelagem numérica.....	107
4.2.1.2	Resultados da análise numérica desconsiderando o Tension Stiffening.....	108
4.2.1.3	Resultados relacionados à protensão.....	109
4.2.1.4	Comparação dos resultados.....	109
5	ESTUDO PARAMÉTRICO.....	114
5.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	114
5.2	DESCRIÇÃO DOS MODELOS PROPOSTOS.....	114
5.3	APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS.....	117
5.3.1	Resultados obtidos nos modelos da série A.....	117
5.3.1.1	Panorama de fissuração da série A.....	120
5.3.2	Resultados obtidos nos modelos da série E.....	124
5.3.2.1	Panorama de fissuração da série E.....	126
5.3.3	Resultados obtidos nos modelos da série P.....	131
5.3.3.1	Panorama de fissuração da série P.....	134
5.4	COMPARAÇÃO NORMATIVA.....	139
5.4.1	Considerações iniciais.....	139
5.4.2	Comparação dos resultados.....	141
5.4.2.1	Resultados obtidos para a série A.....	141
5.4.2.2	Resultados obtidos para a série E.....	143
5.4.2.3	Resultados obtidos para a série P.....	145
6	CONCLUSÕES.....	149
6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	151
7	REFERÊNCIAS.....	153

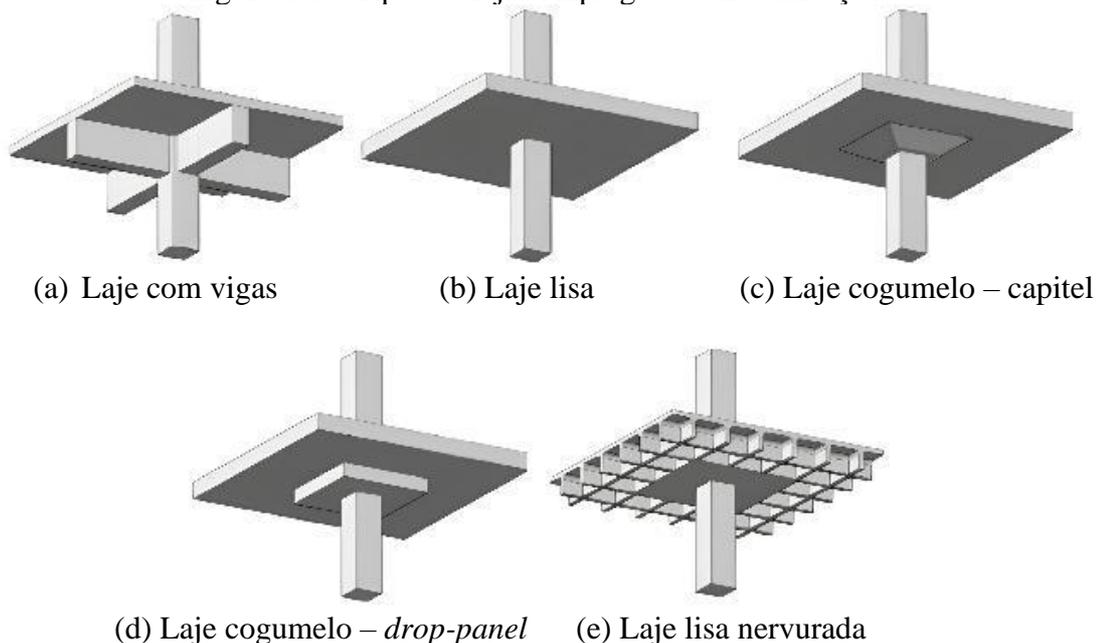
1 INTRODUÇÃO

Nos sistemas estruturais convencionais, as lajes correspondem aos elementos responsáveis por transferir o peso próprio dos pavimentos em conjunto com as ações decorrentes do uso da estrutura, que são transferidas para as vigas, pilares e fundação, e este conjunto estrutural depende das dimensões de seus elementos e das condições de apoio em seu contorno.

Apesar do sistema tradicional mais difundido tratar as lajes como peças apoiadas em vigas, ao longo do tempo, surgiram alternativas capazes de substituir este sistema de vinculação, dentre as quais se destacam a laje lisa, a laje com capitel, a laje com *drop-panel* e a laje lisa nervurada conforme as ilustrações apresentadas na Figura 1.1.

As lajes lisas se caracterizam por estarem apoiadas sobre os pilares, e estes transferindo o carregamento diretamente para a fundação. Este sistema se tornou uma alternativa construtiva muito difundida no Brasil em função da rapidez de execução, redução do pé direito, *layouts* mais flexíveis, além da possibilidade de simplificação das formas e da promoção de estruturas mais leves, o que, conseqüentemente, proporciona fundações mais econômicas.

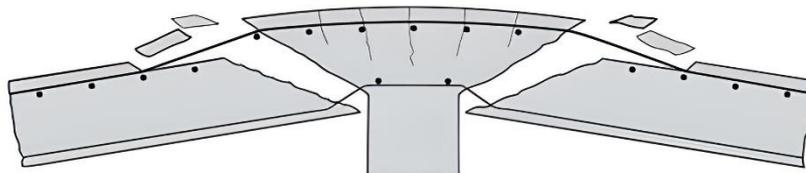
Figura 1.1 – Tipos de lajes empregadas em edificações



Fonte: Santos *et al.* (2014).

No entanto, o contato direto do pilar com a laje propicia a mobilização de elevadas tensões de cisalhamento, o que, muitas vezes, pode inviabilizar a adoção dessa solução. Tomando esse contexto, de acordo com Melges (1995), tem-se que “o fenômeno da punção de uma placa é basicamente a sua perfuração devida às altas tensões de cisalhamento, provocadas por forças concentradas ou agindo em pequenas áreas”, efeito esse que se caracteriza por uma ruptura frágil na ligação entre a laje e o pilar (Figura 1.2).

Figura 1.2 – Ruptura por punção em ligações laje-pilar.



Fonte: Muttoni e Ruiz (2008).

A resistência à punção pode ser melhorada de diversas formas, tais como: aumento das dimensões do pilar, fazendo uso de capiteis; aumento da espessura da laje, com o uso de *drop-panels* ou, ainda, utilização de armaduras de cisalhamento.

Uma alternativa para melhorar a resistência à punção sem alterar a espessura da laje ou empregar armaduras contra o cisalhamento, consiste no uso de sistemas protendidos. De acordo com Schmid (2009), a utilização do concreto protendido tem sido largamente empregada nas grandes estruturas em função de sua flexibilidade e de sua capacidade de ser aplicada em vãos livres de dimensões maiores que as convencionais, bem como em elementos com menor espessura.

As instruções normativas de maior expressividade apresentam diferentes abordagens e critérios para o dimensionamento e o detalhamento de armaduras de protensão, bem como para a relação da força de tração nos cabos com a resistência ao cisalhamento no contato laje-pilar.

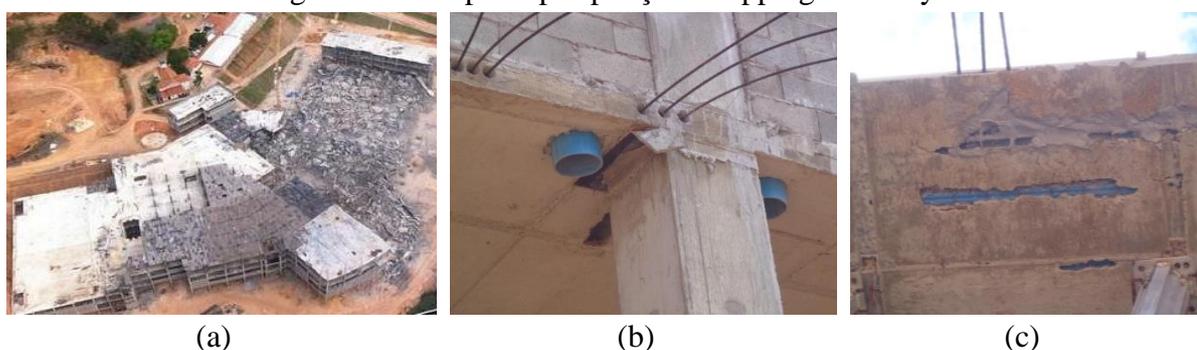
Portanto, esta pesquisa tem por objetivo realizar uma análise numérica do efeito da punção em lajes lisas de concreto protendidas com cordoalhas não aderentes. Para tanto, serão comparados modelos numéricos com variações no espaçamento entre os cabos de protensão, espessura da laje e dimensões dos pilares com as recomendações que constam no ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2004), NBR 6118 (2014) e *fip* Model Code (2010).

1.1 JUSTIFICATIVA

Tratando-se de ruínas por punção, observa-se que elas podem ocorrer devido a uma série de fatores, dentre eles: erros de execução, uso de materiais não especificado, posicionamento não previsto de armaduras e cabos de protensão; erros de projeto, falta ou insuficiência de armadura contra o cisalhamento, falta ou posicionamento inadequado dos cabos de protensão. Um exemplo de acidente ocasionado por este fenômeno foi o desabamento parcial da obra do Shopping Rio Poty (Figura 1.3), em Teresina/PI, em julho de 2013, sem vítimas fatais. De acordo com o Relatório Técnico elaborado pelo CREA-PI (2013), a área da parte colapsada tinha cerca de 40.000 m², Figura 1.3a.

O documento relata a presença de aberturas próximos aos pilares, o que fomenta a necessidade de uma análise mais detalhada em relação não somente à distribuição de tensões, mas também quanto ao posicionamento e à continuidade das armaduras, fatores esses que comprometem a resistência à punção. Observou-se também, no referido relatório, que a armadura de punção estava em uma posição desfavorável, prejudicando sua eficiência. Também foi verificado o desvio do eixo das cordoalhas de protensão na região de ligação laje/pilar em uma faixa central de pilares, além da existência de emendas dos cabos por traspasse sobre alguns pilares. Na Figura 1.3c também é notado cobrimentos insuficientes de armaduras com detalhe de cabos de protensão expostos.

Figura 1.3 – Ruptura por punção Shopping Rio Poty



Fonte: CREA-PI (2013).

Tendo em vista a necessidade de elaboração de projetos detalhados, nas últimas décadas, a tecnologia para o dimensionamento de estruturas tem avançado significativamente. Com computadores e *softwares* cada vez mais desenvolvidos, as análises numéricas de elementos finitos atingem a resultados cada vez mais próximos aos seus respectivos ensaios experimentais.

Esse tipo de análise, em particular para o estudo da punção, é de grande utilidade, tendo em vista que a realização de ensaios experimentais de lajes está frequentemente atrelada ao alto custo, além da dificuldade envolvida em sua execução, em especial no caso das lajes protendidas.

Ainda que haja um aumento de pesquisas voltadas ao tópico da modelagem da punção em lajes lisas, nota-se um número mais reduzido de estudos se aprofundando em simulações sujeitas a diferentes características de concepção que envolvem este exemplo de ruptura em específico com o acréscimo de protensão, o que acaba dificultando a compreensão deste assunto. Com a maior complexidade envolvendo a representação dos cabos de protensão em sistemas numéricos. Dessa forma, faz-se necessário estudar caminhos que possibilitem a verificação da ruptura em lajes lisas protendidas submetidas a punção, para que ocorra, assim, a melhor representação dos cabos de protensão nesse sistema estrutural.

Mediante o exposto, é importante avaliar os critérios e as recomendações estabelecidas nas normas e códigos de projeto ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2004), NBR 6118 (2014) e *fip* Model Code (2010). Para tanto, é necessário fazer uma comparação entre os resultados que serão apresentados nas análises numéricas, pois cada uma dessas recomendações apresenta parâmetros distintos de verificação do fenômeno da punção em lajes protendidas.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta pesquisa é investigar o comportamento de lajes lisas protendidas com cabos não aderentes submetidas à punção.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Analisar lajes lisas de concreto armado e protendido, submetidas a punção, simulando ligações laje-pilar central, no programa *ATENA* em sua versão 5.9, com base em elementos finitos.
- Estimar a ruptura por punção em lajes lisas de concreto protendido, considerando a mobilização da força de protensão e sua interferência na resistência última e o panorama

de fissuração, usando como base modelos experimentais disponíveis na literatura para a calibração dos modelos e dos parâmetros dos materiais.

- Compreender os principais parâmetros que foram considerados durante as simulações numéricas para o modelo em concreto armado e, a partir de tais parâmetros, observar as diferenças nos resultados de deformações e panorama de fissuração com a variação de parâmetros de entrada em simulações numéricas de punção me lajes lisas de concreto protendido, como; condições de contorno, acréscimo de resistência, propagação de fissuras e deformação, quando considerada a aplicação da protensão.
- A partir dos modelos calibrados, realizar um estudo paramétrico variando parâmetros como; espaçamento em planta dos cabos de protensão, espessura da laje e retangularidade do pilar.
- Comparar os resultados das simulações numéricas com as recomendações das normas ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2004), NBR 6118 (2014) e *fip* Model Code (2010).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, serão apresentadas pesquisas estabelecidas, as quais estão relacionadas ao tema deste trabalho. Será abordado, também, um breve histórico do uso de lajes lisas protendidas, momento esse em que serão expostos os principais estudos de punção em lajes protendidas, bem como as prescrições das normas que foram empregadas nas análises desta pesquisa.

2.1 ASPECTOS GERAIS

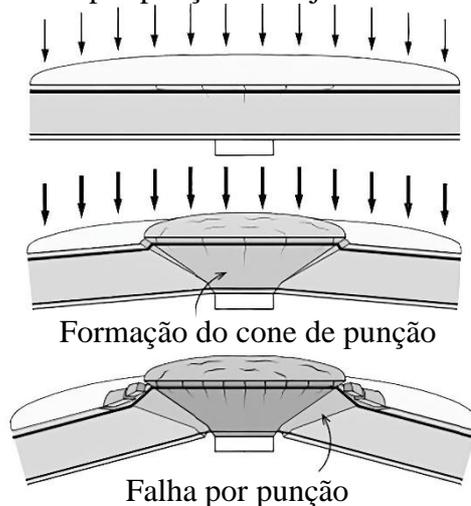
Idealizado pelo engenheiro americano Claude Allen Porter Turn, em 1906, o edifício C.A. Bovey Building, localizado na cidade de Minnesota, foi o primeiro a utilizar o sistema de aplicação de lajes sem vigas. Na Europa, por sua vez, o suíço Robert Maillart foi o pioneiro a realizar construções utilizando o sistema de lajes lisas, o que data o ano de 1909 (FÜRST; MARTI, 1997).

No Brasil, existem relatos da utilização de lajes sem vigas que marcam o fim da década de 1970. Segundo a revista *A Construção* (1985 *apud* FIGUEIREDO FILHO, 1990), o engenheiro Antônio Pinto Rodrigues já havia construído, desde 1978, cerca de 100 edifícios em que as vigas eram substituídas por faixas reforçadas de lajes.

É notório que as lajes lisas possuem uma estética simples, porém há um complexo comportamento desses elementos no que se trata dos esforços à flexão e ao cisalhamento. Esse fenômeno é mais comum por uma falha de cisalhamento na região de descontinuidade na ligação laje-pilar. Para Albuquerque (2014), os principais problemas ocorrem na ligação entre laje-pilar em que não há elementos de transição, o que se dá porque os maiores esforços cortantes e os momentos fletores, geralmente, estão concentrados nessas regiões.

Tipicamente, a ruína por punção ocorre por meio da formação de uma superfície de ruptura, tendo seu formato próximo ao de um tronco de cone (SOARES, 2017). Quando não há presença de armadura de cisalhamento, podendo ocorrer um modo de ruptura frágil (BRANTSCHEN, 2016). Nesse caso, a armadura de flexão não necessariamente escoa, ou seja, existe uma tendência de uma ruína sem avisos. As consequências desse fato envolvem a ocorrência de sérios danos para a edificação, visto que a separação do elemento laje do elemento pilar tem uma grande influência sobre a estabilidade global. Esse cenário pode acarretar, inclusive, o colapso geral da estrutura. Este esquema de ruptura está representado na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Esquema de ruína por punção em laje lisa sem armadura de cisalhamento



Fonte: Adaptado de Brantschen (2016).

Além disso, uma ruptura localizada, tal como a esquematizada na Figura 2.1, conduz a uma redistribuição dos esforços rumo a outras ligações adjacentes, as quais, caso não suportem o acréscimo de tensão, podem também sofrer ruptura por punção. Quando esse efeito é sequenciado, leva o nome de *colapso progressivo*. Para garantir uma resistência pós-puncionamento, recomenda-se o uso de uma armadura específica, disposta longitudinalmente na parte inferior da laje, de forma a interceptar o pilar, o que proporciona a sustentação da laje nessa fase de pós-puncionamento.

2.2 MODOS DE FALHA

Nas lajes lisas de concreto armado com ausência das armaduras de cisalhamento segundo Soares (2017), a falha por punção é precedida da formação de fissuras inclinadas em seu plano transversal ao redor do pilar, o que leva à separação do cone de punção do elemento de laje e a uma perda quase completa da capacidade de resistência à carga (Figura 2.2).

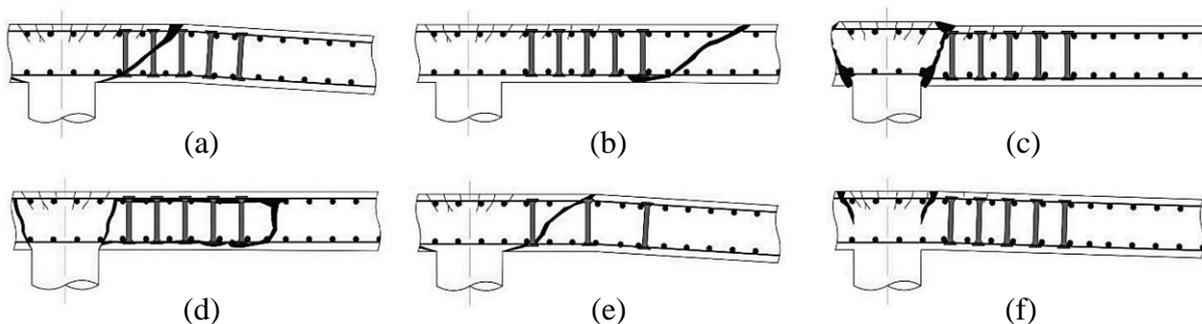
A armadura de cisalhamento é frequentemente adicionada à região ao redor da conexão laje-pilar a fim de fornecer ductilidade para o perímetro e aumentar sua resistência. Modos de falha de lajes lisas com armadura de cisalhamento são altamente influenciados pelo tipo de sistema de armadura transversal adotado, sua ancoragem, seu espaçamento, sua distribuição, bem como sua distância em relação à área considerada como crítica.

Segundo Lips *et al.* (2012), para lajes lisas projetadas com regras de detalhamento tradicionais, três modos potenciais de falha de cisalhamento governam: punção dentro da área

com armadura transversal (Figura 2.2a); punção fora da zona com armadura de cisalhamento (Figura 2.2b); e ruína do concreto próximo ao pilar (Figura 2.2c). Além disso, dependendo do detalhamento, outras falhas podem ocorrer, como a delaminação (Figura 2.2d), a falha entre as armaduras transversais (Figura 2.2e), ou em alguns casos, a capacidade de flexão (Figura 2.2f), pode prevalecer para lajes com baixas taxas de armadura de flexão e grandes quantidades de armadura de cisalhamento (LIPS *et al.* 2012).

Ambas as falhas citadas, sejam dentro ou fora da área de armadura transversal, podem ser evitadas com o seu correto dimensionamento e detalhamento.

Figura 2.2 – Possíveis modos de falha



Fonte: Lips *et al.* (2012).

2.3 PARÂMETROS QUE INFLUENCIAM A RESISTÊNCIA À PUNÇÃO

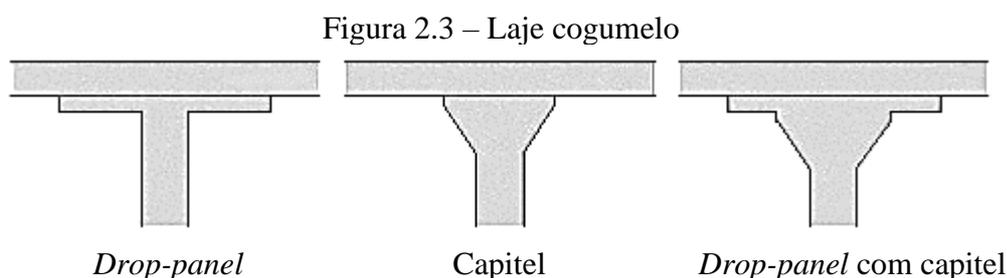
Atualmente, diversas pesquisas experimentais e numéricas têm sido realizadas com o intuito de avaliarem a resistência da ligação laje-pilar. Nestas pesquisas, constatam-se que a resistência ao cisalhamento de uma laje lisa é influenciada por diversos fatores. Rabello (2010) menciona que, além do problema da ligação entre a laje e o pilar ocorrer em uma região nodal, outros itens, como a variação na forma, na textura e no tamanho do agregado, assim como os fenômenos de microfissuras, também são levados em consideração para a caracterização da heterogeneidade de materiais quando analisada a estrutura microscópica do concreto. Esses fatores são determinantes para o seu comportamento não linear e, com a presença das barras de aço, esses comportamentos geram incertezas do sistema.

Estudos paramétricos têm sido desenvolvidos com o intuito de ensaiar excessivamente fatores que apresentam maior relevância nas pesquisas que permeiam o fenômeno de punção. Esta seção irá descrever quais são os principais fatores referentes ao tema e a magnitude da influência de cada um deles.

2.3.1 Altura útil da laje

A altura útil (d), e a espessura da laje (e), são fatores de suma importância na análise da punção. Considerando que o tronco de cone característico possui uma inclinação praticamente constante, o aumento da altura útil implica em um maior perímetro de ruptura, o que alivia as tensões atuantes quando se analisa um carregamento constante. Contudo, o aumento da espessura da laje tem influência direta no aumento de seu peso, o que contribui para maiores carregamentos permanentes e um maior gasto de material.

Sendo assim, algumas propostas podem ser apresentadas para que haja a diminuição desses prejuízos, como os capitéis e os ábacos (*drop-panels*), por exemplo. Os *drop-panels* podem ser conceituados como o aumento localizado da espessura da laje, enquanto os capitéis consistem no aumento localizado da seção do pilar. É importante frisar que a utilização desses artifícios resulta em um novo sistema, o qual é chamado de laje cogumelo, conforme ilustrado na Figura 2.3.



2.3.2 Efeito de tamanho (*size effect*)

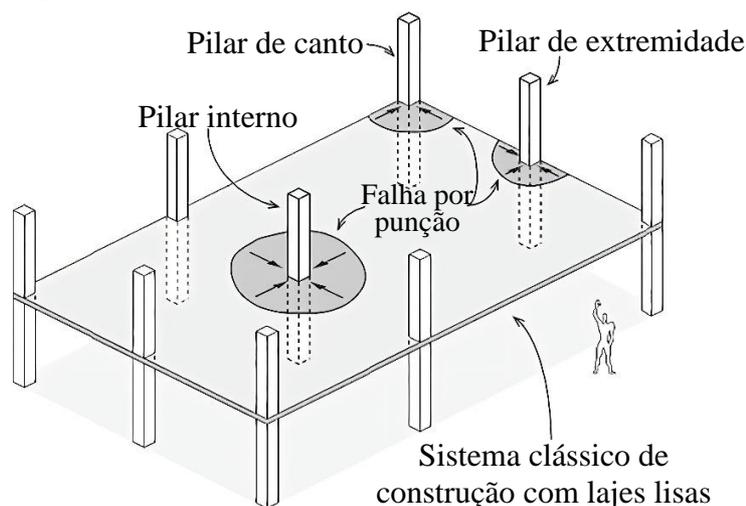
O efeito de tamanho (*size effect*), é um fator geométrico que influencia principalmente a distribuição das tensões na ligação laje-pilar, e que pode ser definido como o aumento da resistência à tração conforme diminui-se a espessura da laje. Assim, como Fusco (1984 *apud* MELGES, 2001) e Rabello (2010) ressaltam, em igualdade de outras condições, lajes de menor altura útil, considerando-se a mesma taxa de armadura longitudinal, são mais resistentes do que as mais espessas; no entanto, a partir de uma determinada espessura, a armadura de tração perde sua capacidade de controlar a abertura de fissuras ao longo de sua altura, sendo assim, uma variável que deixa de ser significativa. Ainda segundo Afonso (2010), tratando-se da punção em lajes, esse efeito provoca uma redução específica da capacidade resistente conforme é promovido o aumento de sua espessura.

Nesse contexto, há, portanto, uma limitação da influência diretamente proporcional da espessura a um determinado valor. A desconsideração desse fator pode desencadear o superdimensionamento de estruturas, o maior consumo de materiais e não necessariamente uma maior resistência ao fenômeno. A grande maioria das normas é responsável por apresentar o efeito de tamanho via expressões empíricas. Essas previsões e respectivas descrições serão abordadas no item 2.5.

2.3.3 Dimensões, formato e tamanho do pilar

No que tange ao posicionamento dos pilares, estes podem ser de canto, de borda ou internos. Essas variações de localização se apresentam como um aspecto importante no que se refere à resistência à punção, como ilustrado na Figura 2.4. De forma intuitiva, segundo Barbán (2008), é possível inferir que, no caso de pilares de borda e de canto, quando os momentos não são balanceados, não há superfície para que se desenvolva completamente o cone de punção, gerando, assim, um acréscimo de tensão na superfície de ruptura formada, que possui um comportamento diferenciado e mais complexo de ser estudado devido à presença de tensões devidas à flexão, ao esforço cortante e ao momento torçor na ligação.

Figura 2.4 – Fenômeno de punção e tipos de pilares



Fonte: Adaptado de Brantschen (2016).

Em estudos realizados por Braestrup e Regan (1985 *apud* MELGES, 2001), foi constatado que a geometria dos pilares tem influência em como a distribuição de tensões ocorre na ligação laje-pilar. Os pilares de formato retangular são propícios à ocorrência de concentração de tensões. Isso se dá pelo fato de possuírem cantos que acumulam tensões e que

tornam a ligação menos resistente à punção quando comparados aos pilares redondos de mesma área. Tais autores acrescentam, ainda, que essa diferença está em torno de 15%.

Melges (2001) comenta que, em relação à dimensão dos pilares retangulares, aqueles que apresentam razões entre o lado maior e menor superiores a dois, caracterizam uma ruína mais brusca devido ao menor cone de punção e às tensões mais concentradas nos menores lados da seção do pilar.

2.3.4 Resistência do concreto

Rabello (2010) afirma que, em sistemas de lajes lisas, a capacidade de sustentação da estrutura, dentre outros fatores, depende da resistência à tração do concreto (f_{tk}). Essa resistência pode ser obtida por meio de correlações com a resistência à compressão característica do concreto (f_{ck}). No caso de não haver armadura de punção, parte do carregamento dependerá dessa resistência. Para fins de projeto, a definição da resistência à compressão do concreto é o passo inicial e do qual dependem as formulações normativas para o dimensionamento.

Alguns códigos normativos consideram que a resistência à punção varia de forma proporcional à resistência à compressão característica do concreto, a exemplo do exposto no código americano ACI 318 (2019), em que se indica que a resistência à punção é proporcional ao valor da raiz quadrada do f_{ck} . Porém, é importante ressaltar que o aumento da resistência do concreto não garante ductilidade à laje, visto que as características do material em si e a sua zona de transição contribuem para justificar a ruptura frágil.

2.3.5 Taxa de armadura de flexão

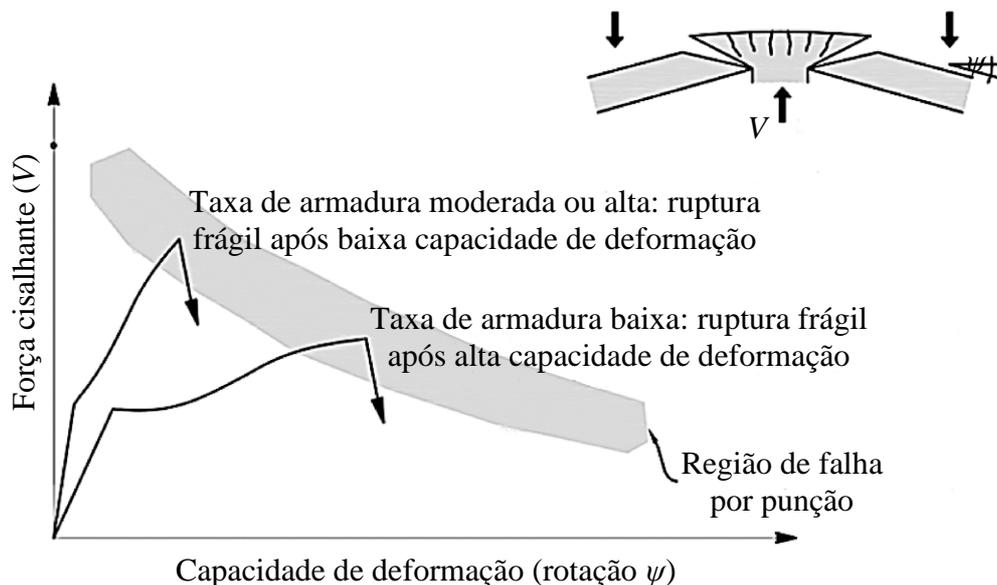
A taxa de armadura de flexão (ρ), é a porcentagem de armadura utilizada para resistir à flexão contida em uma determinada área da seção transversal de concreto. O impacto da taxa de armadura longitudinal na resistência à punção é considerado, por muitos estudos, como a variável principal desse processo, porém, os resultados podem ser influenciados por algumas das variáveis listadas nesta seção, bem como por impactos de fatores desconhecidos, tais como configuração do ensaio, condições de contorno e afins.

A armadura longitudinal além de resistir a flexão imposta pela laje, também pode ser observada sua influência por meio da resistência ao esforço cortante via efeito de pino. Ensaios experimentais vêm apontando um aumento de resistência à punção associado a uma elevação

da taxa de armadura longitudinal. Inclusive, no trabalho realizado por Vanderbilt (1972), já foi possível analisar este efeito. Nesta pesquisa foram ensaiadas quinze lajes lisas com pilares internos. As lajes tinham 51 mm de espessura, e os parâmetros considerados foram o tamanho e o formato dos pilares, além da taxa de armadura de flexão. Como resultado, foi possível observar que a resistência à punção aumentou com maiores taxas de armadura de flexão de forma independente do tamanho e do formato dos pilares.

Alguns códigos normativos sugerem uma concentração maior de armadura de flexão na região laje-pilar como forma de promover uma maior resistência ao fenômeno de punção, e também para garantir certa ductilidade, devendo sempre observar os limites de taxa de armadura imposto pelas normas. Tai sugestões também são confirmados em estudos como os de Ruiz, Mirzaei e Muttoni (2013), onde os autores afirmam que a robustez da estrutura pode ser assegurada com taxas de armadura de flexão suficientemente maiores do que a taxa mínima de armadura de flexão, conforme Figura 2.5, ou mais atuais, como o realizado por Soares (2017), que apresentaram fortes indícios de que, em alguns casos, a armadura de flexão ao longo do vão em lajes contínuas pode ter um impacto ainda maior do que o aumento de armadura de ligação laje-pilar.

Figura 2.5 – Contribuição da taxa de armadura para a robustez da estrutura



Fonte: Adaptado de Ruiz, Mirzaei e Muttoni (2013).

2.3.6 Armadura de punção

Nos casos em que é necessário aumentar a resistência da ligação laje-pilar, algumas soluções podem ser aplicadas como, o uso de capiteis, o aumento da espessura total da laje, sendo essas duas soluções, em alguns casos, descartadas, por interferirem no projeto arquitetônico. Como alternativas, citam-se o emprego de maiores taxas de armadura de flexão (respeitando os limites estabelecidos pelas normas) e a utilização de armaduras de cisalhamento.

A armadura cisalhamento é uma medida comumente utilizada e que apresenta benefícios, pois, ao contribuir para a ductilidade da estrutura, viabiliza o aparecimento de avisos antes de a ruptura ser processada, agregando, portanto, mais segurança à edificação. De acordo com diversos estudos como os de Regan e Samadian (2001); Ruiz e Muttoni (2009); Guandalini (2006); Lips et al., 2012; Einpaul et al. (2016), entre outros, a mobilização de armadura transversal, quando comparada às outras soluções citadas, indica um aumento mais significativo na resistência da laje ao fenômeno de punção.

Segundo Einpaul *et al.* (2016), a questão fundamental no projeto e na montagem da armadura de punção está em encontrar uma boa relação entre a ancoragem eficiente e a facilidade de instalação das armaduras, sendo atualmente empregado diversos tipos de armadura de punção de uso comum em lajes de concreto. Na Figura 2.6, é possível observar alguns desses.

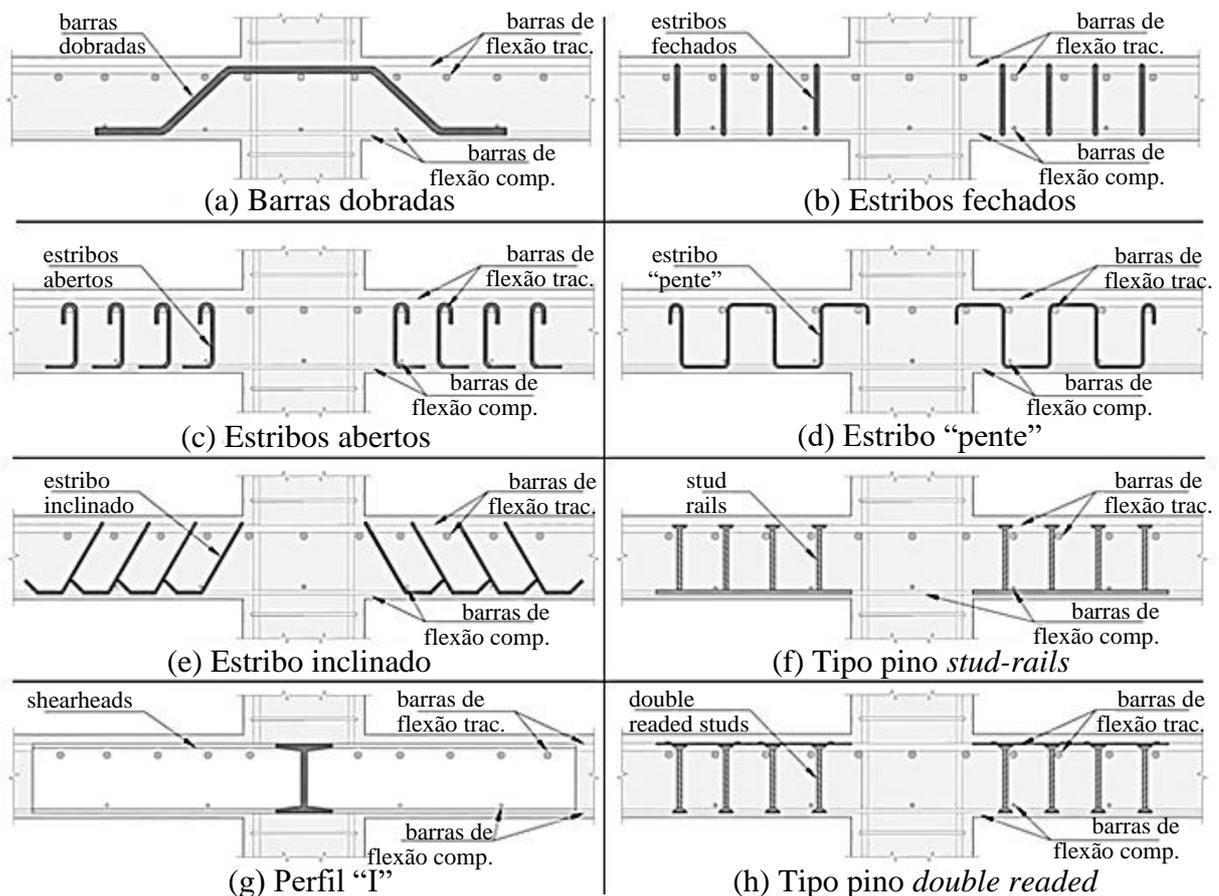
Ferreira (2010) menciona que as primeiras armaduras testadas no combate à punção foram barras dobradas (Figura 2.6a). Esse sistema funciona como um prolongamento da armadura negativa de flexão da laje. Como ela acaba absorvendo parte dos esforços de flexão, não apresenta muita capacidade para resistir ao cisalhamento, conforme indicado por Melges (2001). Os estribos, um dos tipos de armaduras transversais mais populares, também podem ser utilizados como armaduras de punção, além de assumirem diversas configurações, como estribos fechados (Figura 2.6b), estribos abertos em forma de gancho (Figura 2.6c), estribos do tipo pente (Figura 2.6d), ou, ainda, estribos inclinados (Figura 2.6e).

A utilização dos estribos abertos foi considerada satisfatória em ensaios realizados por Takeya (1981), uma vez que eles não interferiram nas armaduras de flexão da laje e também não alteraram as armaduras dos pilares, sendo de simples montagem e execução. No entanto, os ensaios também indicaram que, para este tipo de armadura de punção, deve-se garantir que

não haja folga entre o gancho e as faces superiores da armadura de flexão, de modo a promover, com isso, uma boa ancoragem.

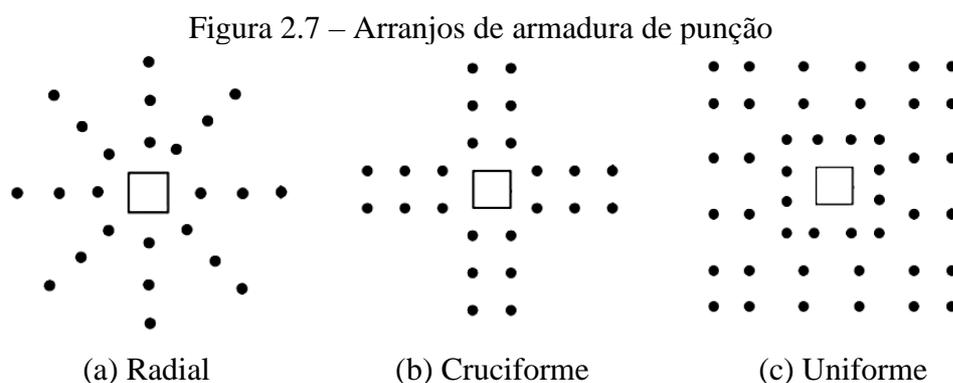
A armadura do tipo pino (*studs*) também pode ser utilizada. Esta se subdivide em elementos com faixa contínua de chapa de aço na extremidade inferior, chamados de *stud-rails* (Figura 2.6f), e elementos com bases de ancoragem nas duas extremidades, de forma individual, os quais são denominados *double headed studs* (Figura 2.6h). Figueiredo Filho (1989) analisa que algumas das principais vantagens desses conectores são: facilidade de instalação; ausência de interferência na colocação e no posicionamento das armaduras de flexão e dos pilares; e possibilidade de ancoragem satisfatória nas duas extremidades, de modo que a armadura atinja toda a sua capacidade resistente antes da ruptura, o que, conseqüentemente, aumenta a resistência e a ductilidade da ligação. De acordo com Rabello (2010), em vez de conectores tipo pino, pequenos segmentos de perfis metálicos de seção transversal tipo "I" (Figura 2.6i) também podem ser utilizados.

Figura 2.6 – Exemplos de sistemas de armaduras transversal



Fonte: Ferreira (2010).

Vale ressaltar que, pesquisas ainda estão sendo realizadas no que se refere ao desenvolvimento de novos tipos de sistemas de armadura de cisalhamento. Os benefícios gerados pela adição de armadura transversal na ligação laje-pilar vêm sendo objeto de estudo de muitos pesquisadores, porém a definição do melhor sistema ou do arranjo mais eficaz ainda divide muitas opiniões. Exemplos típicos de padrões de arranjos de detalhamento são: radial (Figura 2.7a), cruciforme (Figura 2.7b) e uniforme (Figura 2.7c).



Fonte: Soares (2017).

Os arranjos radial e cruciforme é previsto pela norma europeia, Eurocode 2 (2004), mesmo que nessa região seja permitida a utilização de outros tipos. O Estados Unidos adota, segundo o ACI 318 (2019), o arranjo cruciforme. No Reino Unido é adotado o arranjo uniforme (SOARES 2017). No Brasil, segundo a ABNT NBR 6118 (2014) são permitidos os arranjos radiais e cruciformes. Alguns códigos normativos apresentam recomendações sobre qual arranjo deve ser mobilizado para cada circunstância, outros deixam a escolha para o projetista.

2.3.7 Fibras

As fibras são compósitos discretos e descontínuos empregados na mistura de concreto para melhorar suas propriedades, e são utilizados em sistemas para fins estruturais e não estruturais, existindo em uma variabilidade de formatos, dimensões e tipos. Diversos estudos vêm sendo apresentados na literatura comprovando a eficácia do emprego de fibras na mistura de concreto, seja com adição de fibras de polipropileno, de vidro, fibras de origem vegetais, carbono ou fibras de aço, conforme exemplos apresentados na Figura 2.8.

Figura 2.8 – Exemplos de fibras empregadas no concreto



Fonte: Buttignol *et al.* (2017).

Pesquisas como a de Mobasher *et al.* (2015) apresenta que as fibras podem proporcionar um aumento de 30% a 40% na resistência à tração direta para adições de até 1,5%. Conhecendo o acréscimo proporcionado na resistência devido a introdução de fibras no concreto, essa se torna uma alternativa cada vez mais empregada como uma forma de aumentar a resistência contra a punção, como também melhorar o controle da fissuração e o aumento da ductilidade na etapa posterior à fissuração.

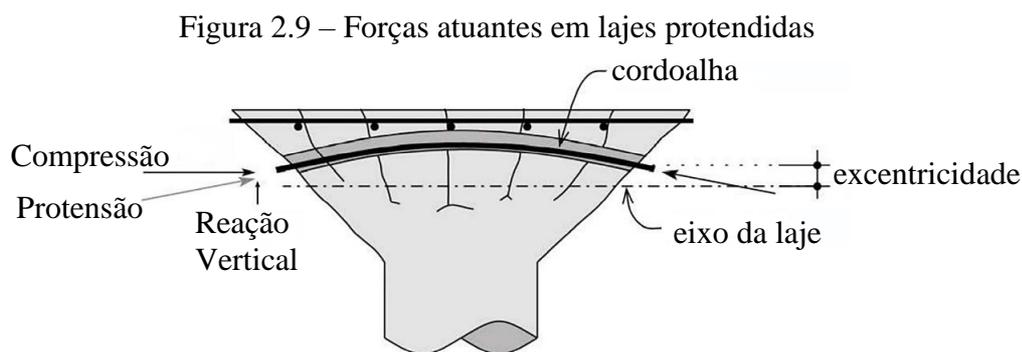
Algumas vantagens são relatadas para a adição de fibras no concreto, como; absorver energia e, conseqüentemente, aumentar a ductilidade e tenacidade do sistema estrutural; melhorar o controle de fissuras; retardar a abertura de fissuras; aumentar a resistência às ações dinâmicas; melhorar o desempenho na fadiga e; melhorar a resistência ao impacto direto (BARROS e FIGUEIRAS 1998).

Estudos mais recentes como o de Oliveira (2020), comprovou que a adição de fibras de aço são uma alternativa para aumentar a capacidade de carga na punção através dos mecanismos de retenção da abertura de fissuras e transferência de tensões entre as faces da fissura proporcionado ao sistema.

2.3.8 Protensão

O princípio do concreto protendido segundo Clément *et al.* (2014), é diminuir a fissuração do concreto e aumentar a capacidade portante por meio da introdução de tensões normais de compressão no plano da laje devido à protensão, levam a um aumento de sua capacidade de suportar forças de cisalhamento. Ao aliar a intensidade da força de protensão ao traçado de cordoalhas com excentricidade, que pode ser em formato parabólico, observa-se que há um aumento da resistência à punção, tendo em vista que são geradas forças internas de

compressão no concreto, conforme esquematizado na Figura 2.9. Isso eleva o controle de fissuras e de deformações da laje, o que acarreta uma redução de sua espessura e uma diminuição do peso da estrutura. A acréscimo de protensão em regiões submetidas à punção, são melhor descritos nos próximos itens deste trabalho.



Fonte: Clément *et al.* (2014).

2.4 PESQUISAS RELACIONADAS

Há cerca de 70 anos, diversos pesquisadores têm estudado o fenômeno da punção e seu efeito em lajes lisas protendidas. Os estudos têm demonstrado um efeito favorável no que tange à protensão na resistência à punção. Isso porque as forças internas causadas pela protensão na laje produzem um aumento na resistência à punção, principalmente pela força de compressão no plano, o que gera um aumento da capacidade de resistência ao cisalhamento e reduz a fissuração, aumentando, assim, a transmissão de esforços cortantes por meio do engrenamento entre os materiais. Nesse cenário, o traçado curvo dos cabos que cruzam a superfície de ruptura reduz o esforço solicitante resistido pelo concreto.

Nesta seção, são analisados os efeitos da protensão no comportamento das lajes, além de ser apresentada, de forma resumida, uma revisão das pesquisas experimentais desenvolvidas, no Brasil e em outros países, abordando esse assunto.

A priori, cabe mencionar o estudo de Scordelis *et al.* (1958 *apud* Faria, 2004), os autores analisaram quinze amostras de lajes. Uma parte delas foi composta por concreto armado, enquanto a outra foi baseada em concreto protendido. Nos casos em que havia protensão, eram inexistentes as armaduras passivas. O objetivo do estudo foi identificar como ocorria a distribuição das cordoalhas em diferentes parcelas da laje. Durante o experimento, as lajes foram elevadas e fixadas aos pilares por meio de colarinhos de aço. A partir disso, foi aplicado um carregamento central. Analisando o comportamento das lajes ensaiadas, os autores

verificaram que a compressão da laje foi um fator que deveria ser inserido no cálculo da resistência ao cisalhamento (P_{shear}), e, portanto, a seguinte expressão empírica foi desenvolvida:

$$\frac{P_{Shear}}{b_d f'_c} = 0,175 - 0,00000351 f'_c + 0,00114 \frac{F_e}{S} \quad (2.1)$$

Sendo:

b_d : perímetro à extremidade do colarinho da laje;

F_e : é a força por cabo (kN);

f'_c : resistência do concreto (kN/m²);

S : é o espaçamento do cabo (m).

Outro estudo importante foi realizado por Grow e Vanderbilt (1967), no qual foram elaborados doze ensaios em lajes de concreto leve, com 76 mm de espessura cada, sendo variado o grau de protensão aplicado ao carregamento centrado. A força de protensão variou de 0 a 66,7 kN em cabos curvos nesta pesquisa. Os resultados mostraram que há um aumento linear na resistência ao cisalhamento com o aumento da protensão inicial efetiva. Para o cálculo da resistência ao cisalhamento, os autores propuseram a expressão (2.2), que é semelhante às equações de V_{cw} do ACI 318 (1983) onde f_{ec} é o pré-compressão média, (kN/m²) e b é perímetro à face da coluna (m).:

$$V_u = (360 + 0,3f_{ec})bd \text{ (kN)} \quad (2.2)$$

Por sua vez, um estudo desenvolvido por Burns e Smith (1973 *apud* FARIA, 2004) teve como premissa a análise do comportamento de armaduras passivas aderentes no ponto de ligação entre a laje protendida com cabos não aderentes e o pilar no que se refere à punção. Os resultados foram importantes para, posteriormente, uma revisão do ACI 318 (1983) incorporar a recomendação dessa área de aço mínima para flexão, assim como a ABNT NBR 6118 (2014) recomenda adotar a equação (2.3) sendo h a altura da peça, em cm e l o vão médio em cm na direção do momento.

$$A_s = 0,00075hl \quad (2.3)$$

Hawkins e Trongtham (1975 *apud* FARIA, 2004) desenvolveram na Universidade de Washington um estudo em que analisaram o efeito da punção em pilares internos que, pela primeira vez o cisalhamento foi considerado em casos em que havia transferência de momento entre laje e pilar. A partir desses estudos, foram feitas algumas observações, tais como:

A carga última V_u não deve superar V_{cw} :

$$V_{cw} = 9,19\sqrt{f'_c} + 0,3f'_{pc} + \frac{V_P}{A_C} \quad (\text{kN/m}^2) \quad (2.4)$$

Em que:

f_{pc} : protensão na direção da transferência do momento, em kN/m²;

V_p : soma das componentes verticais dos cabos de protensão que cruzam a seção crítica;

A_c : área da seção crítica a $d/2$ de distância do perímetro da coluna.

A quantidade de armadura aderente recomendada pelo ACI 318 é desejável, embora, para conexões internas, 80% da quantidade recomendada já seja suficiente.

Os testes mostraram que as lajes protendidas possuíam ligações mais rígidas com os pilares do que lajes de concreto armado de igual resistência à flexão.

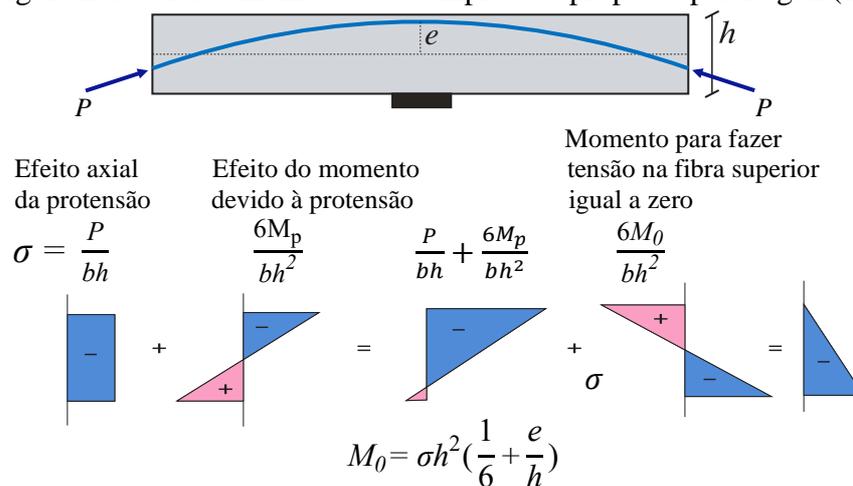
Posteriormente, a fim de obter dados adicionais sobre protensão aderente e não aderente sob o efeito de punção, Pralong *et al.* (1979) estudaram o comportamento de seis lajes suportadas e carregadas no centro por um pilar cilíndrico. Neste estudo, foi percebido que, no caso de lajes protendidas, após a fase de ruptura, a protensão permitiu que houvesse uma modificação no sistema de suporte por meio da mobilização das forças de membrana dos cabos colocados na laje. Neste caso, o uso de protensão por faixa nos pilares influenciou fortemente a carga de fissuração, a carga de ruptura e, também, o comportamento da laje após o rompimento por punção.

Shehata (1982) investigou o punção em dezesseis lajes, sendo que dez delas representavam um tabuleiro de pontes e seis representavam lajes de edifícios (série SP), dentre as quais possuíam dimensões de 2350 mm x 2350 mm. A laje SP1 possuía 9 cabos inclinados, espaçados a cada 125 mm na faixa central e a 250 mm nas faixas externas. As lajes SP4 e SP5, por sua vez, possuíam 11 cabos inclinados, espaçados a cada 125 mm e a cada 250 mm nas faixas externas. A diferença entre as lajes SP4 e SP5 eram os cabos da faixa central de SP5, que foram protendidos com 90 kN, e os das faixas externas, com 180 kN de protensão, enquanto, na laje SP4, todos os cabos foram protendidos com 180 kN. Por fim, a laje SP6 possuía 8 cabos inclinados, espaçados a cada 250 mm.

O pesquisador deste estudo observou que a rotação das lajes protendidas foi menor que a rotação das lajes não protendidas no estado elástico, e que as fissuras de lajes protendidas com cabos aderentes eram bem distribuídas na laje, enquanto que, para as lajes com cabos não aderentes, a distribuição era irregular e se concentrava, principalmente, próxima ao pilar. Shehata também desenvolveu um modelo analítico para cálculo de carga última de lajes protendidas, o qual se baseava no princípio de que a resistência à punção de uma laje protendida podia ser calculada como a de uma laje de concreto armado com taxa de armadura equivalente, desde que as forças de tração nas armaduras de flexão e a altura da linha neutra fossem iguais em ambas as lajes.

Regan (1985) estudou a protensão aderente e a não aderente, baseando-se no fenômeno da descompressão, o qual acontece na laje no instante em que as tensões da tração na seção transversal são anuladas pelas tensões geradas por outros carregamentos externos. Nesse caso, as tensões consideradas ocorrem na face superior da peça, região mais tracionada. Conforme Figura 2.10, é possível observar que as tensões resultantes da protensão são transferidas para a região do pilar, dando origem à tensão de descompressão, o que aumenta a resistência à punção da laje.

Figura 2.10 – Mecanismo de descompressão proposto por Regan (1985)



Fonte: Regan (1985 *apud* Díaz, 2018).

O método de cálculo proposto por Regan (1985) tem como princípio que a resistência à punção de uma laje protendida pode ser obtida a partir da soma da resistência desta mesma laje, sem a protensão, mais a carga necessária para gerar um estado de descompressão, conforme segue na equação (2.5), onde P_{up} é a resistência à punção da laje protendida; P_{ur} a resistente à punção da laje de concreto armado, com a mesma geometria, mas sem armadura de protensão.

$$P_{up} = P_{ur} + P_0 \quad (2.5)$$

P_0 é a força de descompressão da laje protendida, calculada em função do momento de descompressão por unidade de comprimento da laje (M_0) como:

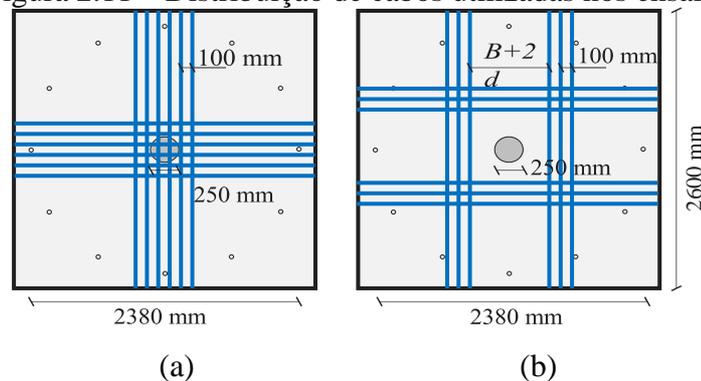
$$P_0 = 2\pi M_0 \text{ (laje circular)}$$

$$P_0 = \frac{4b}{l} M_0 \text{ (lajes retangulares)}$$

Sendo que b é largura ao longo da qual estão distribuídos os cabos e l a largura total da laje.

Em seu programa experimental, Hassanzadeh e Sundquist (2000) realizaram ensaios com nove lajes em pilares centrais divididas em três séries. Do total de lajes, sete eram protendidas com cabos não aderentes, utilizando, para tanto, duas configurações, conforme mostrado na Figura 2.11. A pesquisa investigou a influência que pode ser causada pela carga fora do perímetro crítico em está ocorrendo a punção na laje. Duas lajes adicionais foram ensaiadas, sendo uma delas em concreto armado – a qual foi utilizada como referência – e outra com incorporação de fibras de aço associadas ao concreto como substituição da armadura passiva por este tipo de reforço. De acordo com os resultados, as lajes com cabos mais afastados do pilar (Figura 2.11b) tiveram um decréscimo na carga última em relação àquelas da configuração (Figura 2.11a), porém, por outro lado, elas apresentaram uma capacidade de resistência maior do que a da laje de referência. Os autores concluíram que, ao desprezarem os cabos fora da seção crítica, as normas subestimam a resistência à punção para o cálculo da parcela equilibrante, sendo que esses cabos acabam, na verdade, contribuindo na resistência à punção das lajes.

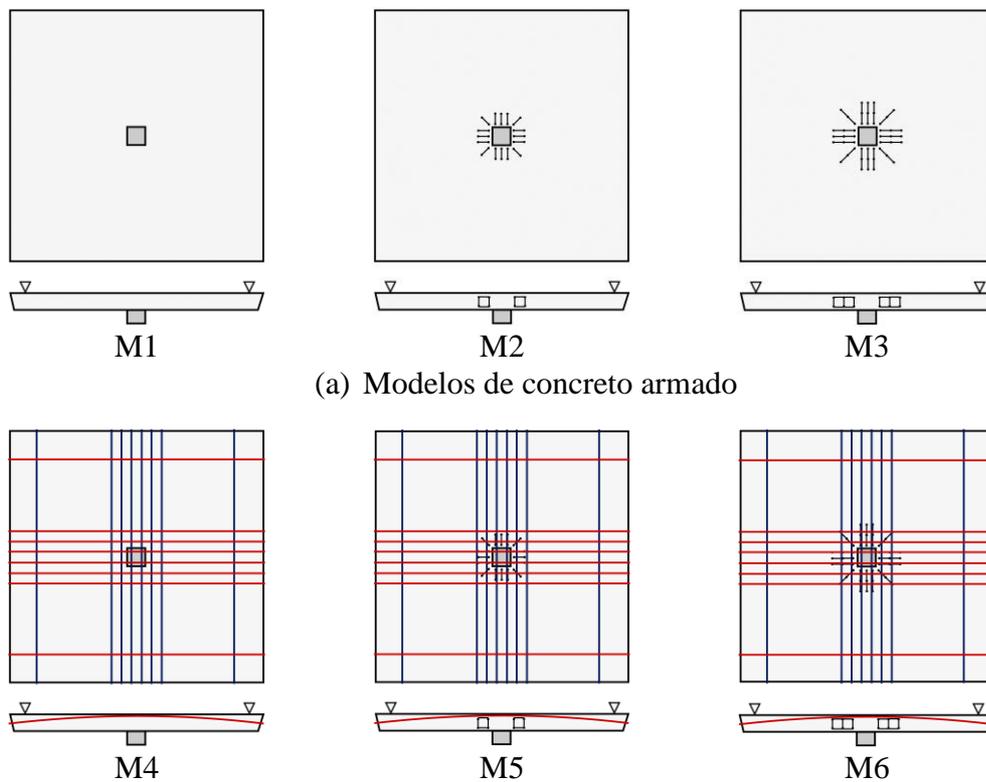
Figura 2.11 – Distribuição de cabos utilizadas nos ensaios



Fonte: Hassanzadeh e Sundquist (2000 *apud* Díaz, 2018).

Melges (2001) fez um experimento com seis lajes lisas, submetidos à punção em pilares internos com carregamento concêntrico, sendo que três compostas de concreto armado e os outros três de concreto protendido com cabos não aderentes. Seu estudo auxiliou na investigação da influência que a armadura do tipo *studs* pode ocasionar na resistência à punção, por meio de quatro modelos confeccionados com duas disposições de armadura de cisalhamento, como pode ser observado na Figura 2.12.

Figura 2.12 – Características dos modelos de Melges (2001) sem armadura de punção



Fonte: Adaptado de Melges (2001).

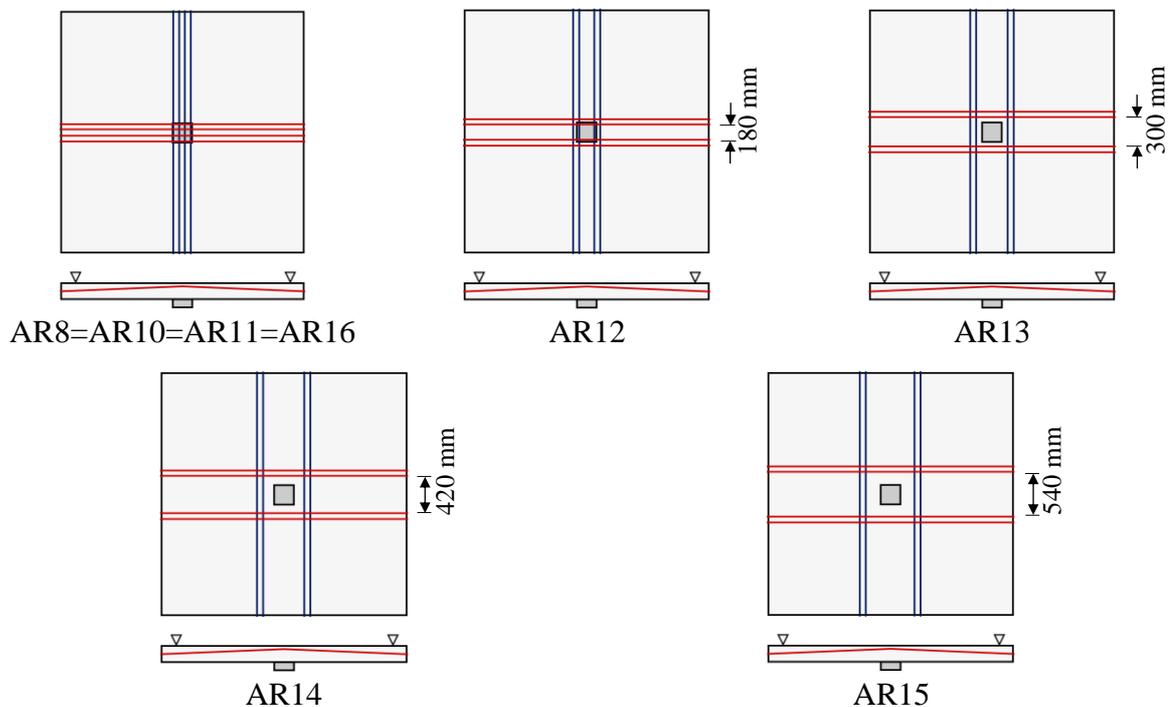
Melges (2001) concluiu que, a armadura de punção eleva significativamente a resistência na ligação laje-pilares. Apesar de ter havido uma diminuição da armadura passiva nos modelos 4, 5 e 6, os ensaios revelam que a protensão aumenta a resistência na ligação.

Ramos (2003) estudou, por meio de duas séries de ensaios, 11 lajes protendidas de 2300 x 2300 mm² e 100 mm de espessura. O pilar central foi simulado por uma placa de aço de 200 x 200 mm² e 50 mm de espessura, colocada sobre um macaco hidráulico. A pesquisa teve como objetivo avaliar separadamente os efeitos causados pela protensão. No que se refere à primeira série, com 3 modelos (AR5, AR6 e AR7), estudou-se o efeito da compressão no plano da laje, em uma e duas direções. Nos modelos, a força era aplicada por meio de cabos de protensão

externa, ancorados em perfis metálicos que transmitiam cargas concêntricas e uniformes para as bordas da laje. Nesta série o autor concluiu que a aplicação de compressão no plano da laje reduz os deslocamentos verticais dos modelos e os valores de deformação da armadura longitudinal superior.

A segunda série foi dividida em duas subséries, onde avaliou-se o efeito da força de desvio provocada por cabos inclinados, com trechos retos e no centro, alterados por dispositivos desviadores, pois dessa forma, seria possível realizar a separação do componente de equilíbrio (V_p) do componente de compressão no plano (V_{cp}). As lajes AR8, AR10, AR11 e AR16, apresentavam a mesma distribuição de 4 cabos a cada 60 mm, concentrados no centro da laje, variando a intensidade das forças de protensão aplicada nos cabos. Para as lajes AR12, AR13, AR14 e AR15, a variável foi a distância dos cabos no centro da laje deixando um vazio em relação ao pilar, mantendo constante a força nos modelos conforme Figura 2.13.

Figura 2.13 – Espaçamento em planta das lajes de Ramos (2003)



Fonte: Adaptado de Ramos (2003).

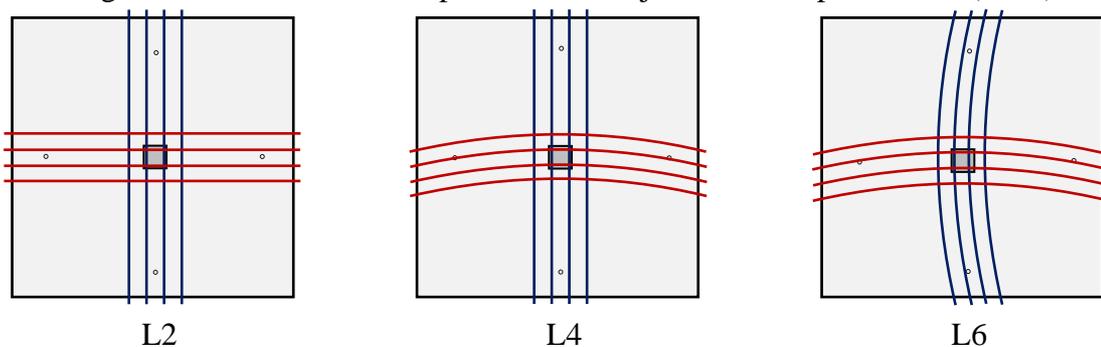
Ramos (2003) observou, ainda, que o aumento da força de desvio sobre o pilar levou ao incremento do valor da carga de ruptura das lajes ensaiadas. Por outro lado, o afastamento em planta dos cabos conduziu a uma menor eficiência desses elementos, implicando, assim, um decréscimo da carga resistida pela laje. Finalmente, o autor constatou que a parcela de carga equilibrante que vai para o pilar é apenas referente aos cabos que passam sobre a seção do

apoio, concluindo que a contribuição da compressão no plano da laje à resistência à punção foi pequena em comparação à contribuição gerada pela força de desvio, apesar de os dois efeitos terem retardado a fissuração do concreto.

Barbán (2003) estudou a influência dos cabos com traçado reto e curvo em planta quanto a resistência à punção. O autor confeccionou 6 lajes com $2000 \times 2000 \text{ mm}^2$ de área e 120 mm de espessura, das quais, 5 protendidas com 4 cordoalhas não aderentes espaçadas em 100 mm uma das outras, e 1 laje de concreto armado de referência (L1). Os modelos com protensão, a variável foi o ângulo de inflexão de 14° e 30° em planta (conforme exemplos L2, L4 e L6 apresentados na Figura 2.14), situação decorrente do não alinhamento dos pilares em planta.

Nos resultados obtidos nesse estudo, observou-se que a laje de referência apresentou resistência à punção reduzida, apesar de ter uma taxa de armadura passiva 6,5 vezes maior do que a taxa de armadura considerada para as lajes protendidas. Os resultados mostraram, também, que a inclinação dos cabos em planta teve pouca influência nas cargas últimas registradas. Baseado na comparação dos resultados experimentais com as normas ACI 318 (1995), CEB-FIP (1998), ABNT NBR 6118 (1978) e Eurocode 2 (1998), Barbán (2008) concluiu que, no cálculo da componente vertical, deve ser considerada somente a força de desvio dos cabos de protensão que estão contidos em um ângulo de 45° da face do pilar.

Figura 2.14 – Curvatura em planta de três lajes ensaiadas por Barbán (2003)



Fonte: Adaptado de Barbán (2003).

Em seu programa experimental, Silva (2005) ensaiou 16 lajes cogumelos protendidas com cordoalhas não aderentes. As lajes em estudo tinham $2000 \times 2000 \text{ mm}^2$ de área e 110 mm de altura útil, sendo que seus cabos eram distribuídos sobre os apoios de modos distintos. Todos os cabos tinham carga concêntrica e perfis parabólicos. Suas principais variações ocorriam nas dimensões da seção transversal dos pilares. Na Tabela 2.1, são mostradas as configurações das lajes ensaiadas pelo pesquisador. Observa-se, nela, variação na quantidade de cabos e nos seus posicionamentos nos diferentes modelos.

Tabela 2.1 – Variáveis das lajes ensaiadas por Silva (2005)

Laje	Pilar (mm)	Distribuição dos cabos	
A1	100 x 100		6 cabos a cada 100mm
A2			4 cabos a cada 100mm
A3			6 cabos a cada 250mm
A4			4 cabos a cada 250mm
B1	200 x 200		6 cabos a cada 100mm
B2			4 cabos a cada 100mm
B3			6 cabos a cada 150mm
B4			4 cabos a cada 150mm
C1	300 x 300		6 cabos a cada 100mm
C2			4 cabos a cada 100mm
C3			6 cabos a cada 150mm
C4			4 cabos a cada 150mm
D1	200 x 200		6 cabos a cada 100mm (cabos passam fora da coluna)
D2			4 cabos a cada 100mm (cabos passam fora da coluna)
D3			4 cabos a cada 100mm (cabos passam fora da coluna)
D4	Igual à laje C2		

Obs: Todos os cabos das lajes possuem o perfil parabólico

Fonte: Adaptado de Silva (2005).

Silva (2005) realizou, ainda, uma extensa revisão da literatura acerca do tema de punção de punção em lajes lisas protendidas apoiadas em pilares internos, como também comparou todos os resultados à resistência estimada pelas normas CEB-FIP (1998/1999), Eurocode 2 (2002), ACI 318 (2002) e ABNT NBR 6118 (2003). A partir dos resultados obtidos, o autor desenvolveu duas variantes para o método da descompressão, proposto inicialmente por Regan (1985). De acordo com Silva (2005), a resistência à punção em lajes protendidas pode ser calculada pela seguinte equação:

$$V_R = V_{Rc} + \frac{V}{m}(m_{po} + m_{pe}) \quad (2.6)$$

Onde:

V_{Rc} : resistência à punção em uma laje de concreto armado;

V_p : somatória da componente vertical das forças nos cabos dentro do perímetro à $h/2$ da face do pilar;

m_{pe} : momento médio na largura considerada da laje, devido a excentricidade e a componente vertical dos cabos;

m_{po} : momento de descompressão dado pela Equação (2.7);

$$m_{po} = \frac{\sigma_c h^2}{6} \quad (2.7)$$

σ_c : tensão média de compressão da laje calcula na largura da laje.

V/m : relação entre a força vertical aplicada na laje e momento da laje devido os carregamentos externos.

Ao analisar os resultados obtidos, o autor concluiu que os melhores resultados da relação entre a carga de ruptura experimental dos modelos e as previsões teóricas se deram pela aplicação dos métodos de descompressão direta propostos, seguidos dos previstos pelo Eurocode 2 (2002) e CEB-FIP (1998/1999). Verificou-se, ainda, que os resultados menos satisfatórios corresponderam aos itens que tiveram a aplicação das normas ABNT NBR 6118 (2003) e ACI 318 (2002).

Carvalho (2005) fez um estudo sobre o fenômeno da punção em lajes cogumelo de concreto protendido, com cabos não aderentes e com armadura de cisalhamento do tipo *studs*. Esse estudo teve como objetivo a proposição de métodos de cálculo de punção baseados em

equações recomendadas por normas tais como ACI 318 (2002), Eurocode 2 (2001), ABNT NBR 6118 (2003), entre outras, e se baseou na análise de resultados de ensaios experimentais para pilares internos.

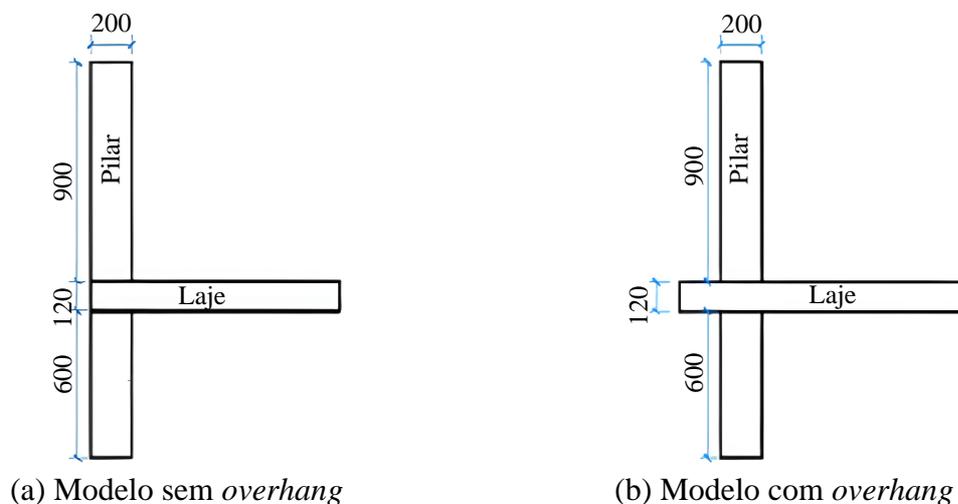
No total, foram ensaiadas 18 lajes, as quais foram utilizadas como lajes de referência. Todas elas tinham o mesmo modelo de protensão, sendo que apenas duas não possuíam armadura de cisalhamento. As lajes ensaiadas eram quadradas, com dimensões de 3000 mm de lado, 200 mm de espessura, um pilar central quadrado com lados iguais a 200mm (grupo “L”) e a 250 mm (grupo “S”). A armadura de protensão era composta por 12 monocordoalhas engraxadas do tipo CP 190 RB, sendo 10 na região central da faixa do pilar, igualmente espaçadas em 100 mm com perfil parabólico de excentricidade nos eixos x e y de 16 mm e 14,4 mm respectivamente. O estudo teve como principais variáveis a área, a distribuição, o número de camadas de armadura de cisalhamento e a largura do pilar.

A partir dos resultados obtidos nos ensaios e nas análises realizadas, o autor propôs métodos de cálculo para lajes baseados nas equações recomendadas pelas principais normas. No comportamento dos modelos, foi verificado que o uso da protensão retardou o aparecimento de fissuras. A armadura de cisalhamento aumentou a resistência à punção de 16% a 60% em relação às lajes de referência, sendo a configuração dos *studs* de forma radial aquela que apresentou um maior acréscimo de carga.

Honorato (2008), por sua vez, estudou o efeito da punção em lajes lisas. Para isso, ele utilizou laje protendida com cordoalhas não aderentes apoiada sobre pilar de borda, conforme Figura 2.15. Ele comparou os resultados de oito modelos de sua pesquisa com as diretrizes das normas NBR 6118 (2003), ACI 318 (2002) e Eurocode 2 (2001), tendo como variáveis de ensaio a dimensão dos pilares, a distribuição de cabos na laje e o avanço da laje nas bordas (*overhang*).

De acordo com a pesquisa, a norma que obteve o melhor desempenho foi o Eurocode 2 (2001), com média de 1,18 vezes superior e desvio padrão de 0,24. Já a NBR 6118 (2003) e o ACI 318 (2002) apresentaram resultados mais conservadores. Honorato também concluiu que o avanço da laje nas bordas (*overhang*) aumenta a rigidez da ligação e distribui de maneira mais uniforme os esforços de compressão na região inferior da laje, diminuindo, então, o efeito da torção. Além disso, o autor cita que a maior concentração de cabos na direção perpendicular à borda aumentou a resistência última da ligação, fato esse que não é bem avaliado pelas normas.

Figura 2.15 – Vista lateral do modelo de Honorato (2008) com medidas em milímetros



Fonte: Honorato (2008).

Em sua tese, Barbán (2008), investigou a punção em lajes cogumelo de concreto protendido, com cabos não aderentes, na ligação laje-pilar de borda. O objetivo da pesquisa era analisar os seguintes fatores: a influência da tensão de compressão; a taxa de armadura passiva; a variação do momento fletor; e a força cortante na resistência à punção da laje em pilares de borda, tendo como principal variável, nesse caso, a excentricidade da força cortante, dada pela variação da relação M (momento transferido ao pilar)/ V (força cortante).

Foram ensaiadas 15 ligações laje-pilar de borda, as quais foram divididas em 4 grupos de acordo com a função da armadura utilizada (ativa e passiva) e do carregamento aplicado. Após os testes, foram comparados os resultados obtidos com as previsões de resistência à punção segundo ACI 318 (2002), fib/1998, Eurocode 2 (2001) e NBR 6118 (2003). Barbán observou que o ACI e a NBR são as normas mais conservadoras, enquanto o Eurocode 2 possui os parâmetros mais próximos do que se vê na realidade. Entre as conclusões, é citado que, apesar de a NBR 6118 (2003) ser baseada na perspectiva europeia, os resultados são bem divergentes, tendo em vista que a norma europeia considera a tensão de compressão média no plano da laje. O autor também recomendou que todas as normas passem a levar em conta o momento desequilibrante e, por conseguinte, a excentricidade.

Carvalho (2008) examinou as normas de dimensionamento quanto à punção em lajes lisas. A pesquisa teve como objetivo, nesse cenário, comparar os critérios normativos de dimensionamento à punção aos parâmetros das normas NBR 6118 (2003), ACI 318 (2005) e Eurocode 2 (2004). Para seu estudo, Carvalho (2008) analisou quatro grupos de lajes, dentre os

quais dois se tratavam de lajes com protensão. Para isso, o autor se baseou em literaturas nacionais e internacionais, bem como em ensaios de lajes planas com carregamento simétrico.

- Grupo 2: lajes protendidas, com resistência à compressão do concreto (f_c) limitada a 50MPa. Dessas, 48 sem armadura de punção e 15 com armadura de punção.
- Grupo 4: lajes protendidas, com resistência à compressão do concreto (f_c) superior a 50MPa. Nesse caso, a amostra conteve 20 itens sem armadura de punção e 9 elementos com armadura de punção.

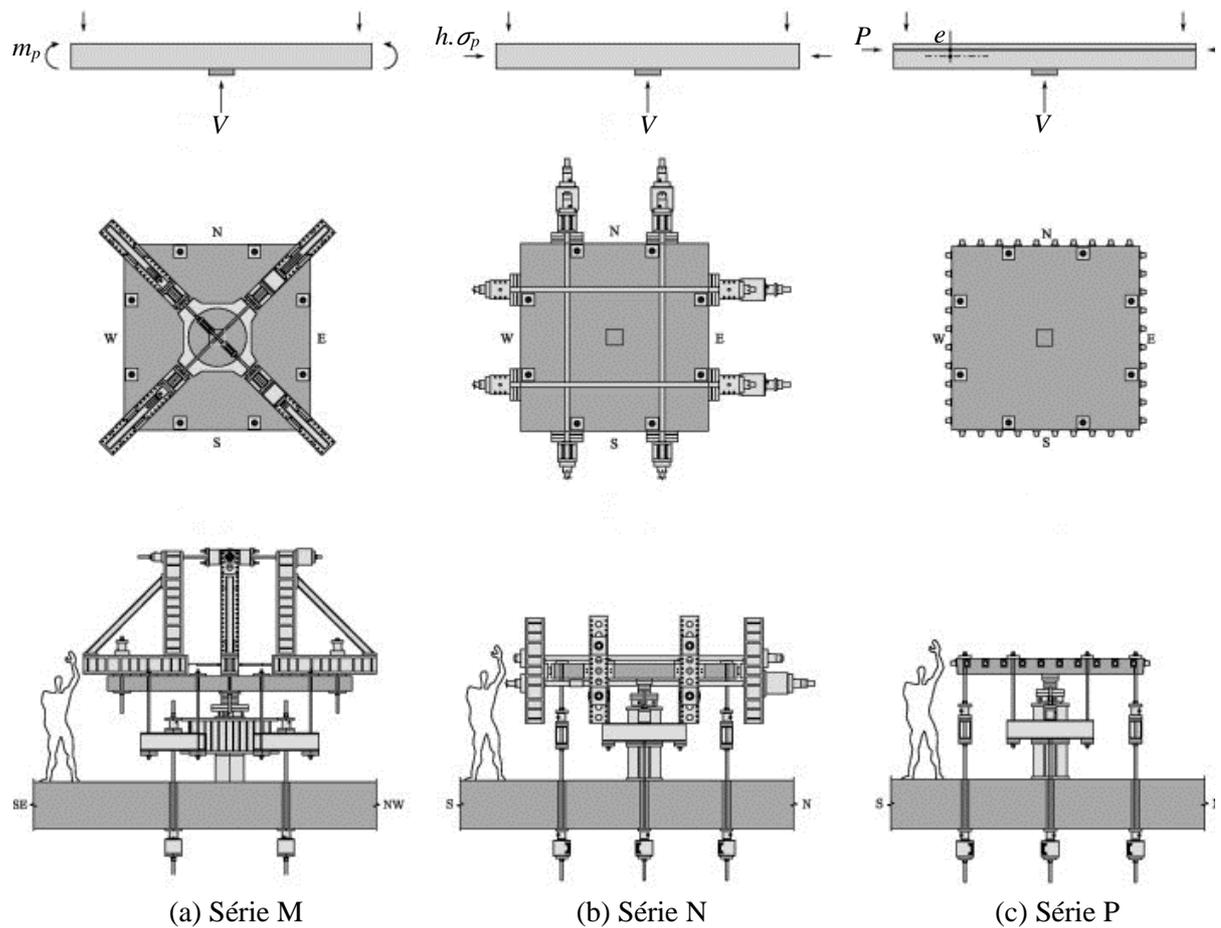
Após o desenvolvimento da pesquisa, Carvalho (2008), ao analisar os resultados obtidos, concluiu que os critérios presentes no ACI 318 (2005) e no EUROCODE 2 (2004) tiveram uma precisão correspondente a 80%, sendo que essas características se manifestaram independentemente da utilização ou não da armadura transversal de cisalhamento.

Considerando a norma brasileira, o percentual de acerto caiu para 53%, portanto, a norma americana apresentou um desempenho mais satisfatório para lajes que não possuem armadura transversal, e, quando se trata de armadura transversal, a norma europeia demonstra melhor desempenho. Para lajes em que a resistência do concreto armado é superior a 50 MPa (Grupo 4), sem a armadura transversal, pode-se afirmar que possuem segurança adequada. As condutas recomendadas pela ABNT NBR 6118 (2003) e pelo ACI 318 (2005) garantem melhores resultados de F_u/F_{calc} . Em uma avaliação geral, a norma brasileira possui menor média acima da unidade, o que significa, conseqüentemente, um perfil menos conservador.

Observou-se também que, para as lajes em concreto protendido com f_c superior a 50MPa, tendo ou não armadura transversal de cisalhamento, os três critérios normativos mensuraram, precisamente, a superfície de ruptura, com quase 90% de acerto. Quanto às lajes sem armadura transversal, o Eurocode 2 (2004) apresentou melhores resultados. Com a presença de armadura, a norma europeia também obteve melhor desempenho, juntamente com a norma brasileira.

Por fim, é preciso destacar o trabalho realizado por Clément (2014), cujo objetivo foi mensurar, individualmente, a influência de cada um dos efeitos da protensão na resistência à punção. O autor adaptou a teoria proposta por Muttoni (2008), a saber, a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (CSCT), aplicada nas lajes com protensão. Clément estudou o comportamento de 15 lajes, dividindo-as em três séries, conforme posto na Figura 2.16.

Figura 2.16 – Modelo de ensaio realizado por Clément (2014)



Fonte: Clément (2014).

Na Série M, foi estudado, de forma isolada, o efeito dos momentos externos na resistência à punção. Os momentos foram aplicados na laje por meio de um pórtico especial que introduzia forças ao longo das diagonais das lajes. Na Série N, estudou-se o efeito da compressão mediante o carregamento das lajes com forças externas horizontais. Na Série P, foram ensaiados modelos protendidos com cabos aderentes. De acordo com Clément (2014), na primeira série, houve uma redução dos deslocamentos da laje e um acréscimo da resistência à punção. Na Série N, observou-se que a força de compressão também retardou o aparecimento de fissuras, porém, ao contrário dos resultados obtidos na primeira série, os deslocamentos dos modelos foram similares aos obtidos nas lajes de referência. Tratando-se da série com protensão aderida, verificou-se uma maior rigidez e um aumento da carga última proporcional ao nível de protensão da laje.

2.5 RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS

As previsões normativas a respeito da resistência à punção se baseiam em resultados experimentais, podendo apresentar divergências entre si. Consequentemente, os métodos de cálculo adotados por diversos documentos normativos são amplamente discutidos e questionados. As formulações para lajes lisas são baseadas em uma tensão de cisalhamento nominal sobre uma seção do elemento. Essa tensão é definida pela força de cisalhamento dividida por uma área constituída por uma superfície de controle ao redor da zona carregada, que é normal ao plano da laje.

Regan e Braestrup (1985) comentam que essa abordagem da superfície de controle, embora puramente empírica, pode levar a previsões de esforços realistas e consistentes. Esse embasamento teórico é adotado por vários códigos normativos ao redor do mundo, a exemplo do europeu, do brasileiro e do americano. Nesta seção, serão apresentadas as principais recomendações a respeito do cálculo da carga última à punção de lajes lisas protendidas, com concentração de cargas centrais, sem armadura de cisalhamento, de acordo com os seguintes códigos normativos:

- ACI 318 (2019): Building Code Requirements for Structural Concrete;
- Eurocode 2 (2004): Design of concrete structures;
- ABNT NBR 6118 (2014): Projeto de Estruturas de Concreto-Procedimento;
- *fib* Model Code (2010).

2.5.1 ACI 318 (2019)

O *Building Code Requirements for Structural Concrete*, ACI 318 (2019), é o código atual elaborado pelo *American Concrete Institute*, sendo esse o código normativo utilizado para o dimensionamento de estruturas de concreto nos Estados Unidos da América (EUA). Nessa norma, é considerado para lajes lisas dois modos de ruptura por cisalhamento, em uma direção (ação como viga) ou em duas direções (puncionamento). O cálculo das tensões de lajes resistentes à punção é abordado na seção 22.6, e seu dimensionamento está baseado na Equação (2.8):

$$\phi V_n \geq V_u \quad (2.8)$$

Sendo:

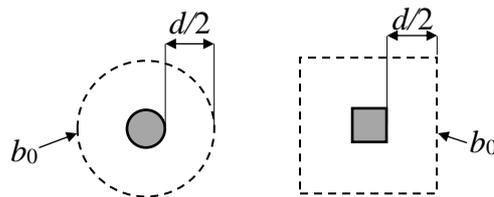
ϕ : com coeficiente de minoração igual a 0,75 e adotando-se $\phi = 1$, tem-se a força característica;

V_u : força de cisalhamento atuante na seção considerada;

V_n : força resistente nominal ao cisalhamento resistida pelo concreto, pela armadura transversal e pela armadura ativa quando houver ($V_n = V_c + V_s + V_p$).

A verificação de punção é baseada no método de superfícies e perímetros críticos, indicando que até três casos de verificações devem ser realizados. Quanto à resistência à tração diagonal, para o caso de lajes lisas, na falta de armaduras de punção, a força resistente do concreto é verificada no perímetro b_0 , a uma distância $d/2$ do pilar conforme Figura 2.17, pelo menor valor dentro de três expressões, de acordo com o expresso na Equação (2.9). Quando houver utilização de protensão, devem ser seguidos protocolos os quais indicam menor valor, conforme disposto na Equação (2.10).

Figura 2.17 – Perímetro crítico b_0



Fonte: ACI 318 (2019).

$$V_{Rd,c} = \begin{cases} \frac{4}{12} \lambda \lambda_s \sqrt{f'_c} \\ \frac{1}{12} \left(2 + \frac{4}{\beta} \right) \lambda \lambda_s \sqrt{f'_c} \\ \frac{1}{12} \left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_0} \right) \lambda \lambda_s \sqrt{f'_c} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Concreto armado} \\ \text{Concreto armado} \\ \text{Concreto armado} \end{array} \quad (2.9)$$

$$V_{Rd,c} = \begin{cases} \frac{3,5}{12} \lambda \sqrt{f'_c} + 0,3 f_{pc} + \frac{V_p}{b_0 d} \\ \frac{1}{12} \left(1,5 + \frac{\alpha_s d}{b_0} \right) \lambda \sqrt{f'_c} + 0,3 f_{pc} + \frac{V_p}{b_0 d} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Concreto protendido} \\ \text{Concreto protendido} \end{array} \quad (2.10)$$

Em que:

λ : 1,0 para concretos de densidade normal (21,55 kN/m³ a 25,60 kN/m³);

α_s : 40, 30, 20, respectivamente, para ligações laje-pilar internas, de borda e de canto;

β : razão entre a maior e a menor dimensão do pilar;

f_{pc} : valor médio da tensão de compressão nas duas direções, que não pode exceder 3,5 MPa, nem menor que 0,9 MPa;

d : altura útil da laje em milímetros;

f'_c : resistência característica à compressão do concreto, com valor limite de 70 MPa;

V_p : quando houver força de protensão efetiva dentro do perímetro de controle, $d/2$;

$\sqrt{f'_c}$: não deve ser maior que 5,8 MPa.

λ_s : fator do *size effect*, acrescido a partir da atualização da norma, calculado conforme a Equação (2.11);

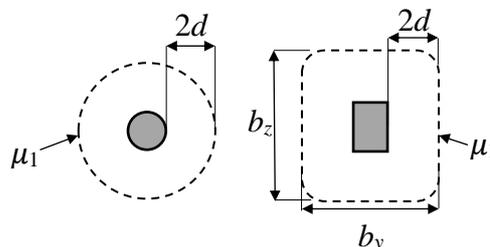
$$\lambda_s = \sqrt{\frac{2}{1+0,004d}} \leq 1,0 \quad (2.11)$$

2.5.2 Eurocode 2 (2004)

O Eurocode 2: Projeto de estruturas de concreto, Eurocode 2 (2004), localiza o primeiro perímetro de controle (μ_1), a uma distância $2d$ da face do pilar, normalmente considerada constante ou como média. A verificação de punção deve ser feita na face do pilar (área carregada, μ_0) e nos perímetros de controle.

Caso haja necessidade de armadura de cisalhamento (armadura de punção), a resistência deve ser avaliada em um perímetro adicional, mais distante, em que a armadura transversal não se fará mais necessária. Essas verificações estão ilustradas na Figura 2.18.

Figura 2.18 – Perímetros de controle típicos em torno de áreas carregadas



Fonte: Adaptado de Eurocode 2 (2004).

O ângulo de inclinação do tronco de cone de punção pode ser estimado a partir do traçado do perímetro de controle μ_l . De acordo com esta recomendação normativa, a inclinação desse elemento equivale a $26,6^\circ$.

Portanto, o Eurocode 2 (2004) indica que três casos de verificações devem ser realizados, considerando:

u_0 : perímetro do pilar ou área carregada;

u_1 : perímetro de controle afastado $2d$ da área carregada;

u_{out} : perímetro de controle afastado da camada mais externa das armaduras de cisalhamento;

O coeficiente de segurança é considerado pelo Eurocode 2 (2004) nos seguintes termos:

$\gamma_c = 1,5$ para o concreto;

f_{ck} : resistência à compressão do concreto em MPa ($f_{ck} < 90$ MPa).

σ_{cp} : tensão de compressão do concreto no plano da laje na seção crítica e com valor negativo para compressão (MPa).

A primeira superfície de controle é avaliada no perímetro do pilar ou da área carregada. Está superfície não deverá exceder a tensão máxima resistente à punção, conforme expresso na Equação (2.12):

$$v_{Ed} \leq v_{Rd,max} = 0,5v f_{cd} \quad (2.12)$$

Sendo que:

$$v_{Ed} = \beta \frac{V_{Ed}}{\mu_0 d} \quad (2.13)$$

$$v = 0,6 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] \quad (2.14)$$

v_{Ed} : tensão de cisalhamento;

V_{Ed} : é a força ou a reação concentrada de cálculo;

d : altura útil média da laje em milímetros;

β : coeficiente para considerar a excentricidade da carga e a localização do pilar (interno, de borda ou de canto), sendo que, no caso de pilares internos, pode ser adotado 1,15;

0,6: valor referente atribuído para cordoalhas de protensão.

A segunda verificação deve ser realizada considerando-se o perímetro u_l , afastado $2d$ do pilar. A armadura de cisalhamento não é necessária quando respeitado a condição (2.15):

$$v_{Ed} \leq v_{Rd,c} \quad (2.15)$$

No que tange à resistência à punção, sem consideração de armadura de cisalhamento, considera-se que a resistência por parte do concreto $v_{Rd,c}$ é dada pela Equação (2.16).

$$v_{Rd,c} = \frac{0,18}{\gamma_c} (1 + k)(100 \rho_l f_{ck})^{1/3} + \sigma_{cp} \geq v_{min} + \sigma_{cp} \quad (2.16)$$

Onde:

ρ : representa a taxa de armadura de flexão, sendo $\rho_l = (\rho_{xl} \rho_{yl})^{0,5} \leq 0,02$, ρ_{xl} e ρ_{yl} são as taxas de armadura longitudinal de acordo com cada eixo indicado. Essas devem ser calculadas como valores médios, levando em consideração uma largura efetiva igual à largura do pilar somada a $3d$ de cada lado;

σ_{cp} : tensão média na seção de controle (positiva, se for de compressão) em MPa;

k : efeito de tamanho (*size effect*) restrito a um limite máximo de 2,0, com d em mm, o qual é caracterizado pela parcela;

$$k = \left(1 + \sqrt{200/d}\right) \quad (2.17)$$

v_{min} : pode ser calculado segundo a Equação (2.18).

$$v_{min} = 0,0035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2} \quad (2.18)$$

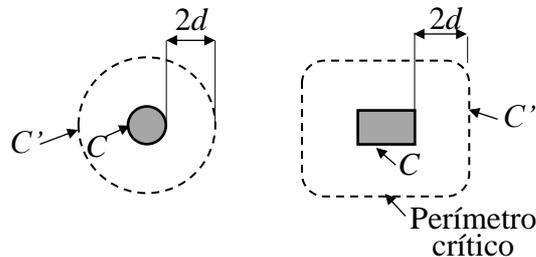
2.5.3 NBR 6118 (2014)

A ABNT NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto/Procedimento, NBR 6118 (2014), define os critérios gerais que regem os projetos com estruturas de concreto e deve ser complementada por outras recomendações normativas que estabeleçam critérios para estruturas específicas. O código normativo brasileiro permite a análise estrutural de lajes lisas mediante técnicas de diferenças finitas, elementos finitos ou elementos de contorno. A verificação da

punção inicia-se na seção 19.5 da NBR 6118 (2014) e é baseada no método de superfícies e perímetros críticos. Além disso, a norma adota a verificação em até três superfícies críticas assim como o Eurocode 2 (2004), sendo compostas pelos contornos C (análogo ao perímetro u_0), C' (análogo ao perímetro u_1) e C'' (análogo ao perímetro u_{out}).

O contorno C é localizado na face do pilar ou na carga concentrada (Figura 2.19). Nesse cenário, deve ser verificada a tensão de compressão diagonal do concreto, ou seja, o esmagamento da biela. O contorno C' , segunda superfície crítica, assim como no Eurocode 2 (2004), está a uma distância de $2d$ da face do pilar ou da carga concentrada (Figura 2.19).

Figura 2.19 – Perímetro crítico em pilares internos



Fonte: Adaptado de NBR 6118 (2014).

No que tange ao fenômeno de punção, as recomendações da norma brasileira compartilham muitas semelhanças com os parâmetros europeu 2.5.2. Portanto, os roteiros de dimensionamento serão apresentados de acordo com o Eurocode 2 (2004), ressaltando as diferenças presentes entre eles.

A tensão solicitante nas superfícies críticas C e C' para pilar interno, com carregamento simétrico, é definida conforme a Equação (2.19):

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{\mu d} \quad (2.19)$$

Sendo:

d : altura útil da laje ao longo do contorno crítico C' em cm;

μ : perímetro do contorno crítico C' ;

F_{sd} : força concentrada de cálculo.

Assim como o Eurocode 2 (2004), a NBR 6118 (2014) indica que três casos de verificações devem ser realizados:

A primeira superfície de controle é avaliada no perímetro crítico na face do pilar ou na área carregada a fim de evitar uma ruptura por compressão diagonal:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27\alpha_v f_{cd} \quad (2.20)$$

Onde:

$$\alpha_v = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right), f_{ck} \text{ em MPa};$$

τ_{Sd} : tensão de cisalhamento;

τ_{Rd2} : tensão resistente de compressão;

f_{cd} : resistência à compressão do concreto em MPa ($f_c \leq 90$ MPa).

A segunda verificação deve ser realizada referente ao contorno C' . A armadura de cisalhamento não é necessária quando $\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd2}$ é satisfeito.

No que tange à resistência à punção sem consideração de armadura de cisalhamento, o código normativo brasileiro apresenta que a resistência por parte do concreto é dada pela Equação (2.21). Ela também deve ser considerada para além da região armada, quando necessária armadura de punção.

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1} = 0,13 \left(1 + \sqrt{200/d}\right) (100\rho f_{ck})^{\frac{1}{3}} + 0,10 \sigma_{cp} \quad (2.21)$$

Em que;

$0,10\sigma_{cp}$: representa a compressão no plano da laje que age em favor da resistência à tração diagonal;

$\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y}$ onde ρ_x e ρ_y , são as taxas de armadura de flexão aderente (armadura não aderente deve ser desprezada) nas direções ortogonais, considerando-se, nesse cenário, só as barras dentro de uma distância $3d$ da face do pilar.

Tratando-se de lajes protendidas, na NBR 6118 (2014), a verificação da tensão solicitante efetiva é feita subtraindo-se a tensão dos cabos de protensão da tensão solicitante, conforme Equação (2.22).

$$\tau_{Sd,ef} = \tau_{Sd} - \tau_{Pd} \quad (2.22)$$

Sendo:

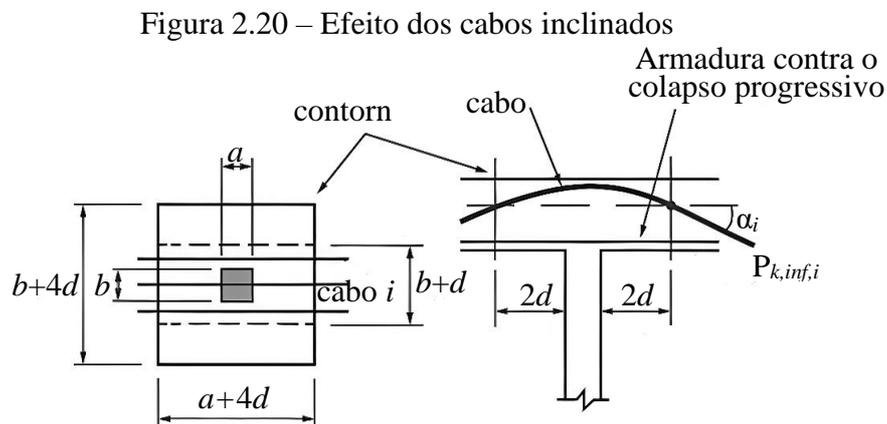
$$\tau_{Pd} = \frac{\sum P_{k,inf,i} \sin \alpha_i}{ud} \quad (2.23)$$

τ_{Pd} : é a tensão relacionada ao efeito dos cabos de protensão inclinados que atravessam o contorno considerado e que passam a menos de $d/2$ da face do pilar;

$P_{k,inf,i}$: é a força de protensão no cabo i ;

α_i : é a inclinação do cabo i em relação ao plano da laje no contorno considerado (ver Figura 2.20);

u : é o perímetro crítico considerado, em que se calculam $\tau_{Sd,ef}$ e τ_{Sd} .



Fonte: NBR 6118 (2014).

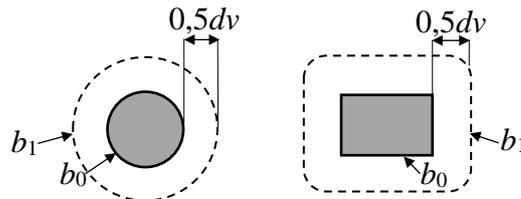
2.5.4 *fib* Model Code (2010)

O *fib* Model Code (2010) (MC2010), tem como premissa o bom desempenho das estruturas de concreto e, para tanto, o código analisa o comportamento ideal das estruturas, o que inclui todo o ciclo de vida delas, desde a avaliação desses elementos, passando pela manutenção por eles exigida, bem como pelos reforços necessários, até as possíveis demolições para os diversos tipos de construções consideradas.

Os códigos normativos apresentados anteriormente baseiam-se em modelos empíricos, ao contrário das recomendações do MC2010, que se norteiam pelo modelo físico da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (*Critical Shear Crack Theory*) proposta por Muttoni (2008). Vale mencionar que, nessa teoria, a resistência da laje à punção, abordada no item 7.3.5, depende da magnitude da abertura de uma fissura crítica que está relacionada à rotação da laje

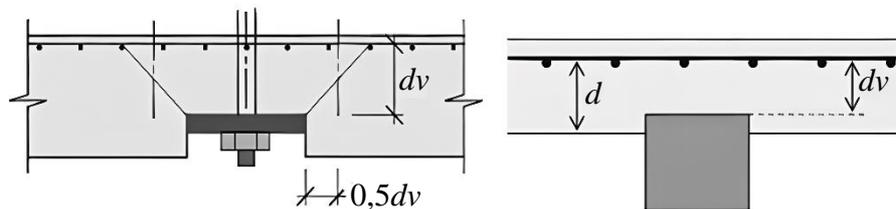
a cada nível de carga solicitante. O MC2010 indica que o perímetro de controle se localiza a uma distância $0,5d_v$ a partir da região de suporte ou da área carregada (Figura 2.21), sendo enfatizada a diferença entre duas alturas úteis.

Figura 2.21 – Perímetro de controle



Fonte: Adaptado de *fib Model Code* (2010).

Figura 2.22 – Diferença entre alturas úteis d e d_v



Fonte: *fib Model Code* (2010).

Sendo:

d_v : altura efetiva da laje;

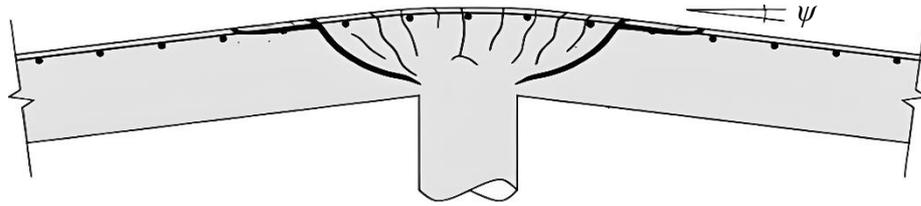
d : altura útil para fins de cálculo;

Para determinar a força de resistência à punção, deve-se obedecer à Equação (2.24), sendo $V_{Rd,c}$ a parcela de resistência proveniente do concreto e $V_{Rd,s}$ a contribuição da armadura de cisalhamento para a resistência da laje. No caso de lajes sem armadura de cisalhamento, a parcela $V_{Rd,s}$ será nula.

$$V_{Rd} = V_{Rd,c} + V_{Rd,s} \quad (2.24)$$

O modelo de cálculo apresentado pelo MC2010, depende fundamentalmente das rotações ψ que a laje apresenta para cada nível de carga solicitante (Figura 2.23), sendo apresentados quatro níveis de aproximação (*Level of Approximation – LoA*) para o cálculo deste parâmetro.

Figura 2.23 – Rotação da laje e abertura de fissuras



Fonte: *fib Model Code* (2010).

LoA I:

$$\psi = 1,5 \frac{r_s f_{ys}}{d E_s} \quad (2.25)$$

LoA II:

$$\psi = 1,5 \frac{r_s f_{ys}}{d E_s} \left(\frac{m_{sd}}{m_{Rd}} \right)^{1,5} \quad (2.26)$$

LoA III:

$$\psi = 1,2 \frac{r_s f_{ys}}{d E_s} \left(\frac{m_{sd}}{m_{Rd}} \right)^{1,5} \quad (2.27)$$

LoA IV:

ψ é calculado com base em análises não lineares da estrutura.

Os termos empregados são:

r_s : distância entre o centro geométrico do pilar até o raio em que o momento fletor for zero;

f_{yd} : valor de cálculo da tensão de escoamento da armadura de flexão;

E_s : módulo de elasticidade das armaduras de flexão;

m_{sd} : para ligações laje-pilar internas, pode ser considerado $V_{Ed}/8$ (V_{Ed} é a força cortante que atua na laje);

m_{Rd} : resistência à flexão média de projeto por unidade de comprimento em uma faixa carregada, conforme a Equação (2.28).

$$m_{Rd} = \rho f_{ys} d^2 \left(1 - \frac{\rho f_{ys}}{2 f_c} \right) \quad (2.28)$$

Alguns coeficientes devem ser calculados preliminarmente ao início das verificações de resistência.

k_ψ é um parâmetro relacionado à rotação da laje em torno do pilar, em radianos, calculada através da Equação (2.29).

$$k_\psi = \frac{1}{1,5 + 0,9\psi d_v k_{dg}} \leq 0,6 \quad (2.29)$$

k_{dg} tem vínculo com o tamanho do agregado, onde $k_{dg} = \frac{32}{16 + d_g} \geq 0,75$, e d_g o tamanho máximo do agregado em (mm).

Com base nos parâmetros estabelecidos, é possível determinar a carga máxima de resistência ao puncionamento, sem considerar armadura de cisalhamento. Usa-se, para isso, a Equação (2.30).

$$V_{Rd,c} = k_\psi \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_0 d_v \quad (2.30)$$

Onde, f_{ck} é a resistência à compressão do concreto em MPa e γ_c é o coeficiente de segurança com valor de 1,5.

Quando há protensão na laje é desconsiderado o nível I, e as expressões (2.26) e (2.27) são modificadas para:

LoA II:

$$\psi = 1,5 \frac{r_s f_{ys}}{d E_s} \left(\frac{m_{sd} - m_p}{m_{Rd} - m_p} \right)^{1,5} \quad (2.31)$$

LoA III:

$$\psi = 1,2 \frac{r_s f_{ys}}{d E_s} \left(\frac{m_{sd} - m_p}{m_{Rd} - m_p} \right)^{1,5} \quad (2.32)$$

Sendo m_p o momento de descompressão na largura da faixa de suporte, $b_s = 1,5r_s$, que pode ser determinado pelo momento isostático da protensão conforme equação:

$$m_p = \frac{N_p e_p}{b_s} \quad (2.33)$$

Onde:

N_p : força normal devido a soma da protensão de cada cordoalha que intercepta o perímetro crítico (b_i);

e : excentricidade da força normal no ponto onde os cabos de protensão interceptam o perímetro crítico (b_i).

A equação do momento médio resistente fletor por unidade de comprimento da laje também é modificada para considerar o efeito da compressão gerada pela protensão.

$$m_{Rd} = \rho d f_y \left(d - \frac{h}{2} \right) + f_{cp} \chi_{pl} \left(\frac{h}{2} - \frac{\chi_{pl}}{2} \right) \quad (2.34)$$

Em que:

f_{cp} : resistência plástica do concreto, dada por $f_{cp} \left(\frac{30\text{MPa}}{f_c} \right)^{1/3} \leq f_c$;

χ_{pl} : altura da região comprimida do concreto na seção, assumindo uma distribuição de tensões plásticas constantes.

$$\chi_{pl} = \frac{(\rho d f_y - \sigma_p h)}{f_{cp}} \quad (2.35)$$

Com isto, a componente vertical de protensão V_p deve ser subtraída da força cortante V_E que atua na laje:

$$V_E - V_p \leq V_{Rd,c} \quad (2.36)$$

2.5.5 Resumo dos códigos normativos

A seguir é apresentado de forma resumida as capacidades máximas resistidas para verificação de lajes lisas protendidas sem armadura contra o cisalhamento no perímetro de controle afastado do pilar, de acordo com os códigos normativos apresentados anteriormente.

Tabela 2.2 – Resumo das capacidades máximas de cada código normativo

Códigos	Capacidade máxima
ACI 318 (2019)	$v_c = \min. \begin{cases} \frac{3,5}{12} \lambda \sqrt{f'_c} + 0,3f_{pc} + \frac{V_p}{b_0 d} \\ \frac{1}{12} \left(1,5 + \frac{\alpha_s d}{b_0}\right) \lambda \sqrt{f'_c} + 0,3f_{pc} + \frac{V_p}{b_0 d} \end{cases}$
Eurocode 2 (2004)	$v_{Rd,c} = \frac{0,18}{\gamma_c} \left(1 + \sqrt{200/d}\right) \left(100\rho_l f_{ck}\right)^{1/3} + \sigma_{cp}$
NBR 6118 (2014)	$\tau_{Rd1} = 0,13 \left(1 + \sqrt{200/d}\right) \left(100\rho_l f_{ck}\right)^{1/3} + 0,10\sigma_{cp}$
<i>fib</i> Model Code (2010)	$V_{Rd,c} = k_\psi \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_0 d_v$

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO À ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS EM CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO

A análise numérica baseada no método dos elementos finitos (MEF) tem se convertido em uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas da mecânica dos meios contínuos. Essa técnica é atualmente aplicada a diversas áreas do conhecimento, pois possibilita a obtenção de soluções aproximadas para problemas complexos por meio da subdivisão de seu domínio em problemas mais simples, incluindo o comportamento de estruturas de concreto armado e protendido.

Conforme Rao (2017), nesse método específico, o domínio da matéria, como em sólidos, líquidos ou gases, é representado por um conjunto de pequenos problemas de solução simplificada. Dessa forma, o problema é discretizado em vários elementos de dimensões reduzidas, denominadas *elementos finitos*, com geometria simples. A esse conjunto de elementos dá-se o nome de *método dos elementos finitos* (MEF). Tais elementos podem ter formas geométricas diversas tanto em modelos de volume 3D ou elementos lineares do tipo barra, sendo implementados de maneira a reduzir a continuidade do problema para um domínio em que o comportamento pode ser regido por equações técnicas.

Os elementos, por sua vez, são conectados por nós, que ficam localizados nos limites do elemento, os quais são caracterizados por serem pontos em que um conjunto de equações algébricas de equilíbrio é estabelecido e funções de aproximação, também chamadas de modelos de interpolação, são obtidas dos valores das variáveis de campo nos nós. Escrita todas as equações de equilíbrio, que geralmente estão na forma de equações matriciais, são conhecidas as novas incógnitas que serão os valores nodais da variável de campo, e assim define a variável ao longo do conjunto do elemento (RAO, 2017).

Segundo Rades (2006), o MEF é originado dos métodos de Rayleigh-Ritz e de Galerkin, tendo sido formulado basicamente em meados dos anos de 1950, contexto esse em que, em vez de se procurar encontrar uma função que satisfaça às condições de contorno de todo o domínio do problema, definem-se funções admissíveis chamadas de *funções de forma* sobre o domínio dos elementos finitos, os quais possuem geometria bem mais simplificada.

Rao (2017) descreve, de modo geral, seis passos para a solução de problemas estáticos de estruturas:

1. Discretização: prevê a divisão do domínio de integração, contínuo, em um número finito de pequenas regiões denominadas elementos finitos. Torna-se, nesse contexto, o

meio contínuo em discreto decidindo número, tamanho, tipo lineares, bidimensionais ou tridimensionais, e arranjo dos elementos. A relação entre o número de elementos escolhidos e o tamanho destes interferem fortemente nos resultados, sendo que quanto mais elementos forem utilizados existe uma tendência de aumentar a precisão dos resultados obtidos, porém, deve-se observar que, elementos muito pequenos ou com pequenos ângulos, podem recair em problemas numéricos de parametrização e maior será o tempo necessário de processamento, demandando considerável esforço computacional. Por esse motivo, indica-se que malhas mais refinadas sejam utilizadas em pontos de concentração de cargas.

2. Seleção de um modelo adequado de deslocamento: uma vez que a solução de deslocamento de uma estrutura complexa sob quaisquer condições de carga especificadas não pode ser prevista, deve-se escolher uma solução simples do ponto de vista do processamento computacional, a qual deve satisfazer certos requisitos de convergência, sendo essa solução, geralmente, uma equação polinomial.

3. Obtenção das matrizes de rigidez dos elementos e dos vetores de carga: baseados na lei de deslocamento escolhida, obtém-se a matriz de rigidez $[K^{(e)}]$ e o vetor de cargas $[P^{(e)}]$ utilizando um princípio variacional adequado, uma abordagem residual ponderada ou condições de equilíbrio.

4. Obtenção das equações de equilíbrio globais: uma vez que a estrutura é composta por vários elementos finitos, as matrizes de rigidez de elementos individuais e os vetores de carga devem ser dispostos de uma forma adequada e as equações de equilíbrio globais têm de ser formuladas como a Equação (3.1):

$$[K] \vec{\Phi} = \vec{P} \quad (3.1)$$

Sendo que:

$[K]$: matriz global de rigidez da estrutura;

$\vec{\Phi}$: vetor dos deslocamentos atuantes na estrutura;

\vec{P} : vetor das forças nodais atuantes na estrutura.

5. Solução dos deslocamentos nodais desconhecidos: As equações gerais do equilíbrio devem ser modificadas para considerarem as condições de contorno do problema, e após a incorporação destas condições, a equação pode ser expressa como a Equação (3.2).

$$[K] \vec{\Phi} = \vec{P} \quad (3.2)$$

Para problemas lineares, o vetor pode ser resolvido facilmente, porém para os problemas não lineares, a solução deve ser obtida de forma iterativa, sendo que, para cada passo, deve-se levar em conta a modificação da matriz de rigidez e do vetor deslocamento, conforme lei constitutiva do material.

6. Cálculo das tensões e deformações: a partir dos deslocamentos nodais conhecidos " $\vec{\Phi}$ ", pode-se obter as tensões e as deformações por meio das equações da mecânica dos sólidos.

Em sua maioria, programas baseados em MEF possibilitam ao usuário definir qual tipo de malha será utilizada, além de serem capazes de gerá-las automaticamente. Os resultados podem ser obtidos graficamente, o que auxilia os projetistas na avaliação dos níveis de tensão e de deformação do elemento.

Sistemas de análise não linear baseados no MEF estão sendo cada vez mais utilizados para o estudo de estruturas. Nesse cenário, pesquisas que levariam meses e exigiam toda uma estrutura de suporte, como laboratórios, ferramentas, entre outras coisas, podem ser realizadas em frente a um computador pessoal a qualquer tempo construindo inúmeros modelos com base em poucos dados experimentais. Dentre algumas vantagens para sua utilização, pode-se citar a aplicação a qualquer problema de campo, sem restrição quanto à geometria, ao carregamento e às condições de contorno do problema. Cabe mencionar, ainda, a variedade de materiais entre elementos, a compatibilidade de forma quanto ao corpo ou à região analisada. Ademais, a aproximação dos resultados pode ser melhorada refinando-se a malha de elementos finitos (convergência). Essas características fizeram com que o MEF evoluísse e se tornasse capaz de realizar análises lineares e não-lineares, estáticas e dinâmicas em várias áreas da engenharia.

Normas de projeto como a NBR 6118 (2014) propõem a utilização do MEF quando há limitações dos métodos analíticos com geometrias complexas dotadas de comportamento não linear, como em apoios de pré-moldados, devido às singularidades geométricas e de carregamento desses índices. Fica a critério do engenheiro determinar quais são as melhores relações constitutivas para os materiais e os métodos iterativos mais eficazes para resolução dos sistemas de equações, pois a referida norma não apresenta diretrizes para a aplicação do MEF.

3.1 ANÁLISE NÃO LINEAR NO ATENA

O programa *ATENA*, baseado em elementos finitos, foi desenvolvido pela empresa Cervenka Consulting, com sede na República Tcheca, e atualmente se encontra na versão 5.9 (2022), estando disponível em versão bidimensional (*ATENA 2D*) e na versão utilizada neste trabalho, a qual é voltada para análises tridimensionais (*ATENA 3D*).

O *ATENA* é um *software* de análise centrado em estruturas de concreto e que se mostra capaz de realizar análises não-lineares com pré e pós-processamento integrado e solução de elementos finitos. Ele possibilita a introdução de variedades de novos materiais, bem como a mobilização de métodos de solução e outros recursos, tais como, por exemplo, opções para 3D, deformação plana, análise axial-simétrica ou elementos de casca (CERVENKA *et al.*, 2016).

Por meio desse sistema, é possível obter o modo de ruptura e do panorama de fissuração das estruturas, além de identificar a forma de escoamento das armaduras, sendo a distribuição de esforços internos feita automaticamente conforme a fissuração do concreto. Com uma interface de fácil compreensão, no *ATENA*, é viável definir os elementos estruturais e posicionar as barras de aço. Via ferramenta de análise, pode-se visualizar as deformações e a fissuração dos elementos, tanto em suas superfícies externas como em camadas internas definidas pelo usuário.

Para conseguir uma correta simulação das propriedades de um material via MEF, é necessário ter uma idealização matemática do seu comportamento que permita estabelecer equações que relacionam as tensões e as deformações. Essa abordagem matemática é conhecida como *modelo constitutivo*.

Na natureza, os materiais existentes apresentam comportamento não linear, ou seja, não existe uma relação linear entre tensão e deformação para esses itens. Apesar disso, para facilitar o estudo desses elementos, relações lineares são adotadas a fim de facilitar o entendimento das leis que regem estes materiais, o que torna possível que problemas de grande complexidade sejam analisados de forma racional e eficaz.

Muitos dos materiais como o concreto e o aço, quando submetidos a pequenas deformações, possuem seus comportamentos aproximados de lineares, deixando de apresentar esse comportamento, por outro lado, quando há elevados níveis de deformações. Isso está intimamente relacionado à propriedade do material, porque, se as deformações forem altas, as tensões geralmente também são. Segundo Cervenka *et al.* (2016), equações constitutivas lineares podem ser empregadas para um material que está longe de seu ponto de ruptura,

geralmente em até 50% de sua resistência. Isso depende do tipo de material, como, por exemplo, a borracha, que deve ser considerada um material não linear. Porém, para materiais usuais de engenharia civil, a suposição anterior é satisfatória.

O dimensionamento de estruturas de concreto com base nos esforços obtidos por uma análise linear é adequado e conduz a resultados satisfatórios ao projetista, desde que se atenda à ductilidade mínima das peças (NBR 6118:2014). Esses resultados, normalmente, são usados para a verificação simplificada no Estado Limite de Utilização. Para a grande maioria das estruturas de concreto armado, no entanto, é possível estender os índices encontrados para as verificações aproximadas de Estado Limite Último, mesmo com altas tensões, desde que se observe a ductilidade em determinadas seções críticas sujeitas a maiores rotações. De acordo com Cervenka *et al.* (2016), a equação geométrica é linear quando os termos quadráticos são desprezados, negligenciando-se, durante a análise, a mudança de forma e de posição da estrutura. Porém, como dito anteriormente, o comportamento dos materiais não é perfeitamente linear e, para que se obtenha o máximo do comportamento real da estrutura, uma análise não linear se faz necessária, podendo ser empregada por interações de carregamento quando há incertezas na verificação

Para Lourenço e Figueiras (1995), a análise não linear não se trata apenas de uma ferramenta de projeto, mas sim da verificação de estruturas, uma vez que, para a sua realização, é necessário que as geometrias e o posicionamento dos elementos analisados já estejam previamente definidos. Desse modo, a partir das relações constitutivas reais dos materiais, é possível determinar o comportamento das estruturas, mais precisamente através da compatibilização dos deslocamentos a cada etapa de carregamento aplicado.

A NBR 6118 (2014) permite realizar análises não lineares tanto para verificações de estados limites últimos como para verificações de estado limites de serviço. A análise não-linear considera o concreto armado trabalhando com um comportamento não linear, levando em conta ou não os efeitos de segunda ordem. Algumas condições devem ser necessariamente satisfeitas, dentre as quais estão a de equilíbrio, a de compatibilidade e a de ductilidade.

Segundo Cervenka *et al.* (2016), apesar de para a grande maioria das estruturas as simplificações lineares serem bastante aceitáveis, existem estruturas quando é necessário levar em consideração algum comportamento não linear. As equações governantes resultantes são, então, muito mais complicadas e, normalmente, não têm uma solução de forma fechada. Por consequência, nesse caso, algum esquema de solução iterativa não linear deve ser usado.

A análise não linear pode ser classificada de acordo com o tipo de comportamento não linear. Seus segmentos são:

- Não linearidade física: só precisa ser contabilizado o comportamento não linear do material. Este é o caso mais comum para estruturas comuns de concreto armado. Devido às limitações do estado de serviço, as deformações são relativamente pequenas. No entanto, a resistência à tração muito baixa do concreto precisa ser considerada.
- Não linearidade geométrica: referem-se às deformações que são grandes o suficiente para que as equações de equilíbrio usem a forma deformada da estrutura. Todavia, as deformações relativas ainda são pequenas e a forma completa das equações geométricas, incluindo termos quadráticos, deve ser empregada, mas as equações constitutivas continuam sendo lineares. Este grupo de análises não lineares inclui a maioria dos problemas de estabilidade.

O último grupo refere-se ao uso de equações não lineares dos materiais e da geometria da estrutura. Além disso, Cervenka *et al.* (2016), consideram que não é possível aplicar repentinamente o valor total da carga, mas é necessário integrar em incrementos de tempo (ou incrementos de carga), a cada incremento de carga, a nova posição deformada da estrutura. Essa é a abordagem mais precisa e geral, porém, infelizmente, trata-se também da mais complicada. Em função disso, existem duas possibilidades básicas para formular o comportamento estrutural geral com base em sua forma deformada:

- **Formulação de Lagrange:** Neste caso, estamos interessados no comportamento de partículas infinitesimais de volume (dV). Seu volume irá variar dependendo do nível de carga aplicado e, conseqüentemente, da quantidade de deformações decorrente. Este método é geralmente usado para calcular estruturas de engenharia civil.
- **Formulação de Euler:** A ideia essencial da formulação de Euler é estudar o "fluxo" do material estrutural por meio de volumes de estrutura infinitesimais e fixos. Esta formulação é mais recomendada para análise de fluidos, de fluxo de gás, de tribulação e de elementos que participam de processos em que, de modo geral, existem grandes fluxos de material.

Segundo Cervenka *et al.* (2016), para a análise estrutural, é mais recomendada a formulação Lagrangiana. Portanto, optou-se por deixar a atenção restrita a ela nesta pesquisa. Duas formas da formulação Lagrangiana são possíveis. As equações governantes podem ser escritas em relação à configuração original não deformada no tempo " t " = 0, sendo chamadas, nesse caso, de Formulação Lagrangiana Total (TL). Quando tem-se uma configuração

deformada mais recente no tempo “ $t + \Delta t$ ”, há a chamada Formulação Lagrangiana Atualizada (UL), contexto esse em que uma análise geral de uma estrutura consiste na aplicação de muitos pequenos incrementos de carga. Em cada um desses incrementos, um procedimento de solução iterativa deve ser executado para obtenção de uma resposta estrutural no final do incremento. Portanto, determinando o início e o fim do incremento de carga por t e $t + \Delta t$ em cada etapa, conhecemos o estado estrutural no tempo t (a partir das etapas anteriores) e resolvemos o estado no tempo $t + \Delta t$. Esse procedimento é repetido quantas vezes forem necessárias para se atingir o nível final (total) de carregamento.

Segundo Cervenka *et al.* (2016), é difícil dizer qual formulação é melhor porque ambas têm suas vantagens e desvantagens. Normalmente, para fins de decisão, depende-se da estrutura particular que está sendo analisada, de modo que qual delas usar fica a critério do projetista. Desde que as equações constitutivas sejam adequadas, os resultados para ambos os métodos são idênticos.

O *software* ATENA, em sua versão 5.9, empregado nesta pesquisa, usa a formulação Lagrangiana atualizada e suporta o terceiro nível de comportamento não linear.

3.1.1 Considerações gerais

O modelo constitutivo implementado no *ATENA* 3D, combina o comportamento de tração (fratura) e compressão (plástico). O modelo de fratura é baseado na formulação clássica de fissura ortotrópica distribuída e no modelo de faixas de Bazant. Nesse contexto, emprega-se o critério de ruptura de Rankine, a saber, de *softening* exponencial, o qual pode ser usado no modelo de fissuras fixa ou rotacional conforme (ver item 3.2). O modelo de *hardening* ou *softening* plástico é baseado na superfície de ruptura de Menétrey-William.

Esse modelo usa um algoritmo, “*return mapping*” para a integração das equações constitutivas, descrito em Cervenka e Papanikolaou (2008). O algoritmo utiliza a formulação de De Bosrt (1986), e é baseado em uma substituição recursiva e permite que os dois critérios, tração e compressão, sejam melhorados e formulados separadamente. Ele consegue suportar, ainda, casos em que a superfície de ruptura de ambos os modelos foi atingida e, também, mudanças físicas, como o fechamento de fissuras. O modelo pode ser usado para simular a fissuração do concreto, esmagamento devido ao confinamento e mudanças físicas tais como o fechamento de fissuras devido ao esmagamento do concreto em outra direção.

3.2 MODELO CONSTITUTIVO DO CONCRETO

O modelo de material cimentício inclui os seguintes efeitos do comportamento do concreto:

- Comportamento não linear na compressão, incluindo os efeitos de *hardening* e *softening*;
- Fratura do concreto em tração com base na mecânica da fratura não linear;
- Critério de falha de resistência biaxial;
- Redução de resistência à compressão após a fissuração;
- Efeito de enrijecimento por tração “*Tension stiffening*”;
- Dois modelos de fissura, a saber, direção de fissura fixa e direção de fissura rotacionada.

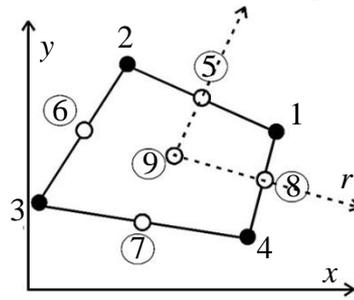
A matriz do material é derivada de abordagem elástica não linear, nas quais as constantes elásticas são derivadas de uma função composta por tensão *versus* deformação, chamada pelo programa de lei uniaxial equivalente. Essa abordagem é semelhante ao modelo constitutivo hipoeelástico não linear, exceto pelo fato de que, no primeiro cenário, leis são usadas para carregamento e descarregamento, causando a dissipação da energia esgotada pelo dano do material.

3.2.1 Representação do modelo para o concreto

O modelo de elementos finitos utilizado para simular o comportamento do concreto não fissurado, ou com fissuração distribuída, pode ser representado por elementos planos, elementos 2D ou elementos 3D. Esse é o modelo padrão para o estado plano de tensões com solução em deslocamentos, sendo largamente empregado em análise não linear de estruturas de concreto armado.

O concreto pode ser representado no *ATENA* na modelagem de duas dimensões pelos elementos quadriláteros planos, codificados no grupo de elementos *CCIsoQuad*. Estes elementos são isoparamétricos e integrados por meio da integração de Gauss, de 4 a 9 pontos de interpolação para interpolação bilinear ou biquadrática. Esses itens estão disponíveis para problemas 2D, 3D e axissimétricos. A Figura 3.1 representa a geometria desses elementos.

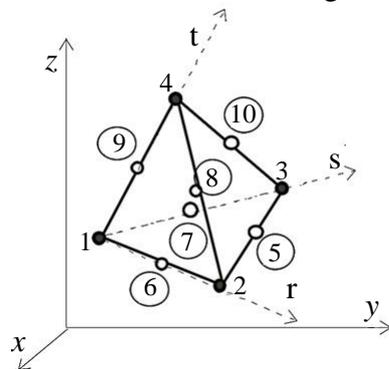
Figura 3.1 – Geometria de elementos quadriláteros planos



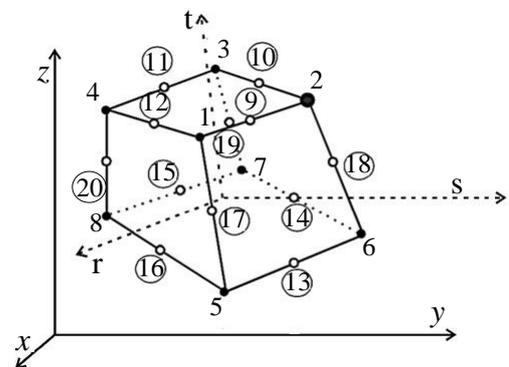
Fonte: CERVENKA *et al.* (2016).

Para a modelagem em 3D, os elementos finitos do *ATENA* também possibilitam a utilização de elementos sólidos 3D. A biblioteca de elementos finitos inclui os grupos de elementos tetraédricos contendo de 4 a 10 nós, conforme Figura 3.2a, e elementos hexaédricos do tipo *brick* contendo de 8 até 20 nós, conforme Figura 3.2b.

Figura 3.2 – Elementos 3D



(a) Elemento tetraédrico



(b) Elemento hexaédrico

Fonte: CERVENKA *et al.* (2016).

3.2.2 Parâmetros do modelo constitutivo

O modelo constitutivo do concreto inclui 20 parâmetros de material. Esses parâmetros podem ser especificados para o problema em consideração pelo usuário ou caso os parâmetros não sejam conhecidos, a geração automática pode ser feita usando-se as fórmulas padrão fornecidas na Tabela 3.1. Em tal caso, somente a resistência do concreto, f'_c , é especificada, de modo que os demais parâmetros são calculados como funções da resistência do corpo de prova cúbico. Conforme Cervenka *et al.* (2016), as fórmulas para essas funções são retiradas do Código Modelo CEB-FIP 90.

Nos casos de simulação de comportamento real, os parâmetros devem ser escolhidos o mais próximo possível das propriedades dos materiais reais. A melhor maneira de determinar essas propriedades é a partir de testes mecânicos em amostras de material.

Tabela 3.1 – Fórmulas padrão para os parâmetros do material

Parâmetros:	Fórmulas:
Resistência cilíndrica	$f'_c = -0,85 f'_{cu}$
Resistência à tração	$f'_t = 0,24 f'_{cu} \frac{2}{3}$
Módulo de elasticidade inicial	$E_c = (6000 - 15,5 f'_{cu}) \sqrt{f'_{cu}}$
Relação de Poisson	$\nu = 0,2$
Limite de Esmagamento	$w_d = -0,0005 \text{mm}$
Modelo de <i>softening</i> à tração	1 – exponencial, baseado em G_F
Resistência à compressão em concreto fissurado	$c = 0,8$
Tensão de enrijecimento sob tração	$\sigma_{st} = 0$
Fator de retenção ao cisalhamento	Variável
Função modelo sob tração e compressão	Linear
Energia de fratura G_f conforme Vos (1983)	$G_f = 0,000025 f_t'^{ef} \text{ [MN/m]}$
Fator de orientação para localização das deformações	$\gamma_{max} = 1,5 \text{ (item 3.2.4)}$

Fonte: Adaptado de CERVENKA *et al.* (2016).

3.2.3 Relações tensão *versus* deformação para o concreto

O comportamento não linear do concreto no estado de tensão biaxial é descrito pela tensão efetiva σ_c^{ef} – que é, na maioria dos casos, sua tensão principal – e pela deformação equivalente ε^{eq} , introduzida para eliminar o efeito de Poisson no estado plano de tensão:

$$\varepsilon^{eq} = \frac{\sigma_{ci}}{E_{ci}} \quad (3.3)$$

A deformação uniaxial equivalente pode ser considerada como a deformação que seria produzida pela tensão σ_{ci} em um ensaio uniaxial com módulo E_{ci} associado à direção i . Dentro dessa suposição, a não linearidade representando um dano é causada apenas pela tensão governante σ_{ci} .

Essa construção é usada na equação constitutiva para calcular as tensões para o estado de deformação.

O módulo tangente E_c^t é utilizado na matriz do material \mathbf{D}_c para construção de uma matriz de rigidez do elemento para a solução iterativa. O módulo tangente é a inclinação da curva tensão-deformação em uma determinada deformação e se caracteriza por ser sempre positivo. Nos casos em que a inclinação da curva é menor que o valor mínimo E_{min}^t , o valor do módulo tangente é definido por $E_c^t = E_{min}^t$. Isso ocorre nas faixas de *softening* e próximo ao pico de compressão.

A descrição detalhada da lei tensão *versus* deformação é dada nas subseções seguintes.

3.2.3.1 Concreto não fissurado

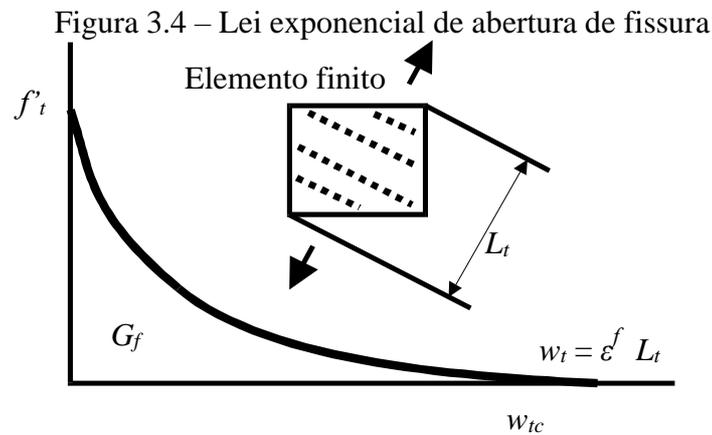
O comportamento das tensões no concreto sem fissuras é assumido como elástico linear conforme apresentado na Equação (3.5). Sendo E_c é o módulo de elasticidade inicial do concreto e f_t^{ef} é tensão de tração efetiva.

$$\sigma_c^{ef} = E_c \varepsilon^{eq}, \quad 0 \leq \sigma_c \leq f_t^{ef} \quad (3.5)$$

3.2.3.2 Concreto fissurado

A abertura de fissuras do concreto sob tração pode ser descrita por dois modelos. O primeiro modelo trata de fissuras fictícias baseado na lei de abertura de fissuras e energia de fratura. Esta formulação é adequada para modelagem da propagação de fissuras no concreto, sobretudo quando é usada em combinação com a largura de banda da fissura (Seção 3.2.4). O segundo modelo, por sua vez, configura uma relação tensão *versus* deformação em um ponto material, sendo uma formulação utilizada apenas em alguns casos.

É previsto cinco modelos de *softening* considerando a abertura de fissuras, seja por lei de abertura de fissura exponencial, lei linear, abrandamento linear, abrandamento linear baseado na deformação local, concreto com fibra de aço baseado na energia de fratura ou deformação. Neste trabalho, foi usado a função exponencial de abertura de fissura, como apresentado na Figura 3.4.



Fonte: CERVENKA *et al.* (2016).

Cabe mencionar que essa função de abertura de fissuras foi derivada experimentalmente por Hordijk (1991).

$$\frac{\sigma}{f_t^{ef}} = \left\{ 1 + \left(\frac{w}{w_c} \right)^3 \right\} \exp \left(-c_2 \frac{w}{w_c} \right) - \frac{w}{w_c} (1 + c_1^3) \exp(-c_2) \quad (3.6)$$

$$w_c = 5,14 \frac{G_f}{f_t^{ef}}$$

Onde:

w : abertura de fissura;

w_c : abertura de fissura onde a tensão é zerada;

σ : tensão normal na fissura;

c_1 : constante cujo valor é 3;

c_2 : constante cujo valor é 6,93;

G_f : área do gráfico que representa a energia de fratura necessária para que a fissura esteja livre de tensão;

f_t^{ef} : tensão de tração efetiva.

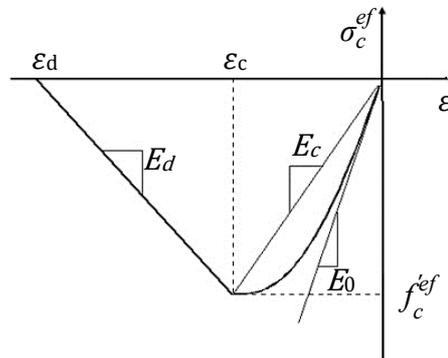
A abertura da fissura w é obtida por meio das deformações de acordo com o método das faixas de Bazant apresentado pela equação (3.10).

3.2.3.3 Compressão anterior ao esmagamento do concreto

A fórmula recomendada pela CEB-FIP Model Code 90, adotada para o ramo ascendente da função tensão *versus* deformação do concreto na compressão, está de acordo com a equação (3.7), sendo que a Figura 3.5 apresenta a forma do gráfico obtido via equação. Essa fórmula engloba uma vasta gama de curvas, de aspecto linear a curvo, e é apropriada para concreto convencional ou de alto desempenho.

$$\sigma_c^{ef} = f_c^{ef} \frac{kx-x^2}{1+(k-2)} x, \text{ com } x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \text{ e } k = \frac{E_0}{E_c} \quad (3.7)$$

Figura 3.5 – Diagrama tensão *versus* deformação na compressão



Fonte: CERVENKA *et al.* (2016).

Os símbolos acima são descritos por:

σ_c^{ef} : tensão de compressão do concreto;

f_c^{ef} : resistência à compressão efetiva do concreto;

x : deformação normalizada;

ε : deformação específica;

ε_c : deformação específica na tensão de pico f_c^{ef} ;

k : parâmetro de forma (maior ou igual a 1, ex. $k = 1$ (linear), $k = 2$ (parábola));

E_0 : módulo de elasticidade inicial;

E_c : módulo de elasticidade secante na tensão de pico, $E_c = f_c^{ef} / \varepsilon_c$.

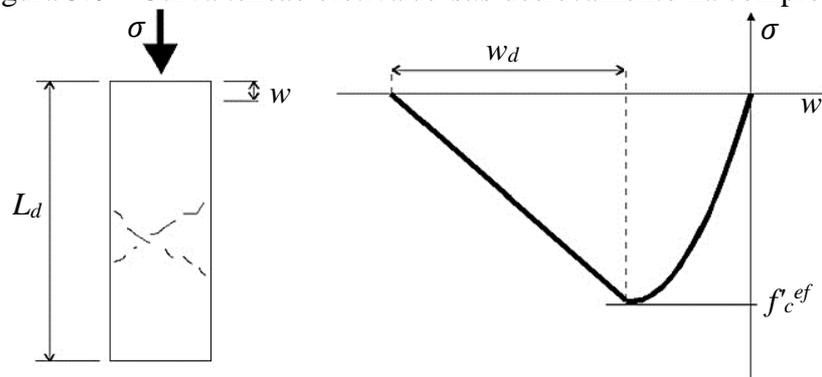
Como consequência da hipótese acima, o dano distribuído é considerado antes que a tensão de pico seja alcançada, ao contrário do dano local, que é considerado depois da tensão de pico.

3.2.3.4 Compressão após o esmagamento do concreto

A lei de *softening* para a compressão é linearizada. O modelo do plano de compressão fictício assume que o esmagamento devido à compressão é localizado em um plano normal em relação à direção da tensão principal de compressão. Todo o deslocamento pós-pico e a dissipação da energia estão localizados nesse plano. É assumido, ainda, que esses deslocamentos são independentes do tamanho da estrutura, o que foi confirmado nas experiências conduzidas por Van Mier (1986).

Essa hipótese é análoga à identificada na teoria da fissura fictícia para as tensões, na qual a forma da lei de abertura de fissura e a energia de fratura são definidas, além de ser considerada uma propriedade do material.

Figura 3.6 – Curva tensão efetiva *versus* deslocamento na compressão



Fonte: CERVENKA *et al.* (2016).

Para a compressão, o ponto final da curva de *softening* é definido pela deformação plástica, chamada de w_d , e a energia necessária para a geração de uma área unitária do plano de fratura é definida indiretamente. Pelos experimentos de Van Mier (1986), o deslocamento plástico ($w_d = 0,5 \text{ mm}$) foi utilizado para o concreto, sendo que esse valor é adotado automaticamente pelo programa caso o usuário não entre com um índice específico.

A lei de *softening* é transformada do plano de ruptura fictícia para uma relação tensão *versus* deformação válida para o correspondente volume de um material contínuo. A tangente da parte de *softening* do diagrama tensão *versus* deformação é definida por dois pontos: o pico do diagrama na tensão máxima e o limite da deformação de compressão ϵ_d no eixo quando a tensão é zero. Essa deformação é calculada a partir de um deslocamento plástico e do tamanho do elemento L'_d (3.2.4) paralelo à aplicação do esforço no elemento finito.

Tomando essa perspectiva, nota-se que essa formulação torna o processo pouco dependente da malha utilizada. Ela é determinada de acordo com a seguinte expressão:

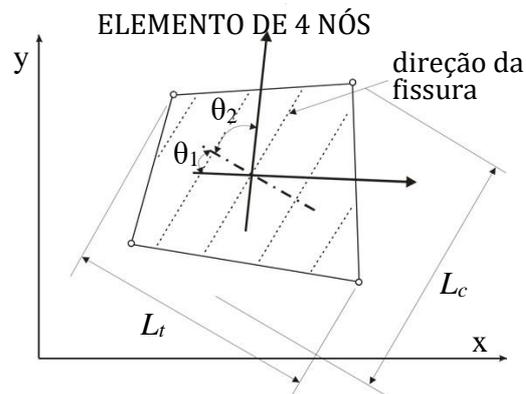
$$\varepsilon_d = \varepsilon_c + \frac{w_d}{L'_d} \quad (3.8)$$

Nela, w_d/L'_d é a deformação devido à fase de pós-pico, valor para o qual a resistência à compressão passa a ser nula.

3.2.4 Controle das deformações localizadas na ruptura

É uma região ou faixa do material que representa um plano de ruptura discreto na análise de elementos finitos. Quando submetido à tração, seria uma fissura; no caso da compressão, seria o esmagamento do concreto. Essas regiões de ruptura possuem dimensões próprias, no entanto, de acordo com experimentos, as dimensões dessas regiões de ruptura são independentes do tamanho da estrutura, portanto, assume-se um plano fictício. Em caso de fissuras de tração, essa aproximação é conhecida como método das faixas de Bazant (1983). Também é usado o mesmo conceito na ruptura em função da compressão. O propósito do método é reduzir duas deficiências, que são a influência do tamanho do elemento (L_t e L_c , Figura 3.7) e sua orientação nos resultados.

Figura 3.7 – Definição das faixas de localização



Fonte: CERVENKA *et al.* (2016).

3.2.4.1 Efeito do tamanho do elemento “Element Size Effect”

A direção dos planos de ruptura é assumida como normal às tensões principais em tração e compressão. As faixas de ruína (para tração L_t e para compressão L_d) são definidas como projeções das dimensões dos elementos finitos nos planos de ruptura, como mostrado na Figura 3.7.

3.2.4.2 Efeito da orientação do elemento

O efeito da orientação do elemento é reduzido em função do aumento da faixa de ruptura para malhas oblíquas conforme indicado pela Equação (3.9) proposta por CERVENKA *et al.* (1995):

$$L'_t = \gamma L_t, L'_d = \gamma L_d$$

$$\gamma = 1 + (\gamma^{\max} - 1) \frac{\theta}{45}, \quad \theta \in < 0; 45 > \quad (3.9)$$

Um ângulo θ é o menor entre θ_1 e θ_2 de acordo com o indicado pela Figura 3.7. A Equação (3.9) é uma interpolação linear entre o fator $\gamma = 1,0$ para a direção paralela aos lados do elemento e $\gamma = \gamma^{\max}$ para a direção inclinada em $t = 45^\circ$. O valor recomendado (e padrão) é de $\gamma^{\max} = 1,5$.

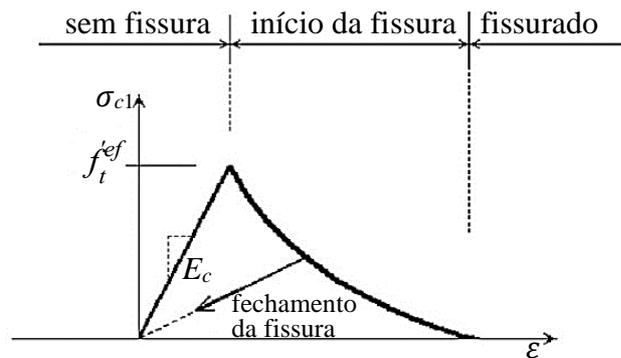
3.2.5 Processo de formação de fissuras

O processo de formação de fissuras pode ser dividido em três estágios, como apresentado na Figura 3.8. O primeiro estágio, sem fissura, é antes de alcançar a tensão de tração f'_t . Quando acontece a fissuração, segundo estágio, tem-se a zona de processo de uma fissura potencial com a diminuição da tensão de tração na face da fissura. Finalmente, no terceiro estágio, a abertura de fissura é grande o suficiente para que a tensão de tração seja igual a zero. A abertura de fissura w é calculada como o deslocamento total da abertura da fissura junto com o método das faixas de Bazant, dado por:

$$w = \varepsilon_{cr} L'_t \quad (3.10)$$

Onde ε_{cr} é a deformação de abertura de fissura, a qual é igual à deformação normal à direção da fissura no estágio fissurado que não possui tensão.

Figura 3.8 – Estágios da abertura de fissura



Fonte: Adaptado de CERVENKA *et al.* (2016).

Foi demonstrado que o modelo de fissuração baseado no método das faixas de Bazant consegue descrever a propagação de uma fissura discreta em um plano, também para concreto armado (CERVENKA *et al.* 1991).

3.2.6 Modelos de fissuração distribuída

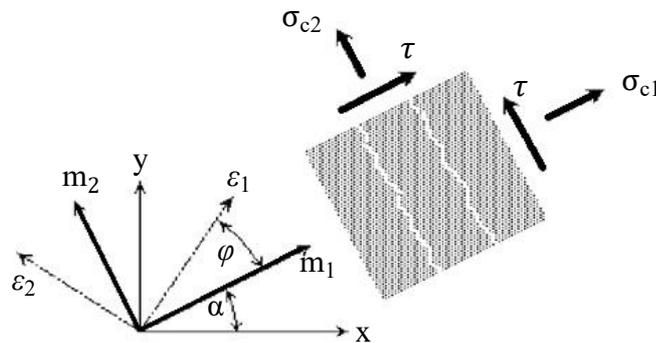
O *software ATENA 3D* baseia-se no modelo de fissuração distribuída, assumindo que, após atingida f_t^{ef} , inicia-se a formação de fissuras, ao que se segue o *softening* do concreto, criando, assim, a microfendilhação. Assume-se que as fissuras estão distribuídas uniformemente dentro do volume do material. Isso se reflete no modelo constitutivo pela introdução da ortotropia. Com o acréscimo de carga, a energia absorvida por essa fissura fictícia aumenta até se atingir a energia de fratura e a tensão não permitir mais a transmissão de tensões. Tomando esses conceitos, duas opções estão disponíveis para modelos de fissuração: o modelo de fissuras fixas, *Fixed Crack Model*, e o modelo de fissuras rotacionada, *Rotated Crack Model*.

Nos modelos de fissuração distribuída, encontra-se implementada uma rotina para reduzir a resistência à compressão do concreto após a fissuração na direção paralela à direção das fissuras, de maneira semelhante àquela proposta por Vecchio e Collins (1986). Adicionalmente, o efeito de contribuição à tração do concreto entre fissuras (“tension stiffening”) pode ser utilizado, sendo que a rigidez é disponibilizada para concreto não fissurado ou fissuras não totalmente abertas por meio de um processo de localização de deformações.

3.2.6.1 Modelo de fissuração fixa

No modelo de fissura fixa, *Fixed Crack Model*, a direção da fissura é dada pela direção da tensão principal no momento do início da fissura, conforme apresentado na Figura 3.9, sendo que, para carregamentos posteriores, essa direção é fixa e representa o eixo de ortotropia do material (CERVENKA, 1985; DARWIN 1974).

Figura 3.9 – Modelo de fissura fixa (estado de tensão e deformação)



Fonte: CERVENKA *et al.* (2016).

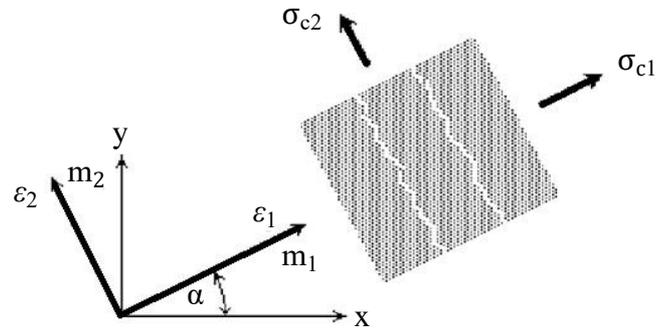
As direções principais de tensão e deformação coincidem no concreto não fissurado devido à suposição de isotropia no componente de concreto. Após a quebra, a ortotropia é introduzida. O eixo do material fraco, m_1 , é normal quanto à direção da fissura; o eixo forte, m_2 , é paralelo às fissuras.

Em um caso geral, os eixos principais de deformação ε_1 e ε_2 giram e não precisam coincidir com os planos de fissura normal m_1 e tangencial m_2 . Isso produz uma tensão de cisalhamento na face da trinca, como mostrado na Figura 3.9. As componentes de tensão σ_{c1} e σ_{c2} denotam, respectivamente, as tensões normais e as tensões paralelas ao plano da fissura.

3.2.6.2 Modelo de fissuração rotacionada

No modelo de fissura rotacionada, *Rotated Crack Model* (VECCHIO, 1986; CRISFIELD, 1989), a direção da tensão principal coincide com a direção da deformação principal. Assim, não existem tensões de cisalhamento, mas somente duas componente de tensões principais, conforme indicado na Figura 3.10.

Figura 3.10 – Modelo de fissuração rotacionada (estado de tensão e deformação)



Fonte: CERVENKA *et al.* (2016).

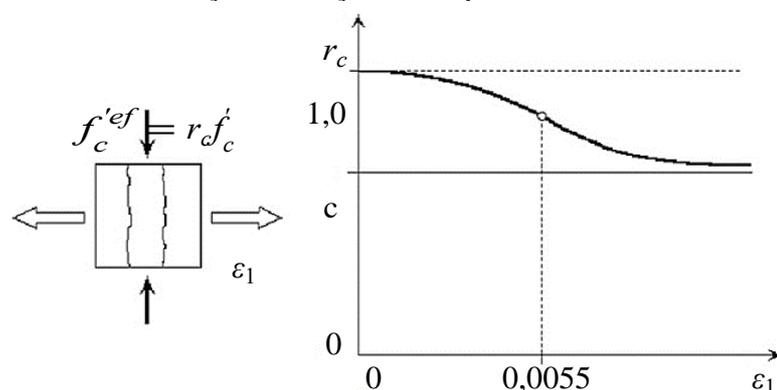
Se os eixos principais de deformação giram durante o carregamento, a direção das fissuras também o faz. Para garantir a coaxialidade dos eixos principais de deformação com os eixos do material, o módulo de cisalhamento tangente G_t é calculado de acordo com o definido por Crisfield (1989) como:

$$G_t = \frac{\sigma_{c1} - \sigma_{c2}}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad (3.11)$$

3.2.7 Resistência à compressão do concreto fissurado

Uma redução da força de compressão depois de fissurar na direção paralela à fissura é feita de uma maneira similar ao encontrado nos experimentos de Vecchio e Collins (1982) e ao formulado na teoria dos campos de compressão. Entretanto, uma função diferente é usada para a redução da força do concreto, a qual tem a forma de uma função de Gauss, como mostrado na Figura 3.11.

Figura 3.11 – Redução da força de compressão no concreto fissurado



Fonte: CERVENKA *et al.* (2016).

Os parâmetros dessa função foram obtidos experimentalmente por meio de dados publicados por Kolleger *et al.* (1988), considerando-se os dados de Collins e Vecchio (1982).

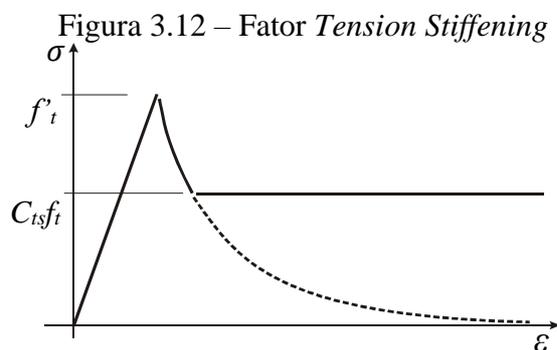
$$f_c'^{ef} = r_c f_c', \quad r_c = c + (1 - c)e^{-(128\varepsilon_y)^2} \quad (3.12)$$

Para a deformação zero, não há redução da força de compressão, mas, quando existem grandes deformações, usualmente as tensões de compressão são reduzidas a um valor mínimo $f_c'^{ef} = cf_c'$. A constante e representa a redução da força máxima quando ocorrem grandes deformações na direção normal à compressão. Nas pesquisas de Dyngeland (1989), foram encontradas reduções maiores que $r_c = 0,8$.

3.2.8 Enrijecimento da tração no concreto fissurado

O efeito de enrijecimento da tração, denominado *Tension Stiffening*, considera a aderência existente entre o concreto e a armadura após o concreto estar fissurado. O concreto entre as fissuras, ainda é solicitado, ocorrendo então a transferência de tensões do concreto entre as fissuras para as armaduras de aço, ou seja, é uma contribuição do concreto fissurado para a rigidez em relação à tração das barras de aço.

Essa rigidez adicional é proporcionada pelo concreto não fissurado, ou com a abertura de fissura menor que w_c , e é gerada pelo processo de deformação localizada. No material *CC3DNonLinCementitious2*, essa rigidez pode ser simulada especificando um fator de rigidez de tensão C_{ts} . Esse fator representa o valor limite relativo à resistência à tração no diagrama de *softening* da tensão. A tensão de tração não pode cair abaixo do valor dado pelo produto de $C_{ts}f_t$ (Figura 3.12). Por sua vez, o valor padrão recomendado para C_{ts} é 0,4, conforme indicado pelo *fib Model Code* (2010).

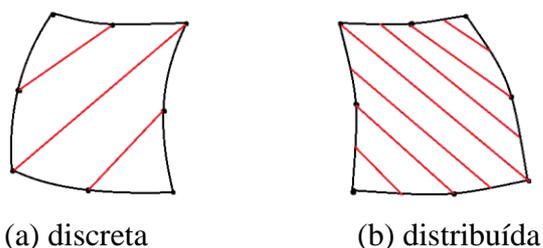


Fonte: CERVENKA *et al.* (2016).

3.3 MODELO CONSTITUTIVO DO AÇO

As barras de aço podem ser modeladas no *ATENA 3D* de duas formas conforme apresentado na Figura 3.13 sendo em (a) discreta, onde são inseridas as barras, uma a uma, com espaços determinados, e (b) distribuída, inseridas como um percentual dentro do elemento de concreto. A armadura discreta tem a forma de barras de aço e é modelada por elementos de treliça. A armadura distribuída, por sua vez, é um componente de material compósito que pode ser considerado como um único material ou como um ou mais desses constituintes. O primeiro caso pode ser um elemento de malha especial (camada), enquanto o último pode ser um elemento com concreto contendo uma ou mais armaduras. Em ambos os casos, o estado de tensão uniaxial é assumido e a mesma formulação da lei tensão x deformação é usada em ambos os casos (CERVENKA *et al.*, 2016).

Figura 3.13 – Representação da armadura.



3.3.1 Representação do modelo para barras

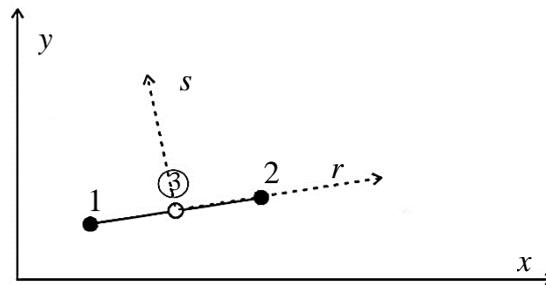
O modelo de barra incorporada é proposto para simular o comportamento das barras de aço da armadura discreta. Para garantir que os segmentos de barras estejam conectados aos vários elementos de concreto, faz-se necessária a colocação de nós adicionais nos elementos em conjunto com os pontos de locação independentes da malha.

Esses nós devem estar localizados onde a armadura atravessa o contorno do elemento de concreto. As coordenadas dos nós das barras de aço, entre os pontos de definição das mesmas, são obtidas por interpolação. Dessa maneira, nós adicionais são criados dentro dos elementos finitos em que há presença de armadura.

Os elementos 2D e elementos de treliça 3D são codificados no grupo CCIsoTruss. Esses são elementos isoparamétricos integrados por Gauss, com 1 ou 2 pontos de integração para os casos de interpolação linear ou quadrática respectivamente, isto é, para elementos com 2 ou 3

nós. Esses elementos estão disponíveis para análises 2D e 3D. A Figura 3.14 apresenta a geometria desses elementos.

Figura 3.14 – Elemento de barra



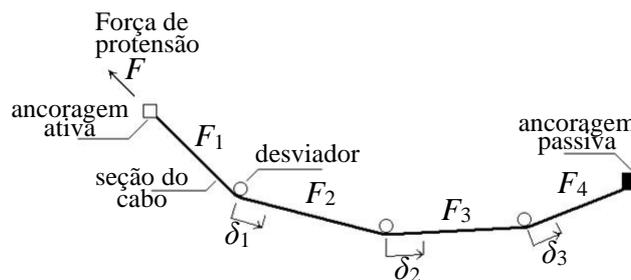
Fonte: CERVENKA *et al.* (2016).

3.3.2 Representação de elementos especiais do tipo cabo

Os cabos de pré-esforço externos podem ser descritos como barras de aço que não estão conectadas ou engastadas no concreto, exceto por um número limitado de pontos, chamados desviadores, conforme mostrado na Figura 3.15.

Este tipo de elemento é indicado pelo *software* como CExternalCable.

Figura 3.15 – Modelo de cabo externo

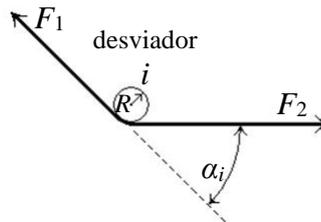


Fonte: Adaptado de CERVENKA *et al.* (2016).

Cada cabo tem duas extremidades providas de âncoras. A âncora em que a força de pré-esforço é aplicada é denominada âncora ativa; a âncora do outro lado é identificada como âncora passiva. Os pontos entre as âncoras são chamados de desviadores (ou *links*). Após a aplicação do pré-esforço, o cabo é fixado em âncoras. Nos desviadores, o cabo pode deslizar enquanto seus movimentos e as forças são regidas pela lei do atrito seco. Os deslizamentos do cabo nos

desviadores são denominados como δ_1 , δ_2 , e assim sucessivamente, sendo introduzidos como variáveis a serem determinadas pela análise.

Figura 3.16 – Forças no desviador



Fonte: Adaptado de CERVENKA *et al.*, (2016).

As forças F_1 e F_2 que atuam em um desviador i são as forças do cabo nas seções de cabos adjacentes (Figura 3.16). Sua diferença $P_i = F_1 - F_2$, ($F_1 > F_2$) é a perda da força de protensão devido ao atrito no desviador i . A relação entre essas forças de acordo com a lei do atrito é expressa como:

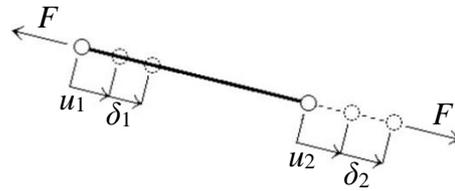
$$F_2 = (F_1 e^{-\varphi \alpha_i p} - Q) f_{\delta}(\delta) f_r(r) \quad (3.13)$$

Nessa expressão, α_i é a mudança do ângulo da direção do cabo no desviador i , R é o raio do desviador – ou seja, o produto $R\alpha_i$ é o comprimento do contato entre o cabo e o desviador – e φ é o coeficiente de atrito. A parte constante do atrito é $Q = p c_f R \alpha_i$, em que c_f é a coesão do cabo por unidade de comprimento, e a unidade de perímetro p significa o perímetro da barra de reforço. Se a parte constante do atrito for desprezada, o termo Q é zero. Por sua vez, $f_{\delta}(\delta)$ e $f_r(r)$ são funções definidas pelo usuário que permitem a alteração das propriedades do desviador dependendo do valor do escorregamento e da coordenada de posição do desviador r (medida a partir de seu ponto inicial). Por padrão, essas funções são definidas como valor unitário 1.

Apresentando $d_i^a = e^{-\varphi \alpha_i p} f_{\delta}(\delta) f_r(r)$ e $d_i^b = p c_f R \alpha_i f_{\delta}(\delta) f_r(r)$, podemos simplificar (3.13) para:

$$F_2 = F_1 d_1^a - d_1^b \quad (3.14)$$

Figura 3.17 – Forças e deslocamentos no elemento do cabo (seção do cabo)



Fonte: CERVENKA *et al.* (2016).

Uma seção do cabo entre os desviadores é considerada como elemento de barra uniaxial (Figura 3.17). A força F no elemento do cabo depende da força de pré-esforço P ; dos deslocamentos das extremidades u_1 e u_2 devido à deformação estrutural; e dos deslizamentos do cabo δ_1 e δ_2 nos desviadores. Os deslizamentos δ são introduzidos como uma variável adicional para os cabos externos. A equação de equilíbrio da seção do cabo é:

$$F = P + K (u_2 - u_1 + \delta_1 - \delta_2) \quad (3.15)$$

A rigidez do elemento é definida por $K = E_s A/L$, em que A e L são a seção transversal e o comprimento do cabo, respectivamente, e E_s é o módulo secante ou tangente real derivado da mesma forma, a qual, no caso de outras armaduras, usa leis bilinear ou multilinear.

As forças de cabo F_1 , F_2 e afins são determinadas aplicando as equações acima para todos os desviadores de cabo, ou seja, uma solução iterativa é executada para deslocamentos u , (*loop* de iterações externo) e em deslizamentos δ_i (*loop* de iteração interno).

A introdução de protensão é realizada pela aplicação de um deslizamento inicial (extração do cabo) na extremidade da ancoragem até que uma força de pré-esforço prescrita seja alcançada. Este procedimento reflete um processo real de protensão e leva em consideração a perda de pré-esforço devido a desvios de atrito e deformação da estrutura.

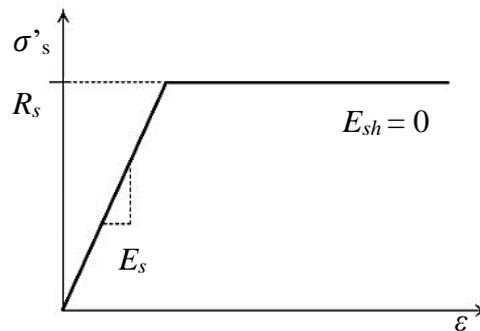
3.3.3 Relações constitutivas do aço

O *software* também possibilita escolher entre duas relações constitutivas disponível para o reforço.

3.3.3.1 Lei bilinear

A lei bilinear, elasto-plástico perfeito, é assumida quando não se tem os dados de entrada necessários para modelar o comportamento das barras de aço, como mostra a Figura 3.18. A parte elástica inicial possui o módulo de elasticidade do aço E_s . A segunda linha representa a plasticidade do aço com *hardening*, e sua inclinação é o módulo de *hardening* E_{sh} . Em caso de plasticidade perfeita, $E_{sh} = 0$. A deformação limite L representa a ductilidade limitada do aço.

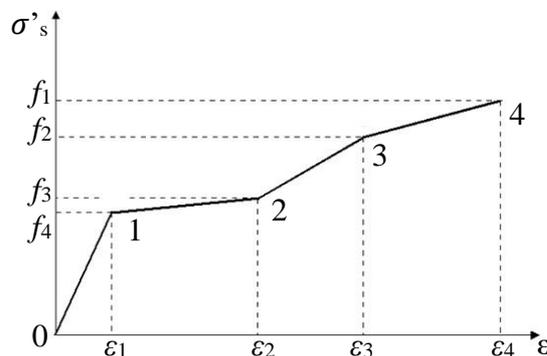
Figura 3.18 – Lei bilinear tensão x deformação para armaduras de reforço



3.3.3.2 Lei multilinear

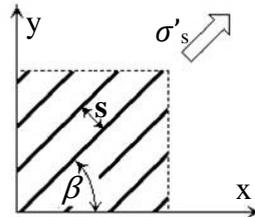
A lei multilinear no ATENA consiste em até quatro linhas, conforme mostrado na Figura 3.19. Essa lei permite modelar todos os quatro estágios do comportamento do aço: estado elástico, patamar de escoamento, *hardening* e fratura. A multilinha é definida por quatro pontos, que podem ser especificados pelo usuário.

Figura 3.19 – Lei multilinear tensão x deformação para reforço



As leis de tensão-deformação descritas anteriormente podem ser usadas para a armadura discreta ou distribuída. A armadura distribuída requer dois parâmetros adicionais que depende da taxa de armadura e do ângulo de direção β , conforme indicado na Figura 3.20.

Figura 3.20 – Parâmetros de armadura distribuída



Fonte: CERVENKA *et al.* (2016).

O espaçamento s da armadura distribuída é considerado infinitamente pequeno. A tensão na armadura distribuída é avaliada nas fissuras, portanto, deve incluir, também, uma parte da tensão devida ao *tension stiffening*, que está atuando no concreto entre as fissuras.

$$\sigma'_{scr} = \sigma'_s + \sigma_{ts} \quad (3.16)$$

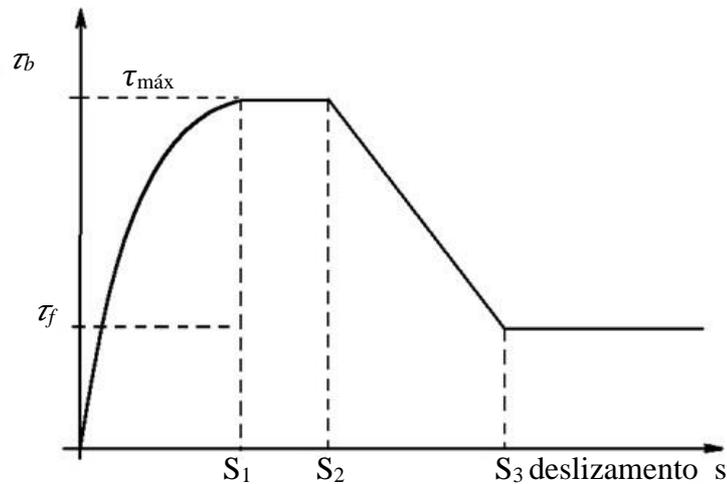
Nessa equação, σ'_s representa a tensão do aço entre as trincas (a tensão do aço na armadura espalhada) e σ'_{scr} é a tensão do aço em uma trinca.

Se nenhuma rigidez por tensão for especificada, $\sigma_{ts}=0$ e $\sigma'_{scr}=\sigma'_s$. No caso da armadura discreta, a tensão do aço é sempre σ'_s .

3.3.4 Aderência entre o aço e o concreto

A propriedade básica do modelo de ligação por reforço é a relação ligação-deslizamento. Esta relação define a resistência de aderência τ_b em função do valor do escorregamento atual entre a armadura e o concreto circundante. No *ATENA* a aderência (*bond-slip*), é pré-definida de acordo com o código modelo CEB-FIB Model Code 90, Figura 3.21. A lei de aderência é gerada com base na resistência à compressão do concreto, diâmetro da armadura e tipo de armadura. Os parâmetros importantes são também as condições de confinamento e a qualidade da moldagem do concreto.

Figura 3.21 – Modelo de aderência de acordo com CEB-FIP Model Code 90



Fonte: CERVENKA *et al.* (2016).

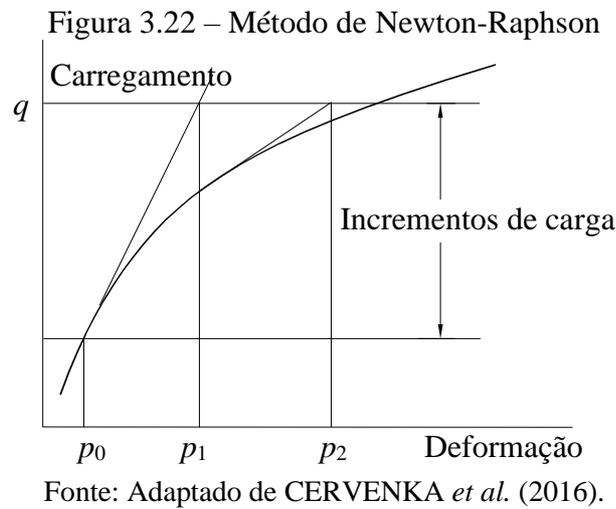
3.4 MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Nesta seção, são revisados os procedimentos iterativos para análises de estruturas não lineares. A formulação da análise não linear pelo Método dos Elementos Finitos consiste em discretizar a variável primária (deformação, no caso do *ATENA*) sobre o domínio da estrutura.

No *ATENA 5.9*, destacam-se três métodos para a solução de sistemas não lineares, a saber, Método de Newton-Raphson, Newton-Raphson Modificado e o Método de Comprimento de Arco (*Arc-Length*).

3.4.1 Método iterativo de Newton-Raphson

O método iterativo de Newton-Raphson, é um dos mais utilizados para solução de sistemas de equações não lineares. É um método incremental e iterativo, caracterizado pelo cálculo da matriz de rigidez em cada iteração, conforme Figura 3.22. Por meio da mudança de inclinação de cada uma das retas, aplica-se a cada etapa um incremento de carga inalterado calculando-se o incremento até se atingir a convergência do equilíbrio das forças. Essa técnica é recomendada para análises envolvendo os seguintes tipos de carga: temperatura, retração, protensão, deslocamentos implícitos, entre outros contextos. A desvantagem deste método é o custo computacional para avaliar a matriz de rigidez a cada iteração, sendo, algumas vezes, algo desnecessário. Ele não deve ser usado perto de picos locais e globais, tampouco seguido de diminuição de carga no caso de análises de Carga Última.

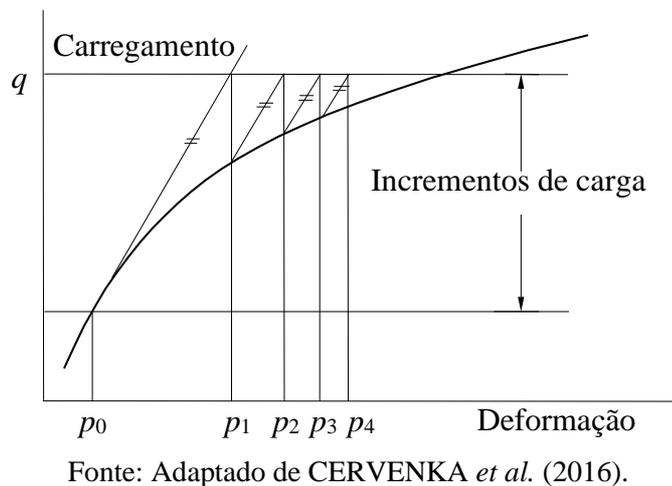


3.4.2 Método iterativo de Newton-Raphson Modificado

Diferentemente do que foi apresentado para o método original, no método de Newton Raphson Modificado, a parte que requer maior custo computacional da solução é o recálculo da matriz de rigidez em cada iteração, porém, em muitos casos, não é necessário fazer isso, e a matriz de rigidez é calculada apenas uma vez no começo do passo de carga.

A Figura 3.23 representa o método iterativo de Newton-Raphson Modificado. Fazendo uma comparação com a Figura 3.22, observa-se que a convergência, no segundo caso, é mais lenta do que no método original, devido seu maior número de interações requeridas. Porém, nesse contexto, cada iteração tem um custo computacional menor e produz uma economia de tempo, pois é necessário montar e eliminar a matriz de rigidez apenas uma vez. Por outro lado, nesse cenário também é disposta uma pior convergência do procedimento de solução.

Figura 3.23 – Método de Newton-Raphson Modificado



3.4.3 Método *Arc-Length*

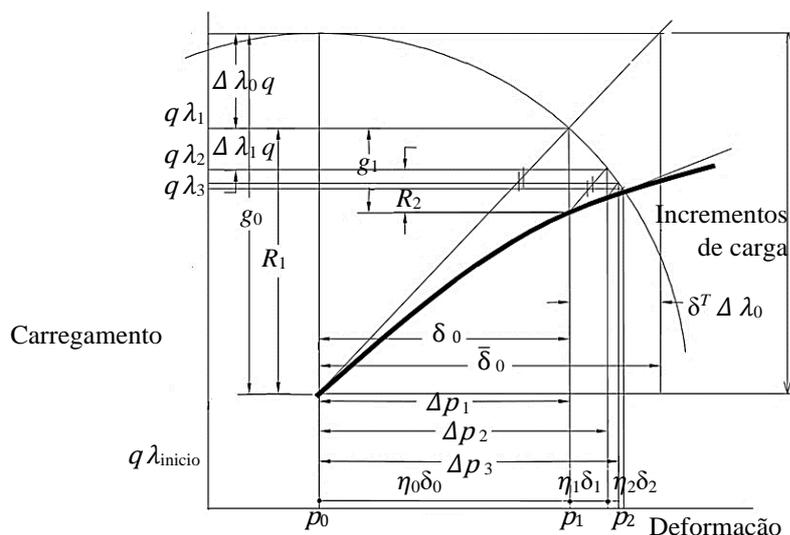
Empregado para resolver estruturas não lineares, o método do comprimento de arco (*Arc-Length*) é um dos métodos de solução mais utilizados e está bem estabelecido para a não linearidade geométrica e para a não linearidade material em análise estática.

Para Cervenka *et al.* (2016), a principal razão para a popularidade deste método é sua robustez e eficiência computacional, o que garante bons resultados mesmo nos casos em que os métodos tradicionais de Newton-Raphson falham. Segundo Crisfield (1981), usando um método de comprimento de arco, problemas de estabilidade dados por “salto” dinâmico sob controle de carga (*snap-through*), e “salto” dinâmico sob controle de deslocamento (*snap-back*), podem ser estudados.

Ele proporciona, ainda, a convergência ao controlar, simultaneamente, a carga e o deslocamento, o que possibilita capturar o comportamento pós-pico da estrutura, bem como problemas materialmente não lineares com diagramas tensão *versus* deformação não suaves ou descontínuos. Isso é possível devido às mudanças nas condições de carga durante as iterações dentro de um incremento. Essa técnica não é adequada para alguns tipos de problemas, como aqueles em que se deseja precisão no incremento de carga aplicada, como é o caso de forças de contorno, protensão, retração, temperatura, entre outros.

Na formulação desse método é introduzido o escalar η usado para acelerar soluções em casos de relações de deformação de carga bem comportadas ou para amortecer possíveis oscilações se surgirem alguns problemas de convergência, como estar perto de bifurcação e de pontos extremos.

Figura 3.24 – Método *Arc-Length*



Fonte: Adaptado de CERVENKA *et al.* (2016).

4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ENSAIOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo, são apresentadas algumas aplicações de análises numéricas não lineares em estruturas de concreto armado e de concreto protendido, com o objetivo de calibrar os modelos constitutivos apresentados no Capítulo 3. Nesta seção, estão descritos os procedimentos adotados na presente pesquisa, dentre eles os materiais, equipamentos e procedimentos.

As modelagens realizadas foram desenvolvidas em um programa baseado no método dos elementos finitos e na mecânica da fratura, desenvolvido pela empresa Cervenka Consulting, com sede na República Tcheca. Foi utilizada a versão 5.9 (2022) do programa, o qual está disponível na versão bidimensional (ATENA 2D) e na versão utilizado neste trabalho, voltada para análises tridimensionais (ATENA 3D). Através de ferramentas de análise em tempo real, o *software* possibilita a visualização do modo de ruptura, das tensões, das deformações e da fissuração dos elementos, tanto em suas superfícies externas como em camadas internas, definidas pelo usuário, mesmo durante a análise não linear.

Para o pré-processamento utilizou-se o programa GiD em sua versão 15.0.3. O GiD é um *software* universal, adaptável e de simples aplicação em simulações numéricas. Quando aplicado ao segmento da engenharia, é projetado para cobrir todas as necessidades comuns no campo de simulações numéricas, tais como modelagem geométrica, definição efetiva de dados de análise, escolha de malha, transferência de dados para *software* de análise, bem como visualização de resultados numéricos.

O programa experimental utilizado foi realizado por Melges (2001). Neste estudo, foram ensaiadas 6 lajes, dentre as quais 3 eram de concreto armado, sendo 1 sem armadura contra o cisalhamento e 2 com armadura do tipo pino contra o cisalhamento, e as 3 restantes de concreto protendido com cabos não aderentes sendo compostas também de 1 sem armadura contra o cisalhamento e 2 com armadura do tipo pino contra o cisalhamento.

A Tabela 4.1 diz respeito aos ensaios utilizados envolvendo elementos de lajes lisas submetidas à punção em concreto armado e protendido, os quais possibilitaram avaliar o comportamento numérico dos modelos constitutivos adotados. A escolha por esses ensaios foi realizada com fundamento na quantidade de informações detalhadas apresentadas nas propriedades físicas dos materiais utilizados e nos resultados obtidos, o que permitiu uma melhor comparação das cargas, dos deslocamentos, das tensões e das deformações dos modelos.

Tabela 4.1 – Ensaio experimentais utilizados.

Ensaio experimental	Observações
Laje M1 Melges (2001)	Laje lisa de concreto armado com ruptura por punção
Laje M4 Melges (2001)	Laje lisa de concreto protendido com ruptura por punção

Para a primeira modelagem, foi utilizada a laje M1 em concreto armado. Tendo como base os procedimentos que melhor representaram os resultados experimentais na laje M1, foi modelada a laje M4 protendida com ruptura por punção.

A definição dos parâmetros que foram empregados no modelo numérico foi dividida em diferentes etapas: criação da malha que capaz de representar a estrutura e seleção do elemento finito com dimensões adequadas; número de etapas de cálculo; adoção dos modelos constitutivos dos materiais; escolha dos parâmetros de solução.

4.1 LAJE LISA DE CONCRETO ARMADO COM RUPTURA POR PUNÇÃO

4.1.1 Laje M1 (Melges 2001)

Foi analisado o modelo denominado M1, em concreto armado, sem armadura de punção, o qual foi utilizado como laje de referência para auxiliar na determinação dos parâmetros a serem estabelecidos no modelo numérico.

Todas as lajes tinham dimensões de $2500 \times 2500 \text{ mm}^2$ e uma espessura de 160 mm. Como armadura passiva superior, foi adotada uma malha de barras de 16 mm a cada 100 mm e uma altura útil média de 16,6 mm. Na armadura inferior, foram utilizadas barras de 8 mm, também com espaçamento de 100 mm. Neste modelo, não foi empregado armadura de cisalhamento. As propriedades do concreto e da armadura desta laje estão descritas na Tabela 4.2. Onde, f_{sy} é a tensão de escoamento do aço e f_{sr} a tensão de ruptura do aço.

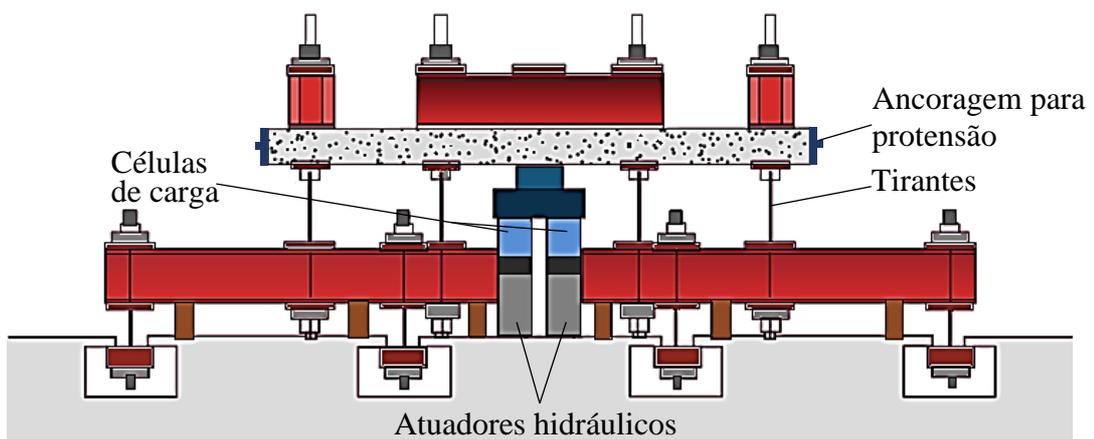
Tabela 4.2 – Propriedades mecânicas dos materiais modelo M1

Propriedades do concreto			Propriedades do aço			
f_c (MPa)	f_{ct} (MPa)	E_c (MPa)	Diâmetro (mm)	f_{sy} (MPa)	f_{sr} (MPa)	E_s (MPa)
26,60	2,71	26125	16	590,4	722,1	190209
			8	597,9	711,1	214156

Fonte: Melges (2001).

O ensaio experimental se desenvolveu da seguinte forma: uma força concentrada foi aplicada na face inferior da laje por meio de uma chapa de aço quadrada de 180 mm de lado, de forma a simular um pilar via atuação de dois atuadores hidráulicos (cada um com uma capacidade aproximada de 500 kN). Um sistema de vigas metálicas superiores, junto de um sistema de tirantes fixados em vigas metálicas inferiores fixas no chão, serviu como apoio da laje, conforme ilustra a Figura 4.1. De acordo com as observações do ensaio, a laje M1 teve uma ruptura por punção, com uma carga de 441,55 kN e deslocamento de 7,79 mm.

Figura 4.1 – Esquema utilizado para o ensaio das lajes

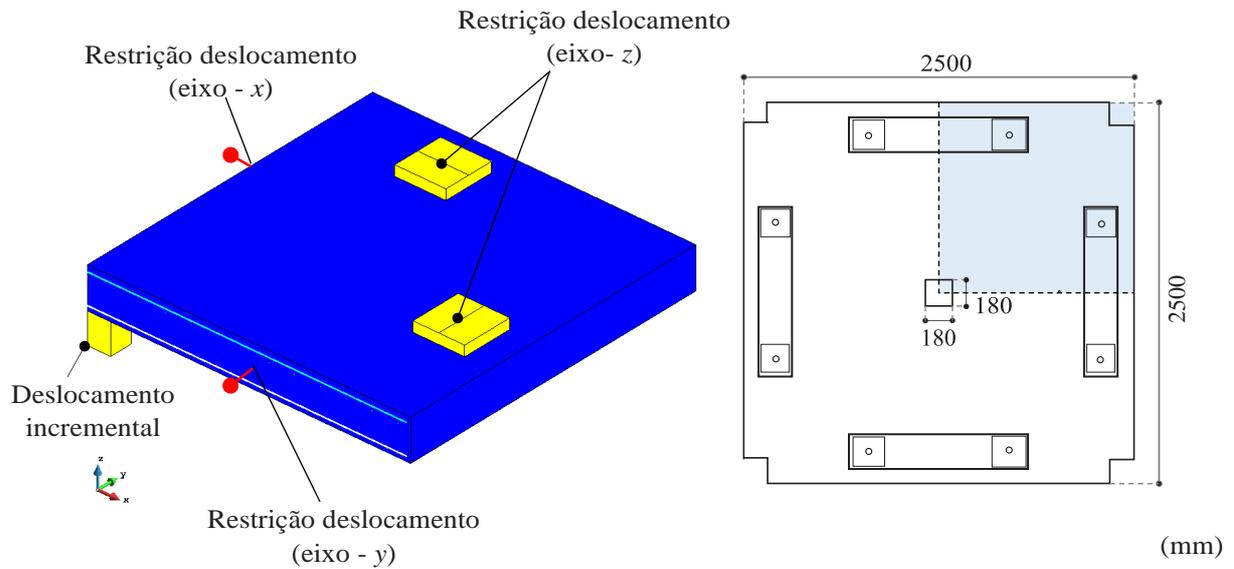


Fonte: Adaptado de Melges (2001).

4.1.1.1 Modelagem numérica

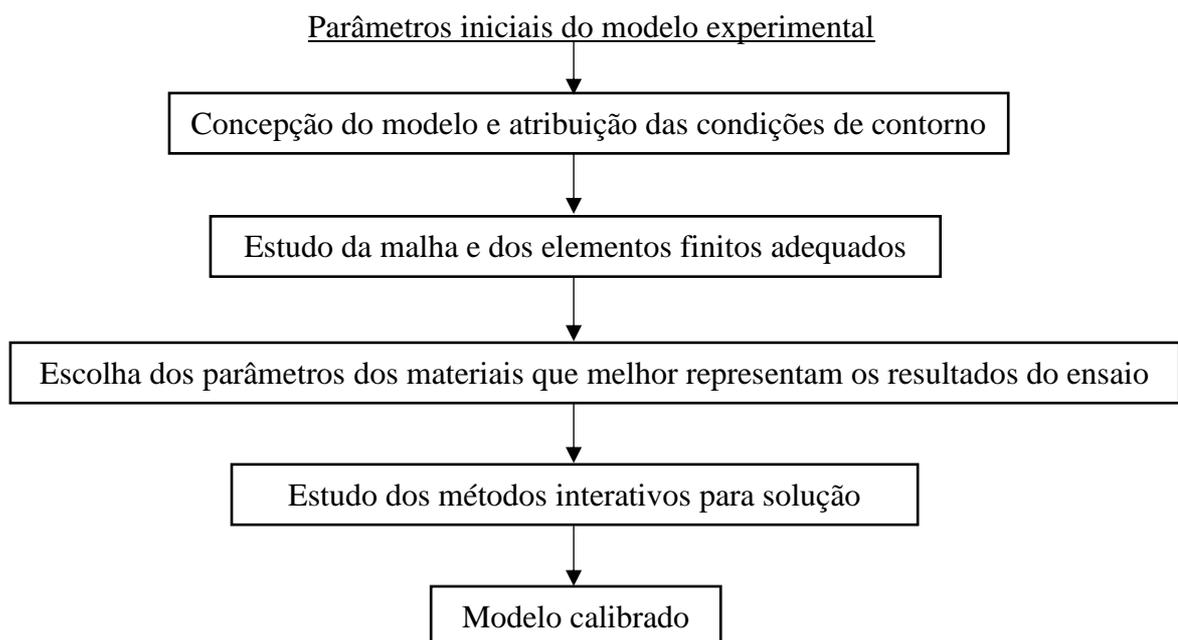
A modelagem numérica e a discretização da laje foram realizadas a partir de um pré-processamento no programa GiD com o emprego de elementos finitos tridimensionais. Baseando-se nas recomendações encontradas na revisão bibliográfica, o programa *ATENA* permite a realização de modelos por eixo de simetria, de modo que, tendo em vista essa consideração, apenas um quarto de laje foi modelado. Assim como o modelo experimental, no modelo numérico, o deslocamento incremental era empregado no centro da laje via placa de aço que simulava o pilar. Restrições foram impostas impedindo os deslocamentos horizontais nos eixos de simetria, além de restrições verticais no eixo Z, nas placas de aço superiores, como ilustrado na Figura 4.2. Conforme o deslocamento incremental foi imposto sobre o pilar, as placas superiores impediam o deslocamento vertical.

Figura 4.2 – Modelo numérico M1 e condições de contorno



A sequência de parametrização do modelo teve como objetivo identificar os fatores que mais influenciavam a modelagem numérica, a qual foi dividida em diferentes etapas de análise de sensibilidade a partir de parâmetros iniciais pré-estabelecidos, seguindo o esquema apresentado na Figura 4.3

Figura 4.3 – Etapas para calibração do modelo



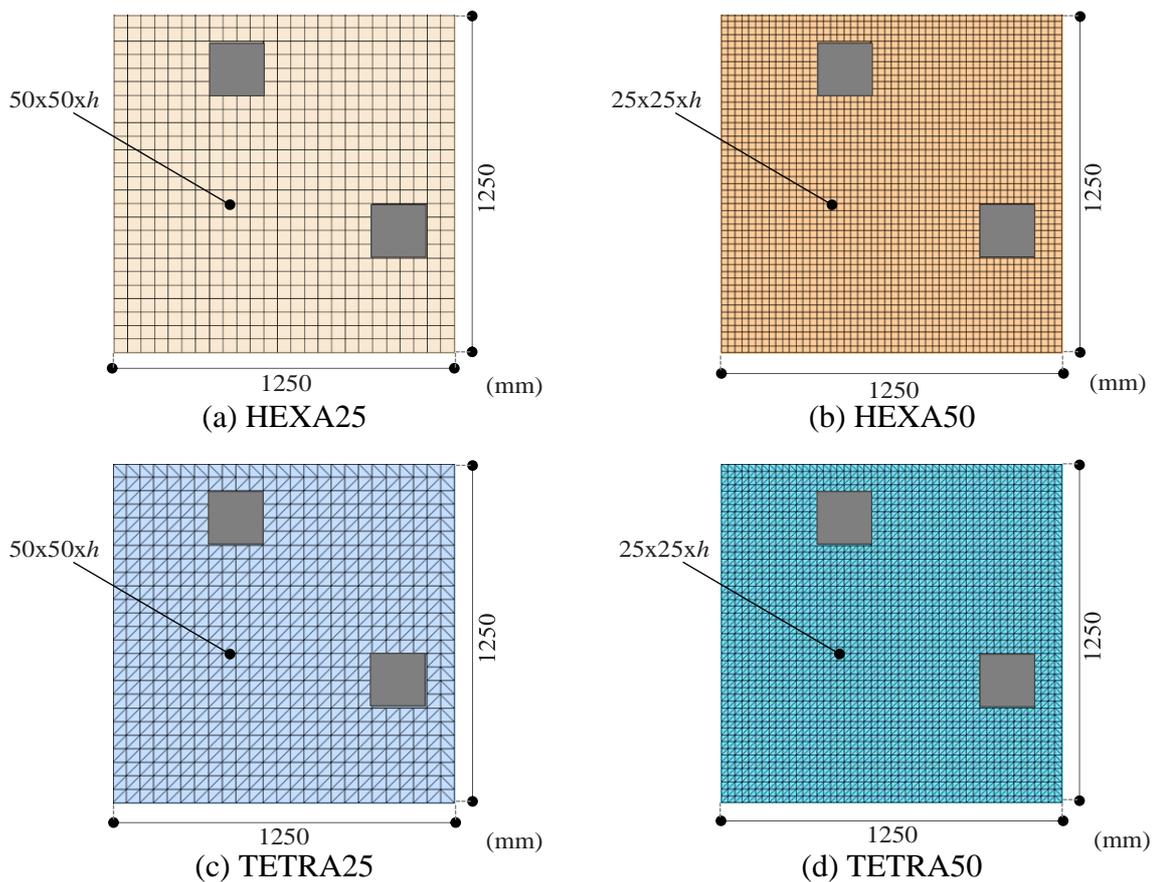
Para dar início ao estudo, alguns parâmetros iniciais atribuídos foram mantidos, bem como os padrões pré-estabelecidos pelo programa para as condições não determinadas pelo modelo experimental.

Após a concepção do modelo de acordo com suas dimensões reais, o primeiro estudo teve por objetivo específico determinar o tipo de elemento e a discretização que melhor represente os resultados em um tempo adequado. No *ATENA*, existe a possibilidade de serem empregados dois tipos de elementos para a modelagem 3D do tipo CCIsoBrick e CCIsoTetra, conforme já apresentado na Figura 3.2, os quais foram nomeados, neste trabalho, “HEXA” para os elementos hexaédricos com 20 nós e, para os elementos do tipo tetraédricos com 10 nós, “TETRA”. O estudo teve por objetivo comparar os elementos tridimensionais e buscar uma relação da malha que melhor representa as condições de carga *versus* deslocamento com o menor erro para uma solução numérica mais precisa. Foram comparadas 12 configurações de malha de elementos finitos, as quais são apresentadas na Tabela 4.3 e representadas na Figura 4.4.

Tabela 4.3 – Refinamento da malha

Modelo	Tipo de elemento	Número de divisões na largura da laje	Número de divisões na espessura da laje	Número de nós	Número de elementos
A	HEXA	25	2	2329	1472
B	HEXA	25	4	3681	2672
C	HEXA	25	6	5033	3972
D	HEXA	50	2	8104	5172
E	HEXA	50	4	13306	10172
F	HEXA	50	6	18508	15172
G	TETRA	25	2	2329	8072
H	TETRA	25	4	3681	15572
I	TETRA	25	6	5033	23072
J	TETRA	50	2	8104	30572
K	TETRA	50	4	13306	60572
L	TETRA	50	6	18508	90572

Figura 4.4 – Comparação e distribuição dos elementos utilizados nas malhas de acordo com a Tabela 4.3



Na sequência, após determinar o modelo de malha, foi analisado o número de etapas de cálculo, *steps*, para um intervalo de carregamento. Entende-se que, para as condições de aplicações de força, deslocamento e energia, o total estabelecido será dividido pelo número de *steps* atribuído pelo usuário. É importante observar que quanto maior o número de paradas para cálculo menor será o incremento das condições no modelo.

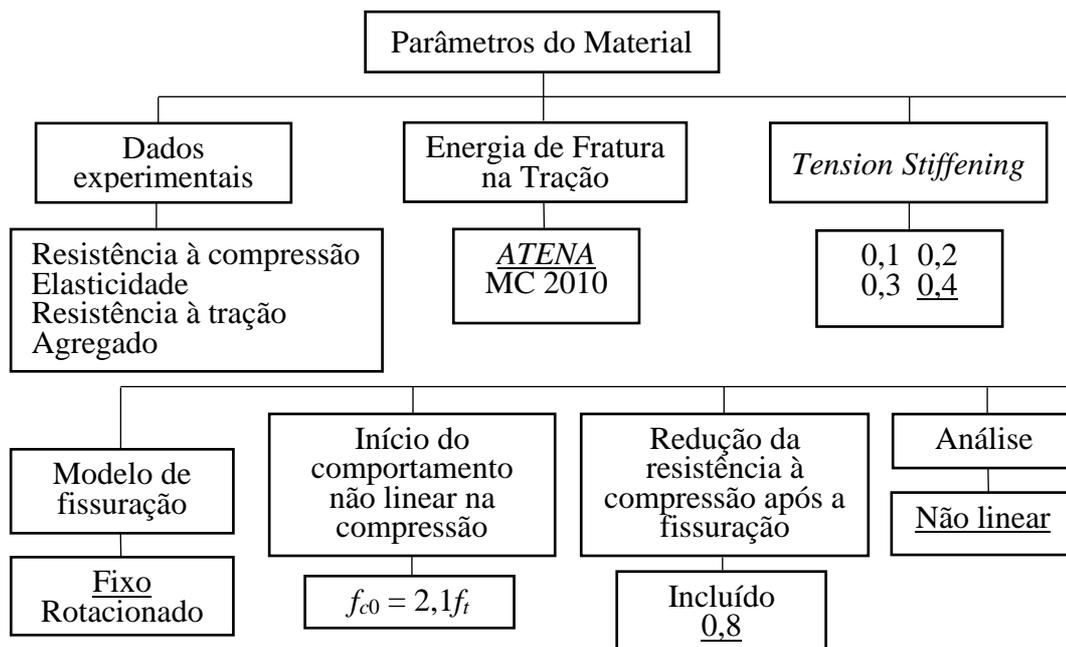
O número de *steps* teve por objetivo determinar o valor do deslocamento incremental, em cada etapa de cálculo, que mais se aproximou dos resultados reais para carga e deslocamento. No centro do pilar, foi atribuído um acréscimo de deslocamento de 0,1 mm com um fator multiplicador de 100 vezes, dado pelo comando *interval multiplier*, sendo, assim, possível estabelecer o deslocamento total de 10 mm, que é empregado em todo o intervalo de carregamento. Com a razão entre o deslocamento total e o número de etapas, é possível determinar o acréscimo de deslocamento em cada etapa de cálculo, números esses divididos de acordo com a Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Estudo do número de etapas que serão geradas durante o intervalo

Número de etapas	Deslocamento por <i>step</i> (mm)
50	0,200
100	0,100
150	0,067
200	0,050
250	0,040

Em seguida, foi processado o estudo relacionado aos parâmetros do concreto, tendo como objetivo definir os parâmetros não conhecidos do experimento, os quais são disponibilizados no programa *ATENA*, de forma a identificar aqueles que melhor representam o comportamento do concreto. O esquema mostrado na Figura 4.5 apresenta as alternativas que foram testadas nesse estudo. Os itens sublinhados são os parâmetros padrões adotados e recomendados pelo programa.

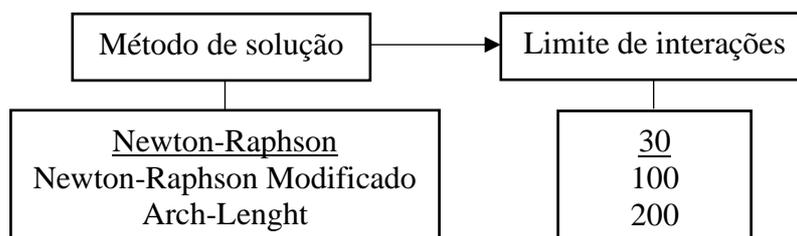
Figura 4.5 – Parâmetros do Material



Na última etapa, foi analisada a influência que os métodos iterativos apresentam na resposta numérica do modelo e suas variações, conforme esquema apresentado na

Figura 4.6. O programa apresenta três métodos de solução iterativo, sendo o método de Newton-Raphson padrão de entrada. A quantidade de interações por etapa de cálculo define o momento em que cada etapa de cálculo é interrompida.

Figura 4.6 – Métodos iterativos de soluções numéricas



A partir das alternativas propostas, a avaliação de cada etapa se deu através do comportamento observado na curva de carga *versus* deslocamento do concreto e panorama de fissuração da laje. Tendo como base as recomendações anteriores, adotou-se um modelo constitutivo inicial para o concreto e o aço, de acordo com o disposto na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Propriedades iniciais assumidas na modelagem da laje M1

Parâmetro	Valor adotado	Observação
Resistência à compressão (f_c)	26,6 MPa	Experimental
Módulo de elasticidade (E_c)	26125 MPa	Experimental
Coefficiente de Poisson (ν)	0,2	ATENA
Resistência à tração (f_t)	2,71 MPa	Experimental
Energia de fratura de acordo com Vos (1983) (G_f)	67,75 N/m	ATENA
Agregado	19 (mm)	Experimental
Plasticidade do concreto (\mathcal{E}_{cp})	0,001018	ATENA = f_c/E_c
Início do comportamento não linear na compressão (f_{c0})	5,69 MPa	ATENA = $2,1f_c$
Enrijecimento sob tração	0,4	
Redução da resistência à compressão	0,8	ATENA, segundo VECCHIO e COLLINS (1986)
Análise	Não Linear	

4.1.1.2 Resultados da análise numérica de refinamento da malha

Os resultados obtidos para cada uma das malhas analisadas são apresentados sob a forma de curva carga *versus* deslocamento (medido no centro da laje), sendo dispostos na Figura 4.7. Em relação ao tipo de elemento empregado, pode-se observar que os índices do tipo tetraédricos

com 10 nós (Figura 4.7c, d), tendem a superestimar os resultados, sendo a malha K a que mais se aproximou dos resultados esperados.

Observa-se, também, que, quando a estrutura é refinada com um menor número de camadas na espessura, os resultados para carga de ruptura tendem a ser maiores, sendo as malhas G e J as que pior representaram os resultados. Na Figura 4.7a e b, representando as curvas para elementos hexaédricos com 20 nós, observa-se uma proximidade em seus comportamentos, sendo estes elementos os que apresentaram menores variações.

Pode ser observada na Figura 4.7b a convergência da resposta numérica à medida que se aumenta a discretização da malha. É visível que as malhas mais refinadas conseguiram representar melhor as variações próximas da ruptura, assim como no modelo experimental. Considerando os resultados obtidos, deve-se observar que as malhas configuradas com elementos mais próximos de um equilátero apresentaram as menores variações de carga e deslocamento, o que pode ser observado na Tabela 4.6.

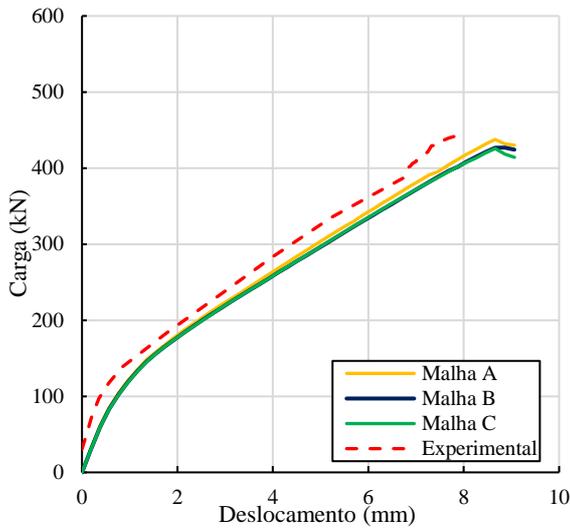
Tabela 4.6 – Comparação dos resultados obtidos para as malhas testadas

Modelo	Carga na ruptura (kN)	Erro (%)	Deslocamento (mm)	Erro (%)
A	437,68	0,88	8,66	11,17
B	429,80	2,66	8,66	11,17
C	425,70	3,58	8,66	11,17
D	452,90	2,57	9,30	19,38
E	414,30	6,17	8,47	8,73
F	418,64	5,18	8,47	8,73
G	471,71	6,83	6,13	21,03
H	462,63	4,77	8,53	9,50
I	454,70	2,97	8,73	12,06
J	555,51	25,80	9,72	24,77
K	470,91	6,65	8,13	4,24
L	476,06	7,81	8,93	14,50

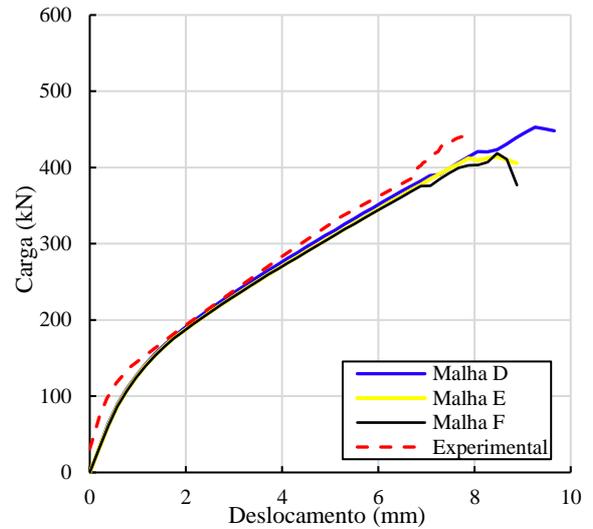
Sendo:

$$\text{Erro (\%)} = 100 \frac{|\text{Valor estimado} - \text{Valor experimental}|}{\text{Valor experimental}} \quad (4.1)$$

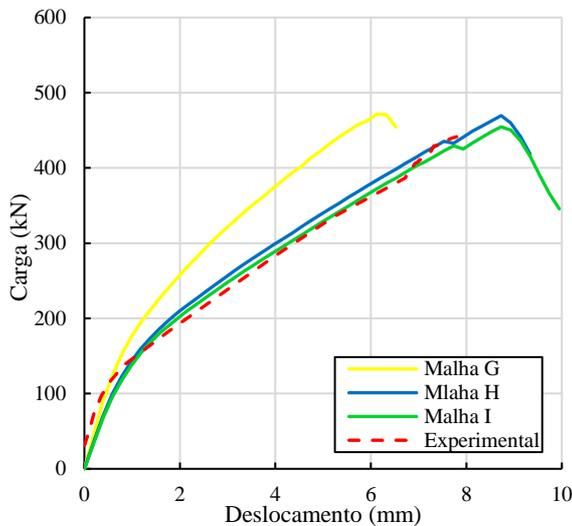
Figura 4.7 – Curvas carga *versus* deslocamento obtido no estudo das malhas e elementos



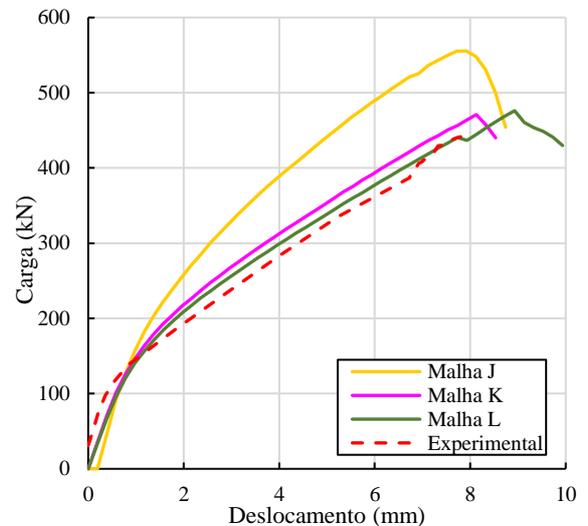
(a) HEXA25



(b) HEXA50



(c) TETRA25



(d) TETRA50

Com base nos resultados apresentados, as malhas com elementos hexaédricos apresentaram erros de deslocamento próximos, sendo as malhas E e F com os menores erros. Dentre elas, a malha F foi a que resultou no menor erro de carga última. Quanto às malhas compostas por elementos tetraédricos, a malha K expressou o menor erro de deslocamento, além de apresentar uma boa convergência para a carga de ruptura. Tendo em vista os resultados apresentados, adotou-se para a próxima etapa uma malha de cada tipo de elemento, o que motivou dar continuidade às malhas F e K na análise do número de etapas de cálculo.

4.1.1.3 Resultados relacionados ao número de steps

O número de *steps* avaliou o valor de incrementos de deslocamento por etapa de cálculo. Foi observado que o modelo experimental teve uma ruptura com deslocamento de 7,80 mm, portanto, no modelo numérico, foi estabelecido um deslocamento máximo de 10,00 mm. Dessa forma, o número de *steps* atribuído no modelo irá dividir o deslocamento total imposto, chegando, assim, no deslocamento incremental por etapa de cálculo que mais se aproximou dos resultados. O estudo com os diferentes incrementos de deslocamento para as malhas F e K são apresentados na Tabela 4.7.

Com base nos resultados apresentados, é visível que as variações do incremento de deslocamento por etapa de cálculo interferem nos resultados finais. Observa-se que, ao aumentar o número de paradas, diminuindo o deslocamento incremental, a estimativa da carga de ruptura também tende a aumentar, o que é mais notável na malha F com elementos hexaédricos.

Em relação à malha K, foi identificado que os elementos tetraédricos continuaram com a tendência de superestimar a capacidade de carga e de deslocamento final, além de apresentarem maiores variações se comparados aos da malha F. Quanto ao tempo, constatou-se que os elementos tetraédricos têm uma boa resposta de processamento, porém isso não foi refletido nos resultados, sendo, portanto, considerado que malhas compostas por tais elementos não apresentam uma boa convergência dos resultados. Por isso, a partir desta etapa, malhas com esses elementos foram desconsideradas.

Tabela 4.7 – Resultados para o número de *steps*

Malha	Steps	mm/step	Carga na ruptura (kN)	Deslocamento (mm)	Tempo (minutos)
F	50	0,200	418,64	8,47	21
	100	0,100	392,91	7,48	24
	150	0,067	421,14	8,20	26
	200	0,050	442,53	8,66	27
	250	0,040	443,99	8,66	31
K	50	0,200	470,91	8,13	12
	100	0,100	510,41	9,22	15
	150	0,067	495,67	8,72	18
	200	0,050	498,33	8,77	22
	250	0,040	513,26	9,16	28

Obs: computador com processador Intel® Core™ i3-8100; Intel ® UHD Graphics 630; Memória Física (RAM) Instalada 12,0 GB DDR4; HDD 750 GB.

A partir dos resultados obtidos, é possível observar que o número de paradas de cálculo na ordem de 200, equivalente a 0,05 mm/step, para a malha F, foi o que melhor representou os resultados esperados. É notável, ainda, que valores superiores se inclinam para uma maximização das cargas de ruptura. Portanto, para seguimento da análise nas próximas etapas de calibração, fixou-se na malha F e no deslocamento incremental de 0,05 mm/step.

4.1.1.4 Resultados relacionados aos parâmetros do concreto

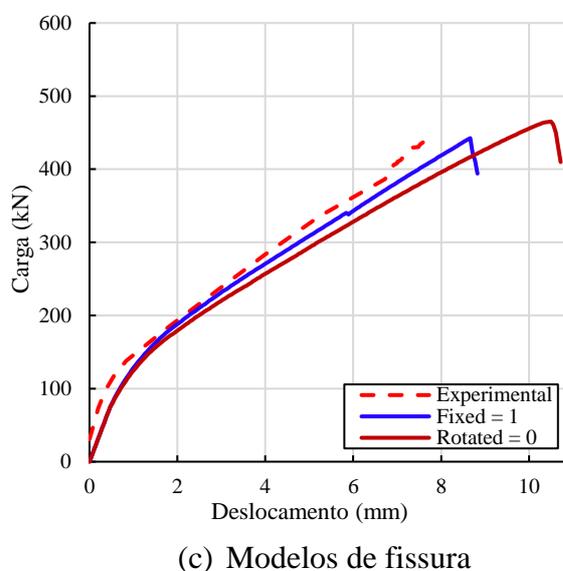
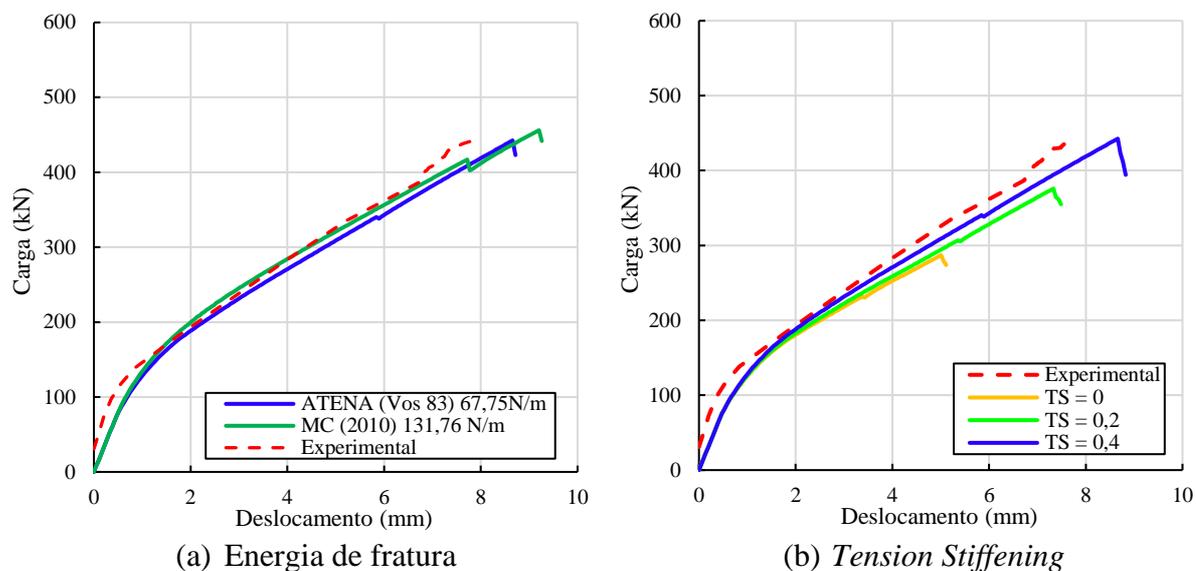
Para este estudo, os resultados foram analisados com base nas curvas de carga *versus* deslocamento na região central da laje. O primeiro parâmetro analisado foi relacionado à energia de fratura (G_f), que não é estabelecida pelo modelo experimental. No *ATENA*, como padrão, a energia de fratura é calculada com base em VOS (1983). Também foi estudada uma variação de acordo com o *fib Model Code* (2010), que estima uma G_f superior ao estabelecido. Conforme apresentado na Figura 4.8a, as curvas de carga *versus* deslocamento se mantiveram próximas durante quase todo carregamento, porém a energia de fratura segundo o *fib Model Code* (2010) apresentou uma carga de ruptura de 456,06 kN e deslocamento de 9,21 mm, o que é superior ao padrão estabelecido pelo *ATENA* e pela capacidade experimental.

Na sequência, foi verificada a influência que o enrijecimento sob tração exerce nos resultados. De acordo com o que é apresentado na Figura 4.8b, fica estabelecido que considerar o enrijecimento $C_{ts} = 0,4$ foi fundamental para obtenção dos resultados, comprovando à existência de aderência entre o concreto e a armadura após o primeiro estar fissurado. Quando o *Tension Stiffening* foi desconsiderado, a ruptura sofreu grande influência, com previsão de 287,02 kN e 5,01 mm.

A Figura 4.8c apresenta a comparação entre as curvas obtidas pelos modelos de fissura fixa e fissura rotacionada. Ambos os modelos têm um comportamento similar até o aparecimento da primeira fissura com uma carga de 112,2 kN, ponto no qual o modelo de fissuras rotacionais não consegue mais aproximação em relação ao modelo de fissuras fixas. No final, o modelo de fissuras rotacionadas apresentou uma estimativa de ruptura de 465,19 kN, com 10,50 mm de deslocamento.

Portanto, com base nos resultados apresentados, estabeleceu-se que, ao manter a energia de fratura, *Tension Stiffening* e o modelo de fissuras fixas, parâmetros que são recomendados pelo *software*, os resultados corresponderam ao comportamento experimental esperado de uma laje com ruptura por punção.

Figura 4.8 – Curvas cargas *versus* deslocamento obtidas no estudo dos parâmetros do concreto



4.1.1.5 Resultados relacionados aos parâmetros de convergência

Na última etapa de calibração, foram obtidos os resultados relacionados aos três parâmetros de solução previsto no *ATENA*, sendo que, para entender melhor o desempenho de cada método, analisou-se a curva carga *versus* deslocamento. Os critérios de tolerância utilizados foram mantidos para deslocamento, força e energia residual de 10^{-2} , 10^{-2} e 10^{-4} respectivamente.

Conforme apresentado na Figura 4.9, pode-se observar que as curvas para os métodos Newton-Raphson e Arc-Length mantiveram-se, durante todo o carregamento, bastante similares. A carga atingida pelo método de Newton-Raphson foi de 442,53 kN enquanto o

método Arc-Length foi de 440,56 kN, ambos com uma margem de erro para o modelo experimental de 0,22%. Para o método de Newton-Raphson Modificado, foi observada uma semelhança até o momento de ruptura dos outros dois métodos, porém, o deslocamento incremental continuou até atingir uma ruptura de 494,90 kN.

Junto com o método de Newton-Raphson, foi analisado o limite de interações requeridas. O *ATENA* mantém como padrão um limite de 30 interações por passo de carga. Conforme apresentado na tabela Tabela 4.8, as variações no limite de interação não influenciaram o resultado final, alterando apenas o tempo para finalização da análise, sendo, portanto, mantido o valor padrão do software. A técnica *Line-search* também foi desativada para verificar sua interferência, contudo, apenas o tempo de processamento sofreu uma economia de 4 minutos, mantendo os resultados inalterados.

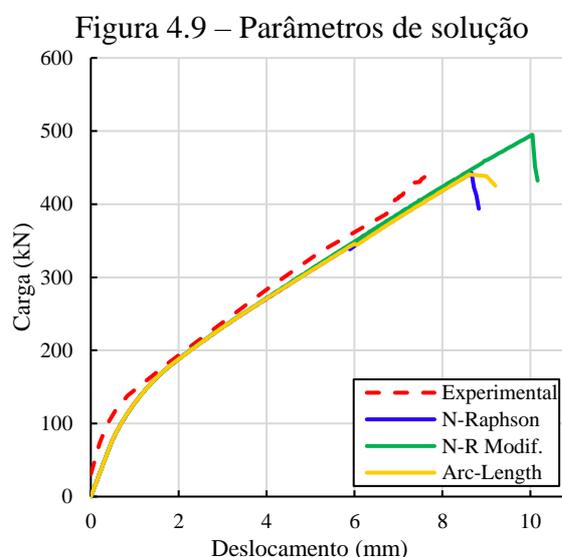


Tabela 4.8 – Número de interações requeridas

Limite de interações	Tempo (min.)
30	27
100	31
200	37

Obs: computador com processador Intel® Core™ i3-8100; Intel ® UHD Graphics 630; Memória Física (RAM) Instalada 12,0 GB DDR4; HDD 750 GB

Analisando os resultados expostos, estabeleceu-se que, mantendo o parâmetro de solução, os critérios de força, deslocamento e energia e o limite de interações recomendados pelo programa, garantiu-se uma boa convergência dos resultados sem precisar que sofressem alterações.

4.1.1.6 Comparação dos resultados

Com os dados obtidos na análise numérica, foi possível comparar os resultados ao modelo experimental a partir da curva carga *versus* deslocamento e da curva carga *versus* deformação do concreto e em barras da armadura longitudinal submetidas à tração e à compressão de acordo com as posições representadas na Figura 4.10a. Na Figura 4.10b, é comparado o deslocamento obtido no ponto D14 (centro da laje). Observa-se uma boa concordância entre as curvas numérica e experimental, sendo a carga última e o deslocamento do modelo numérico de 442,53 kN e 8,66 mm em respectivo. Os resultados para a deformação do concreto foram obtidos a partir do ponto E34, na face inferior da laje, posicionado tangencialmente ao pilar. Na Figura 4.10c, é possível observar a boa aproximação da curva carga *versus* deformação do modelo numérico, conseguindo representar com boa precisão quando comparada ao modelo experimental.

A boa convergência dos resultados da modelagem também pode ser confirmada através da curva de carga *versus* deformação (Figura 4.10d) no ponto E4, localizada na armadura superior tracionada, com extensômetros posicionados nas faces laterais da barra. No modelo numérico, o ponto de monitoramento foi colocado no centro geométrico da barra. Na Figura 4.10e, é comparada a curva carga *versus* deformação para a barra comprimida na posição E27. É possível observar que em ambos os pontos de monitoramento o modelo numérico conseguiu representar a tendência da curva do ponto de medição experimental.

A propagação de fissuras também pode ser análise através da deformação volumétrica, como é mostrado na Figura 4.11. Como esperado para um modelo estrutural submetido à punção, as fissuras surgem no centro do pilar e, com o aumento da carga, seguem em direção até a borda da laje. No caso da fissuração da superfície (Figuras 4.11a, b e c), percebe-se que a orientação das fissuras coincidiu com a do modelo experimental, Figura 4.11g. É notável, também, que as fissuras radiais foram influenciadas pela direção das barras da armadura superior, e o modelo conseguiu capturar, ainda, as fissuras tangenciais na superfície da laje. Como observado nas Figuras 4.11d, e, f, a evolução das fissuras na espessura da laje coincidem com a fissuração esperada de uma ruptura à punção, sendo observado o surgimento inicial de fissuras provocadas pela flexão (retas) e, na sequência, o aparecimento de fissuras inclinadas ao redor do pilar, já na fase de resistência ao cisalhamento.

Figura 4.10 – Comparação dos resultados numérico e experimental do modelo M1

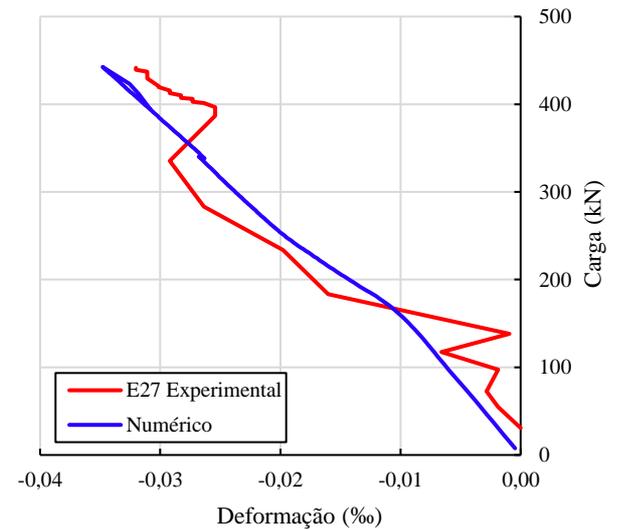
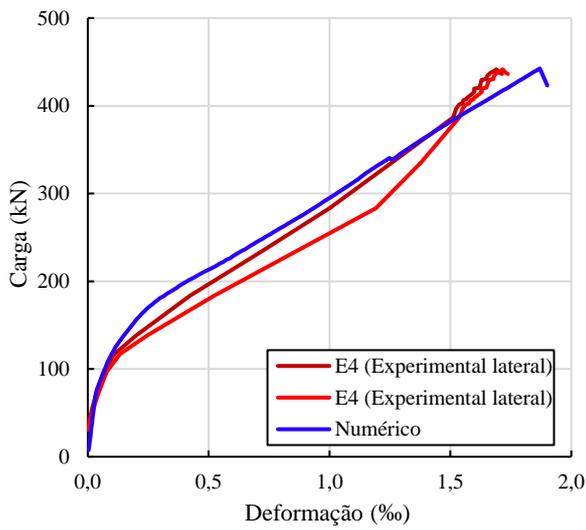
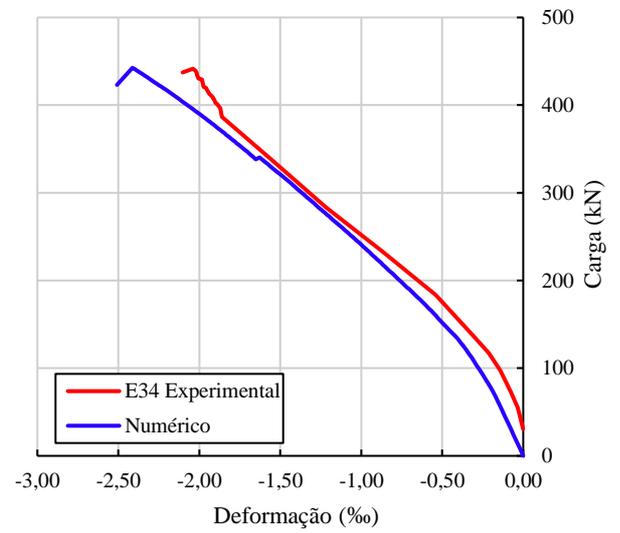
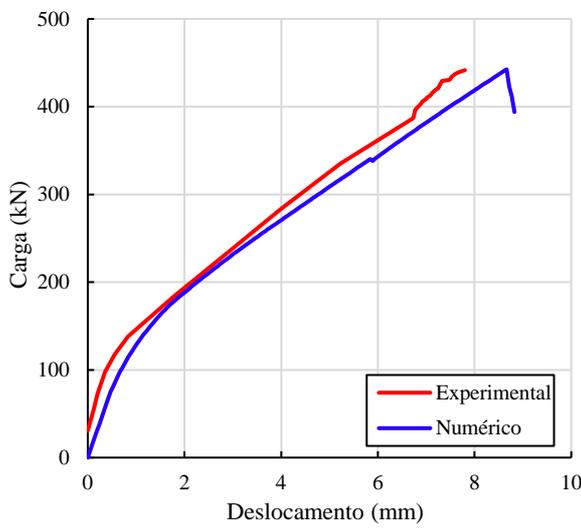
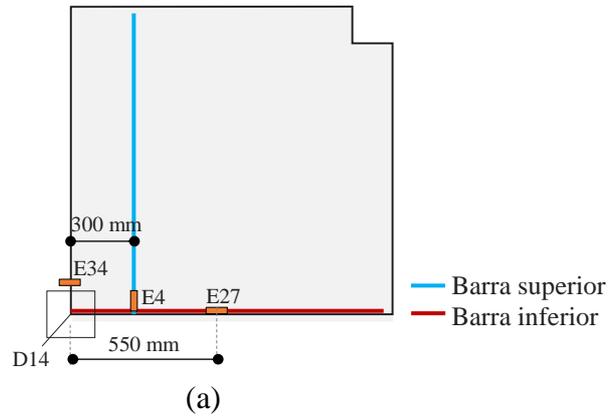
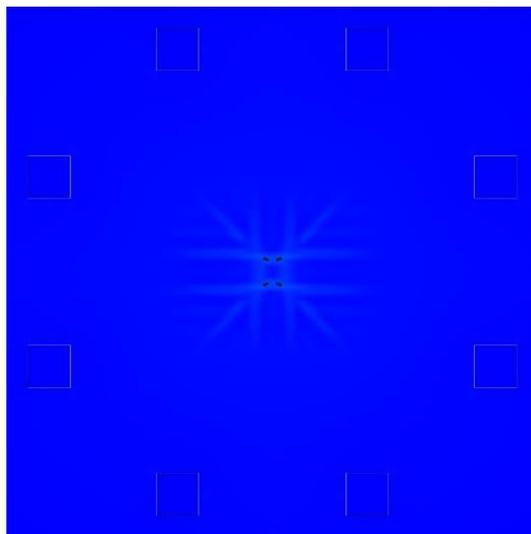
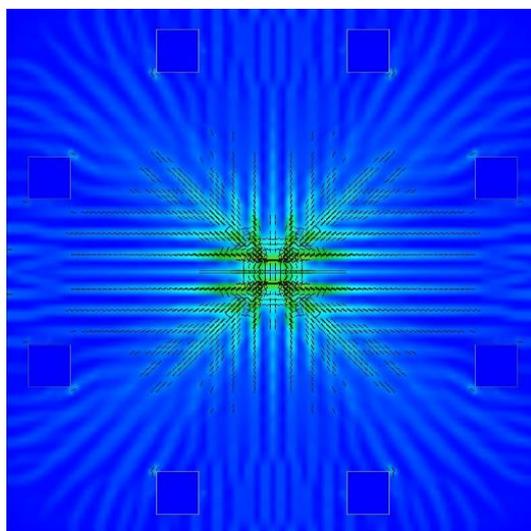


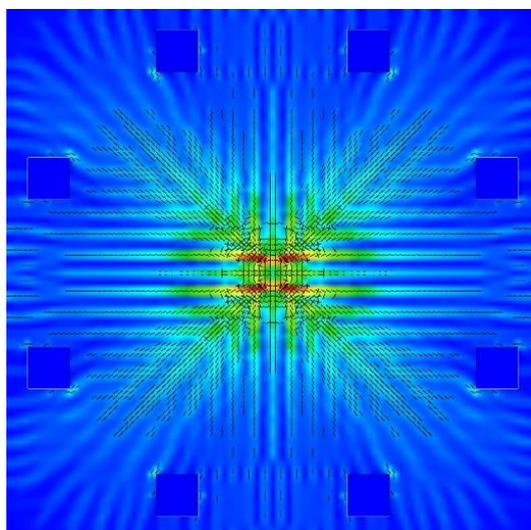
Figura 4.11 – Panorama de fissuração na superfície e espessura do modelo M1



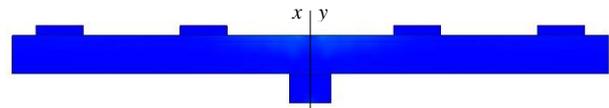
(a) $0,25P = 112,2 \text{ kN}$



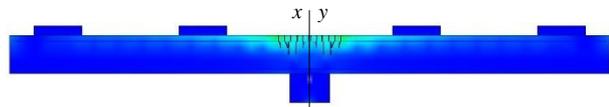
(b) $0,75P = 331,89 \text{ kN}$



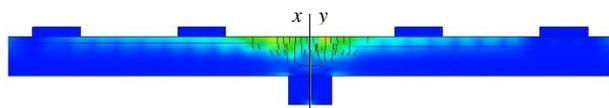
(c) $P = 442,53 \text{ kN}$



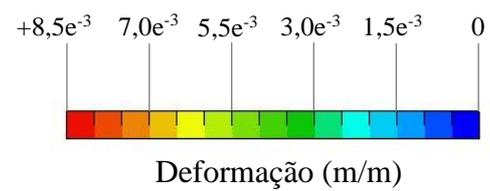
(d) $0,25P = 112,2 \text{ kN}$



(e) $0,75P = 331,89 \text{ kN}$



(f) $P = 442,53 \text{ kN}$



(g) Fissuras do modelo experimental M1

4.2 LAJE LISA DE CONCRETO PROTENDIDO COM RUPTURA POR PUNÇÃO

4.2.1 Laje M4 (Melges 2001)

A laje M4, ensaiada por Melges (2001), tinha as mesmas características de dimensões e de esquema de carregamento que a laje M1, apresentada anteriormente. Como armadura passiva superior, utilizou-se uma malha de barras de 12,5 mm a cada 100 mm e uma altura útil média de 12,8 mm. Como armadura passiva inferior, por sua vez, foi adotada uma malha com barras de 8 mm a cada 100 mm. Assim como no modelo M1, não foi empregada armadura de cisalhamento. Como protensão, foram usados 16 cabos não aderentes do tipo CP-190 RB 7, conforme indicado na Figura 4.12. As propriedades do concreto e da armadura desta laje estão descritas na Tabela 4.9, onde f_{sy} é a tensão de escoamento do aço e f_{sr} é a tensão de ruptura do aço.

Tabela 4.9 – Propriedades mecânicas dos materiais modelo M4

Propriedades do concreto			Propriedades do aço dos cabos				Propriedades do aço passivo			
f_c (MPa)	f_{ct} (MPa)	E_c (MPa)	Diâmetro (mm)	A_p (mm ²)	V_p 1% (kN)	E_p (MPa)	Diâmetro (mm)	f_{sy} (MPa)	f_{sr} (MPa)	E_s (MPa)
51,92	3,87	30,46	12,7	99,9	182	208000	12,5	651,4	792,3	201541
							8	601,8	711,9	206900

Fonte: Melges (2001).

Nesse contexto, as cordoalhas tinham um traçado parabólico, como pode ser observado na Figura 4.12. A equação adotada para a parábola era dada pelas Equações (4.2) e (4.3):

$$h_x = \left(\frac{-4e_x}{L^2}\right)x^2 + \left(\frac{4e_x}{L^2}\right)x \quad (4.2)$$

$$h_x = \left(\frac{-4e_y}{L^2}\right)y^2 + \left(\frac{4e_y}{L^2}\right)y \quad (4.3)$$

Sendo:

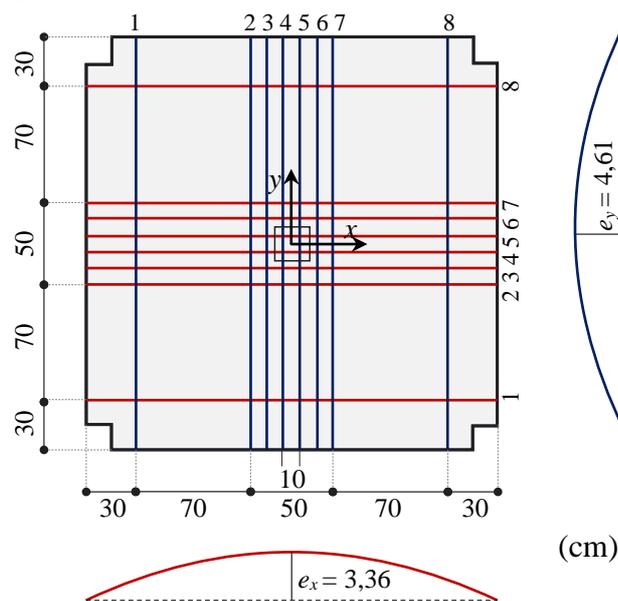
x e y : posição para definir excentricidade da cordoalha nos respectivos eixos;

h_x e h_y : excentricidades da cordoalha na posição x e y respectivamente;

L : comprimento total da cordoalha;

e_x e e_y : excentricidades máximas da cordoalha no meio do vão.

Figura 4.12 – Traçado dos cabos utilizados na laje M4



Fonte: Adaptado de Melges (2001).

O procedimento experimental seguiu com algumas fases adicionais em relação ao procedimento adotado na laje M1. Devido ao acréscimo da protensão, o carregamento foi dividido em diferentes etapas, seguindo como primeiro procedimento, antes do início da protensão, aplicação, na laje M4, de uma carga de aproximadamente 80 kN, segundo Melges (2001), com o objetivo de evitar que o efeito da compressão dos cabos provocasse fissuras na face inferior da laje. Em seguida, os cabos eram tensionados com uma força padrão de 147 kN, processo esse que se repete devido às perdas nas ancoragens.

Após essa fase de protensão, foi observado um acréscimo da carga aplicada pelos atuadores hidráulicos, o que se explica, segundo Melges, devido ao traçado parabólico dos cabos, já que funcionavam como apoio antes da aplicação do carregamento. No final da fase de protensão, a força total medida foi de 221,30 kN. A partir desse ponto, foi aplicado o carregamento constante no centro da laje até que se atingisse a ruptura. O valor registrado referente à ruptura experimental foi de 772,55 kN, com deslocamento 8,27 mm. As forças aplicadas nas cordoalhas também foram registradas conforme Tabelas 4.10 e 4.11.

Tabela 4.10 – Força de protensão nas cordoalhas dispostas na direção x (kN)

Cabo	1	2	3	4	5	6	7	8
Protensão	97,92	98,06	94,70	94,06	97,09	94,38	121,10	95,24
Re-protensão	132,38	129,70	131,20	128,48	128,77	129,61	133,21	130,61
Na ruptura	135,04	136,07	138,34	135,99	136,03	137,89	140,07	134,10

Fonte: Melges (2001).

Tabela 4.11 – Força de protensão nas cordoalhas dispostas na direção y (kN).

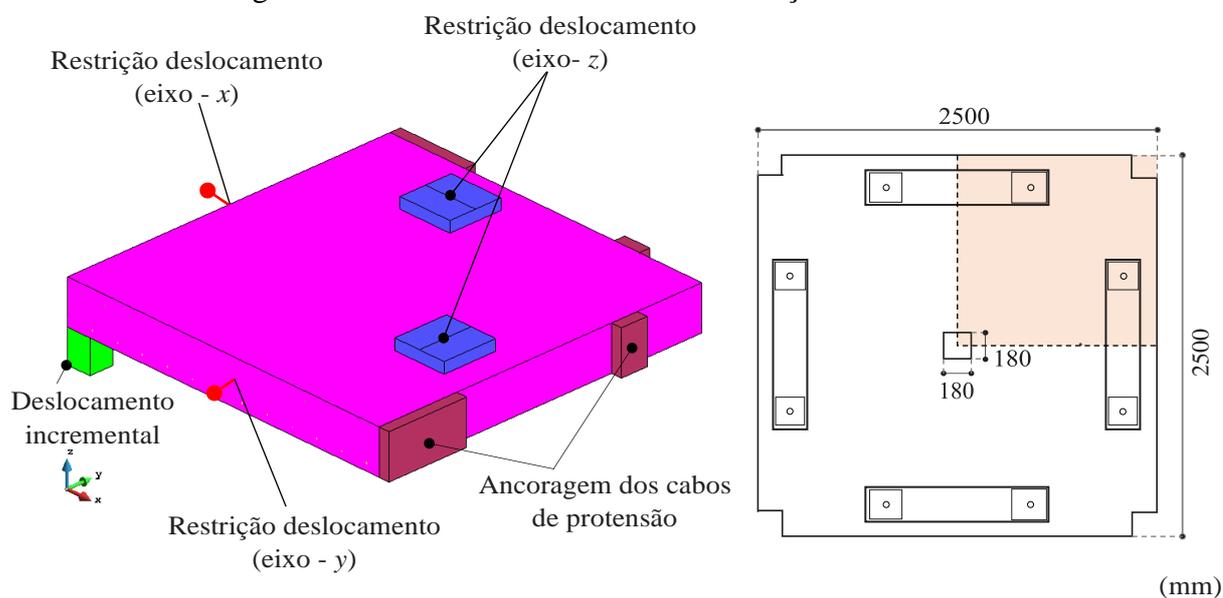
Cabo	1	2	3	4	5	6	7	8
Protensão	92,03	102,62	98,86	98,68	93,53	97,59	85,80	98,24
Re-protensão	127,64	131,90	131,86	133,92	128,65	132,29	127,48	131,94
Na ruptura	131,25	139,93	140,58	142,32	137,15	141,03	134,88	135,52

Fonte: Melges (2001).

4.2.1.1 Modelagem numérica

Na Figura 4.13, é possível observar o modelo de elementos finitos que será utilizada para esta análise. Na discretização, foram incluídas as placas de apoio, o pilar e as placas de ancoragens dos cabos. A simulação numérica seguiu as mesmas etapas descritas no processo experimental, com o objetivo de representar o procedimento do ensaio com a maior fidelidade possível. A modelagem foi realizada seguindo os parâmetros finais estabelecidos para a laje M1.

Figura 4.13 - Modelo numérico M4 e condições de contorno



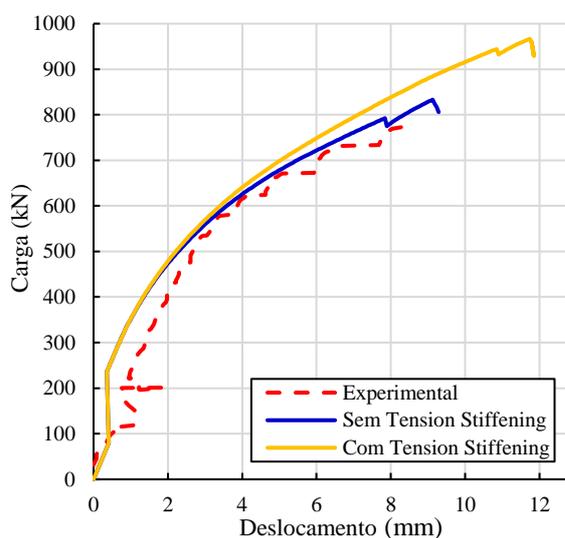
Com o objetivo de representar o procedimento do ensaio experimental, o modelo numérico foi dividido em três intervalos de carregamento, sendo:

- (I) Aplicação de deslocamento incremental no pilar até a laje atingir uma reação de 80 kN.
- (II) Aplicação de uma força padrão em cada um dos cabos de protensão pelo comando *Prestressing for reinf line* em condições de contorno.
- (III) No final da protensão, são ativadas as conexões de nó mestre-escravo entre a extremidade do cabo e o nó mais próximo da placa de ancoragem. Por fim, é aplicado o deslocamento incremental no pilar até a laje atingir a ruptura.

4.2.1.2 Resultados da análise numérica desconsiderando o Tension Stiffening

Empregando os parâmetros estabelecidos na análise da laje M1, é possível observar, através da curva carga *versus* deslocamento que os resultados obtidos estimaram, a carga de ruptura em 966,53 kN, valor bem superior ao esperado. Tendo em vista o resultado, e baseando-se em pesquisas como a de Gar *et al.* (2012), na qual foi realizado um estudo do *Tension Stiffening* em vigas de concreto protendido, indicando que, em contraste com as seções de concreto armado, o efeito da rigidez à tração é desprezível para seções de concreto totalmente protendidas, foi efetuada uma nova análise desprezando este efeito, as quais revelaram resultados mais condizentes ao esperado, conforme apresentado na Figura 4.14.

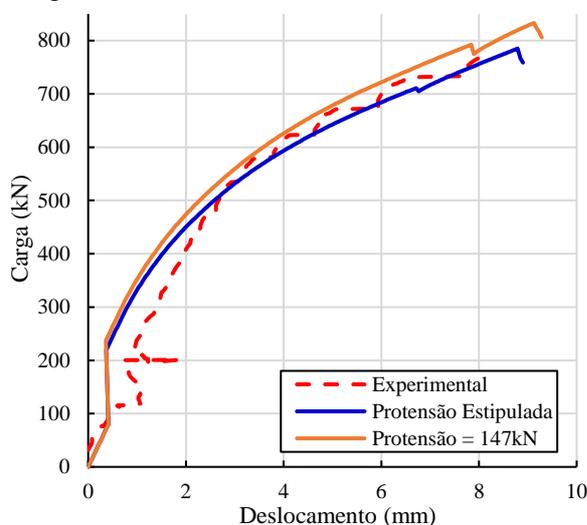
Figura 4.14 – Curvas carga *versus* deslocamento obtidas no estudo do *Tension Stiffening*



4.2.1.3 Resultados relacionados à protensão

Conforme estabelecido anteriormente que o efeito de rigidez à tração deve ser desconsiderado em elementos com protensão, foram realizados testes aplicando a força de protensão efetiva (após a re-protensão, de acordo com o indicado nas Tabelas 4.10 e 4.11). O resultado foi comparado pela curva carga *versus* deslocamento com o resultado obtido anteriormente, considerando a protensão estipulada por Melges (2001) de 147 kN. Aplicando a força efetiva, pode-se observar na Figura 4.15, que o resultado foi mais convergente com o do modelo experimental, sendo, portanto, empregado esses parâmetros como calibração final de modelo numérico.

Figura 4.15 – Curvas carga *versus* deslocamento obtidas no estudo da força de protensão



4.2.1.4 Comparação dos resultados

Considerando-se os resultados obtidos na análise numérica, foi possível estabelecer comparações com o modelo experimental. Na Tabela 4.12 são dispostos os resultados obtidos com base nas forças aplicadas em cada cabo no momento da ruptura da laje para as direções *x* e *y*, os quais podem ser comparados com os obtidos experimentalmente.

Tabela 4.12 – Comparação da força de protensão das cordoalhas na ruptura

Cabo	direção <i>x</i> (kN)				direção <i>y</i> (kN)			
	5	6	7	8	5	6	7	8
Numérico	137,28	137,94	141,41	135,63	139,13	142,61	137,52	138,17
Experimental	136,03	137,89	140,07	134,10	137,15	141,03	134,88	135,52
Erro (%)	0,92	0,04	0,96	1,14	1,44	0,72	0,76	0,75

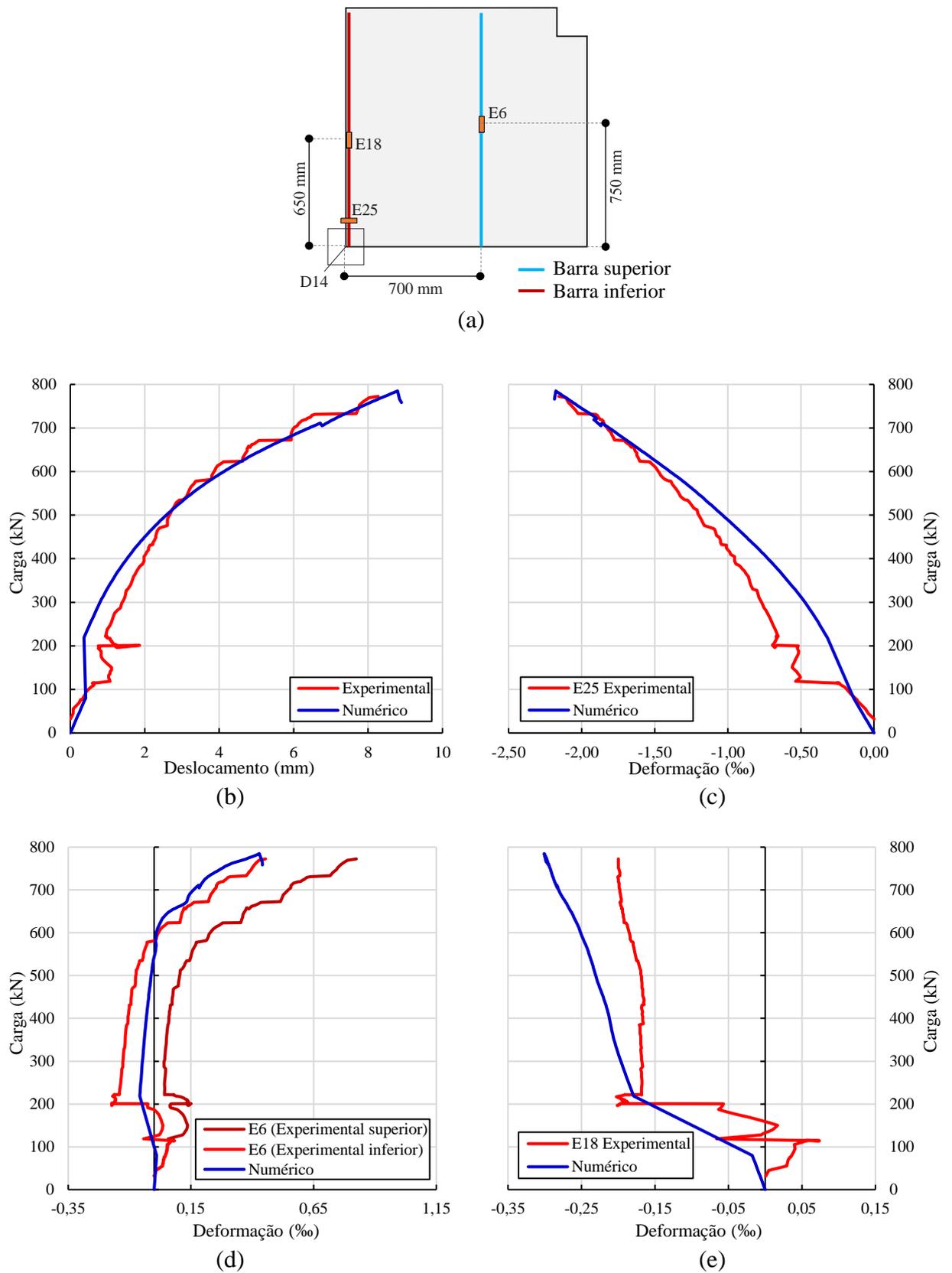
Foi possível observar, nesse cenário, que a resposta numérica conseguiu representar com boa precisão o valor de força final, com margem de erro percentual inferior a 2%, comprovando que o modelo adotado para simular o comportamento dos cabos não aderentes foi satisfatório.

Tomando a curva carga *versus* deslocamento na posição D14 (centro da laje), e posições dos extensômetros conforme Figura 4.16a. É observado, em ambas as curvas (Figura 4.16b), o carregamento inicial até que seja atingido 80kN. Em seguida, é iniciada a aplicação das forças de protensão. Na etapa de aplicação da protensão, a curva experimental apresentou oscilações, as quais podem ser explicadas pela re-protensão realizada nos cabos e na acomodação de seus apoios. Na análise numérica, não foram observadas tais variações, o que pode ser justificado pelo fato de a protensão ser aplicada simultaneamente em todos os cabos, com restrição completa do deslocamento vertical no pilar. Ao final da protensão, a componente vertical dos cabos fez com que a carga do modelo experimental atingisse 221,30 kN; já no modelo numérico atingiu-se 218,74 kN. Após a protensão, observa-se que a resposta numérica conseguiu reproduzir a tendência no trecho final da curva do ensaio, chegando à carga e aos deslocamentos finais de 785,06 kN e 8,79 mm, valores esses 1,63% e 6,29% superiores, respectivamente, e, portanto, bem próximos aos obtidos por Melges (2001).

Também foram comparadas as curvas de carga *versus* deformação para as posições E25, referente a deformação do concreto, E6, característica de uma barra superior submetida à flexão, e E18, em uma barra inferior submetida à compressão, conforme posições representadas na Figura 4.16a. Para a deformação do concreto, foram comparados os resultados numéricos com os obtidos na posição E25, colocado na face inferior da laje tangencialmente ao pilar. Observa-se uma boa convergência do modelo numérico representado pela curva na Figura 4.16c com o resultado experimental, com uma pequena discrepância apenas na fase inicial, quando se aplica a protensão.

Na posição E6 no modelo experimental, foram colocados dois extensômetros, um superior e outro inferior. Na Figura 4.16d, é possível observar como a curva obtida numericamente para a posição E6 conseguiu manter-se entre os dois extensômetros, representando bem uma média do comportamento da barra, o que a deixa mais próxima do extensômetro inferior a partir de 588 kN. No caso da posição E18, até o final da protensão a curva (Figura 4.16e), consegue capturar bem as deformações; após a protensão, a curva do modelo numérico conseguiu capturar a tendência da curva experimental, não representando com maior precisão quanto a barra tracionada.

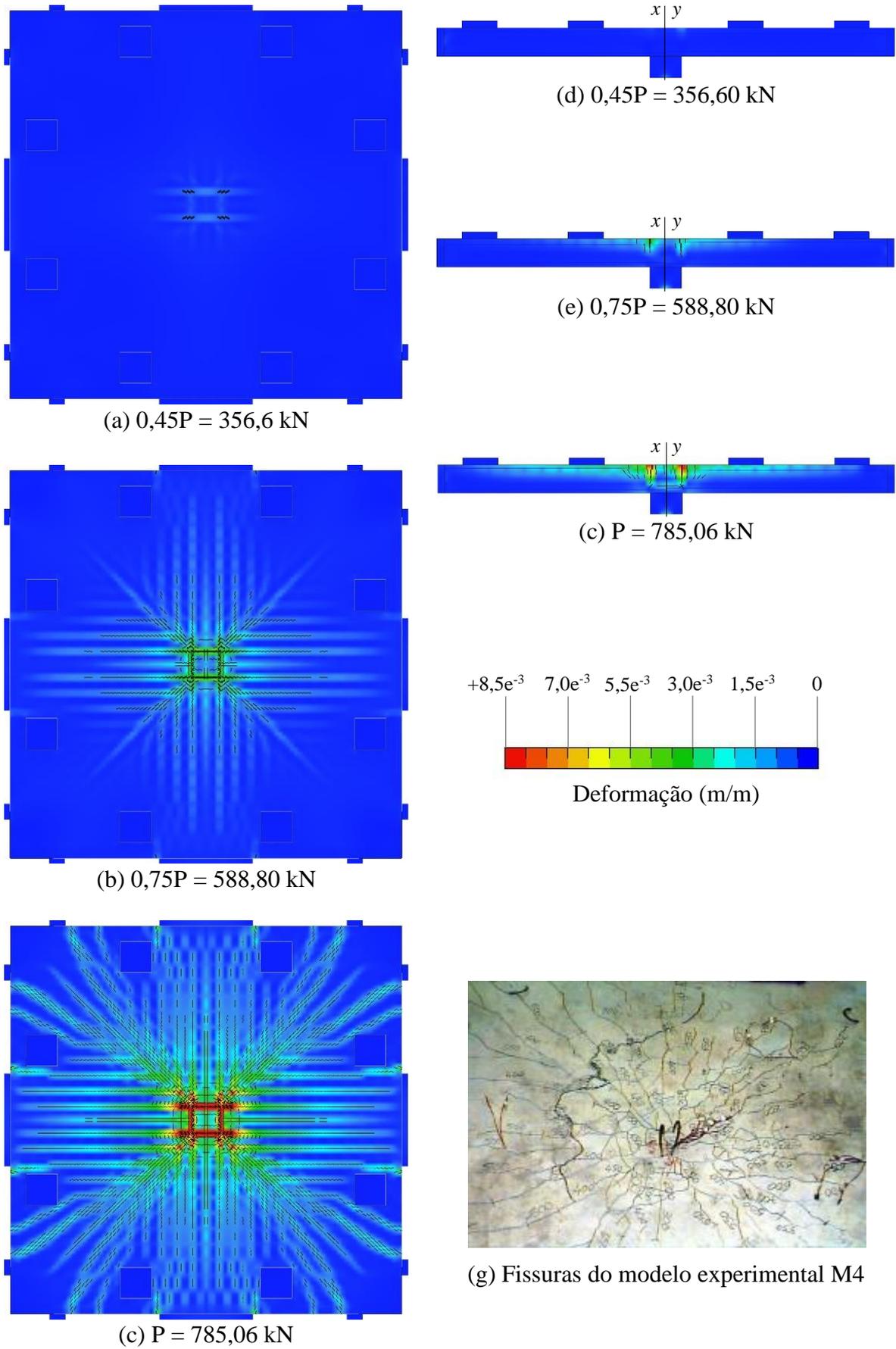
Figura 4.16 – Comparação dos resultados numéricos e experimental do modelo M4



O panorama de fissuração também pode ser obtido pelo pós-processamento do *ATENA*. Na Figura 4.17, é mostrado que o controle da fissuração obtido no concreto ocorreu de forma controlada quando comparado ao modelo M1 (mostrado na Figura 4.11, página 104), o que pode ser explicado pela aplicação da protensão. A primeira fissura é observada para um carregamento de 356,6 kN (Figuras 4.17a e 4.17d).

O panorama das fissuras radiais evoluiu como no modelo M1, seguindo a direção das barras superiores flexionadas até a margem do modelo. Próximo da ruptura (Figura 4.17e), é possível identificar fissuras inclinadas na espessura da laje e fissuras tangenciais no entorno do pilar, formando um cone de punção, assim como no modelo experimental (Figura 4.17g).

Figura 4.17 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo M4



5 ESTUDO PARAMÉTRICO

Este capítulo tem como objetivo apresentar um estudo paramétrico com base na metodologia dos modelos numéricos calibrados no Capítulo 4.

5.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

A partir dos parâmetros estabelecidos com a modelagem numérica, a qual foi auxiliada pelo programa *ATENA*, implementou-se um estudo paramétrico com o objetivo de avaliar a influência da protensão na resistência à punção. As características e metodologias dos novos modelos serão mantidas de acordo com o modelo M4, de forma que itens como geometria, materiais, taxa de armadura longitudinal, características dos cabos de protensão e força neles aplicada, bem como condições de contorno e pontos de monitoramento, empregados de acordo com o item 4.2 serão preservados. Para cada variável estudada, todas as características do modelo foram mantidas, sendo alterado apenas o parâmetro analisado.

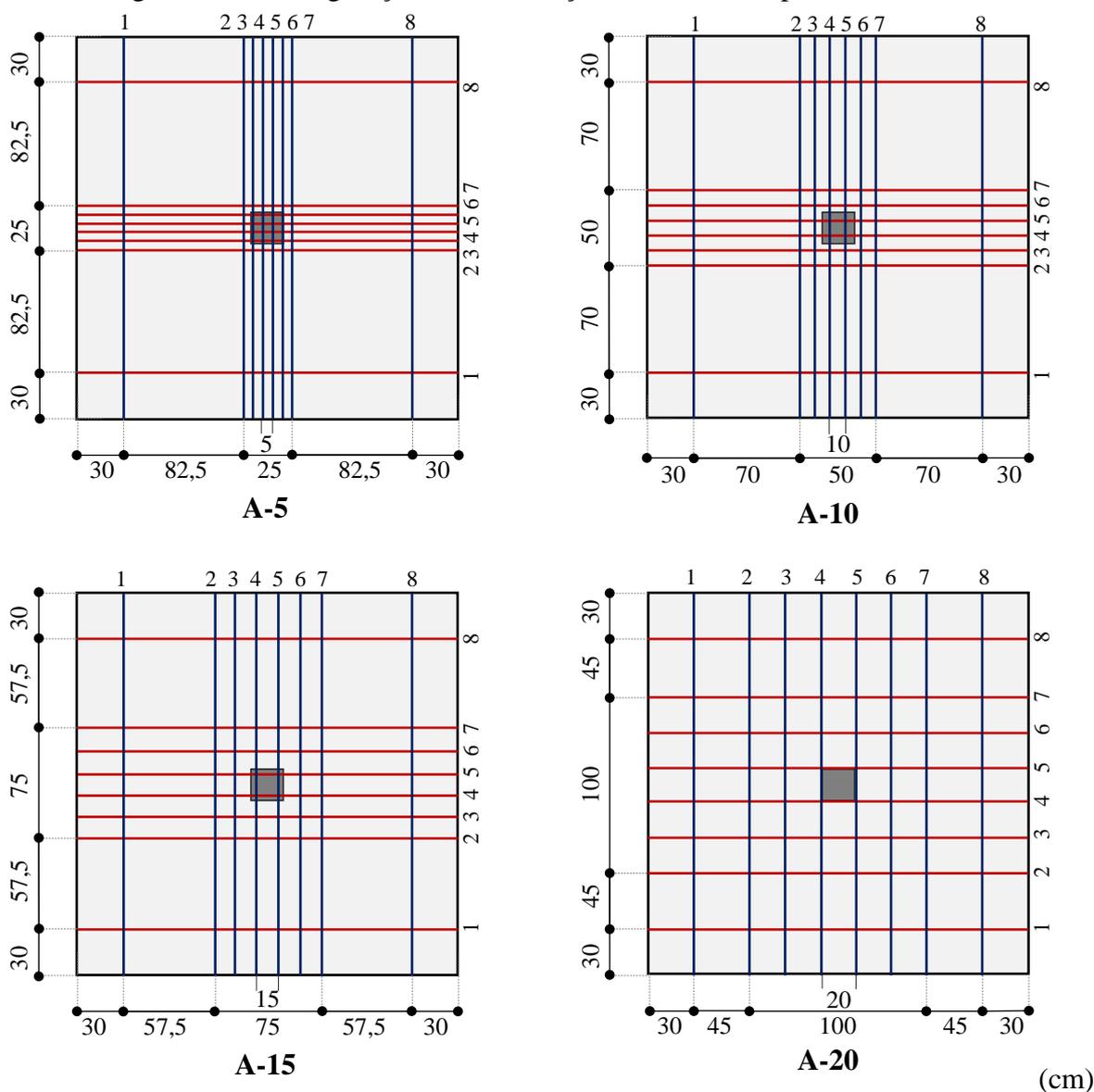
5.2 DESCRIÇÃO DOS MODELOS PROPOSTOS

Para esta etapa do trabalho, foram avaliados 25 novos modelos junto com o modelo de referência M4, os quais foram divididos em três séries, dotados das seguintes variáveis;

- **Série A:** 3 modelos variando o espaçamento entre os cabos de protensão central;
- **Série E:** 7 modelos variando a espessura da laje;
- **Série P:** 15 modelos variando a retangularidade do pilar.

Os 3 novos modelos da **Série A** (ver Figura 5.1), correspondem ao espaçamento entre os cabos de protensão na região central da laje (5 cm, 10 cm, 15 cm e 20 cm), sendo definidos pela nomenclatura: *série-espaçamento*. Dessa forma, o modelo da série A com espaçamento de 5 cm fica representado como **A-5**. A série **A-10** será o modelo de referência o qual corresponde ao modelo M4 do item 4.2. Esta parametrização teve como objetivo identificar a interferência do espaçamento dos cabos de protensão na resistência a punção.

Figura 5.1 – Configuração da distribuição dos cabos em planta da Série A



Para a **Série E**, os 7 novos modelos analisados se referem a espessura da laje, sendo sua nomenclatura *série-espessura*. Desse modo o modelo da série E com espessura 18 cm fica representado como **E-18**. O modelo de referência, por sua vez, corresponde ao modelo M4 com 16 cm de espessura, descrito como **E-16**. Os demais modelos foram construídos adicionando-se 2 cm de espessura na face inferior da laje até que fossem atingidos 30 cm. Dessa forma, a excentricidade dos cabos de protensão foi mantida sem alteração. Na Figura 5.2, são dispostos quatro exemplos dos modelos da série E.

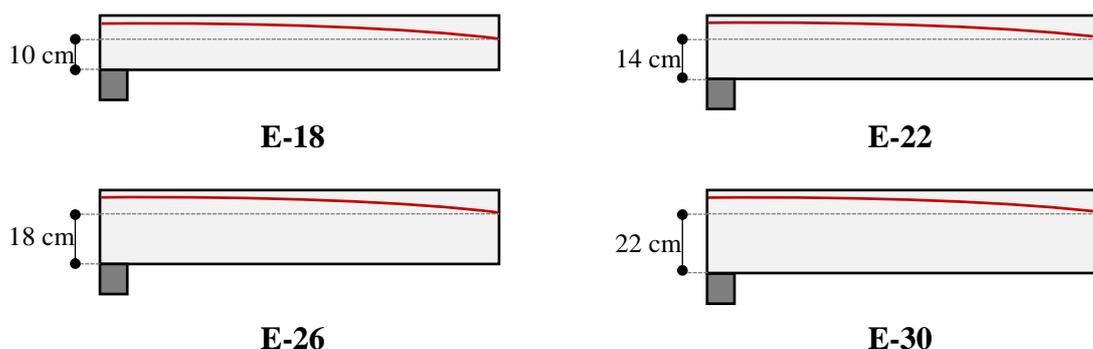
Devido as alterações na espessura das lajes, as malhas dos modelos foram ajustadas seguindo a parametrização realizada no Capítulo 4. Os elementos do tipo hexaédricos foram mantidos, e os modelos foram ajustados de acordo com a Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Refinamento da malha da série E

Modelo	Número de divisões na espessura da laje	Número de nós	Número de elementos
E-16	6	18508	15172
E-18	7	22991	18036
E-20	8	25685	20592
E-22	9	28409	23164
E-24	9	28409	23164
E-26	10	31188	25728
E-28	11	33827	28292
E-30	12	36536	30856

Esta parametrização teve como objetivo identificar como um pequeno acréscimo na espessura da laje interfere na resistência à punção, bem como prover um estudo do *size effect* em lajes lisas protendidas.

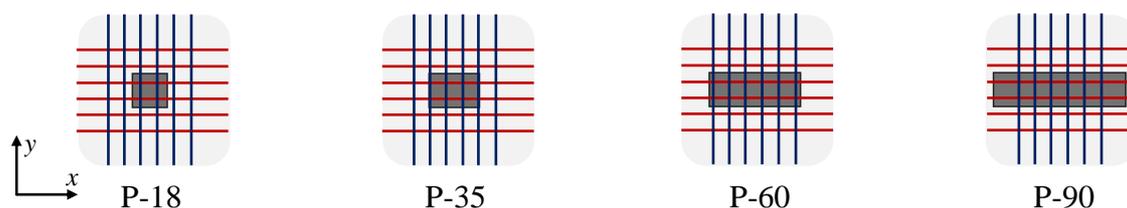
Figura 5.2 – Configurações da espessura nos modelos da Série E



Os 15 novos modelos da Série P se referem à retangularidade do pilar de apoio da laje. Os modelos criados mantiveram todos os parâmetros do modelo M4. As variações iniciaram-se a partir de um pilar de 18 x 20 cm, com acréscimo de 5 cm na direção do eixo x , conforme exemplos da Figura 5.3. Os modelos variaram até o valor limite considerado para um pilar-parede segundo a NBR 6118 (2014), isto é, sem exceder cinco vezes sua menor seção e ficando limitado a 90 cm.

A nomenclatura elaborada para facilitar a compreensão desses segmentos corresponde à *série-tamanho do pilar*. Nesse sentido, o pilar da série P com 20 cm aparece como **P-20**. O modelo M4, já realizado no item 4.2, se refere a laje de referência **P-18**.

Figura 5.3 – Configurações das dimensões dos pilares nos modelos da Série P



5.3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste item são apresentados os resultados das três séries analisadas. Os pontos de monitoramento foram mantidos de acordo com o modelo M4, sendo assim, possível comparar os novos resultados obtidos com os já apresentado para o modelo numérico. Foram analisadas as cargas últimas, deslocamento e deformações máximas no concreto e aço, e assim identificar como as variações de cada série pode influenciar na resistência a punção de lajes lisas protendidas. A máxima força aplica nos cabos de protensão e o panorama de fissuração obtidos dos principais modelos numéricos também são comparados.

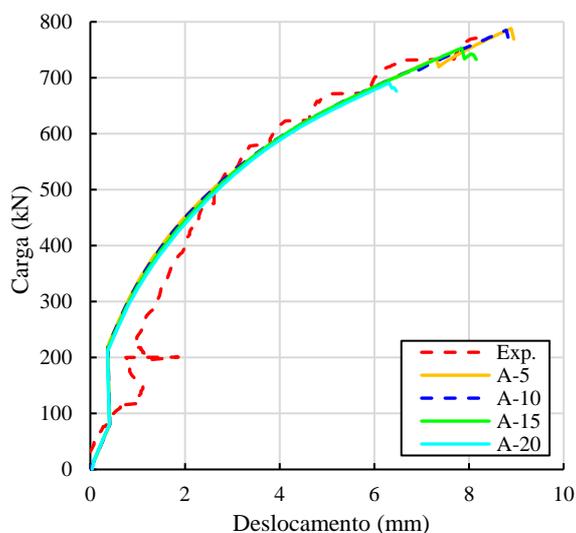
Por fim, com os valores obtidos nas análises numéricas, será realizada uma comparação entre com os previstos pelas normas ACI 318 (2019), Eurocode 2(2004), NBR 6118 (2014), *fib* Model Code (2010) LoA II e LoA III.

5.3.1 Resultados obtidos nos modelos da série A

Nesta seção, são apresentados alguns dos resultados obtidos, os quais representam a influência que o espaçamento entre os cabos de protensão pode exercer no comportamento das lajes. Os resultados são apresentados na forma de curvas de carga versus deslocamento e carga versus deformação do concreto e das barras longitudinais submetidas à tração e compressão, além da força máxima resistida pelos cabos de protensão e do panorama de fissuração dos modelos.

Na Figura 5.4, são comparados às curvas de carga *versus* deslocamento do modelo experimental com os quatro modelos de laje, junto de seus respectivos valores máximos tabelados. Foi observado que, ao aumentar o espaçamento entre os cabos, ocorre uma redução na resistência à punção. Observa-se também que o modelo **A-5**, com menor espaçamento, apresentou um leve acréscimo na resistência, o que também é justificado devido à área de contato da superfície da laje com o pilar estar coincidindo com dois cabos de protensão (ver Figura 5.1).

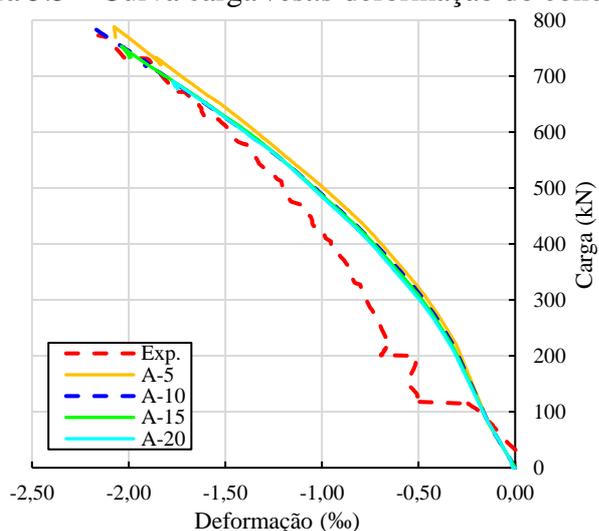
Figura 5.4 – Curva carga *versus* deslocamento da série A e respectivos valores máximos



Modelo	Carga (kN)	Deslocamento (mm)
A-5	788,12	8,89
A-10	785,06	8,79
A-15	753,17	7,85
A-20	690,83	6,31

Em relação à deformação do concreto, em todos os quatro modelos observa-se nas curvas da Figura 5.5 uma similaridade entre seus comportamentos. Além de um maior ganho de resistência, a redução do espaçamento entre os cabos, no modelo **A-5**, auxiliou na redução da deformação do concreto ($\epsilon_{c,m\acute{a}x}$). Para os modelos com maior espaçamento, se observa, conforme tabelado, uma redução na deformação máxima, o que se indica uma ruptura mais frágil, justificado pela antecipação da ruptura dos modelos.

Figura 5.5 – Curva carga *versus* deformação do concreto da série A e valores máximos

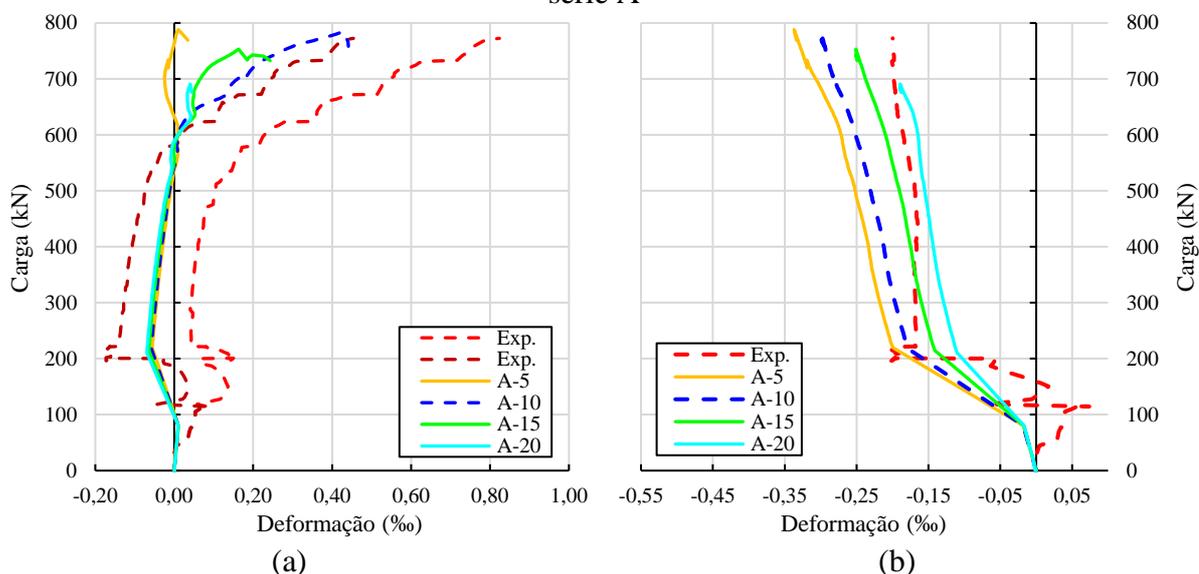


Modelo	$\epsilon_{c,m\acute{a}x}$ (‰)
A-5	-2,08
A-10	-2,18
A-15	-2,04
A-20	-1,77

Como pode ser observado na Figura 5.6, a protensão também gera alguns efeitos nas deformações máximas atingidas nas armaduras passivas das lajes. A Figura 5.6a, apresenta as curvas de carga *versus* deformação do aço tracionado nos quatro modelos estudados para a série

A, nos quais é observado um comportamento bem similar até que se atinjam 600 kN. A partir desse ponto, a deformação dos modelos se distingue da dos demais, sendo o modelo **A-5** o de menor variação na deformação. Assim como observado nas curvas da capacidade de carga e de deformação do concreto, é perceptível, nas curvas, a interferência do espaçamento entre os cabos de protensão, tanto nas barras superiores tracionadas quanto nas barras inferiores comprimidas (Figura 5.6b).

Figura 5.6 – Curva carga *versus* deformação na armadura tracionada a) e comprimida b) da série A



Na Tabela 5.2, é apresentada a força máxima atingida por cada cabo no momento da ruptura, nas direções x e y , de cada um dos quatro modelos. É observado que a laje **A-10** foi a que dispôs os maiores acréscimos de forças para a resistência do modelo, seguida da **A-5**.

Nos modelos **A-15** e **A-20**, é perceptível como a resistência máxima atingida pelas cordoalhas tende a reduzir conforme são aumentados seus espaçamentos. Considerando apenas os cabos 5, 6 e 7, foram observadas reduções nos esforços resistido pelos cabos de até 4,2 kN na direção x , e de até 5,0 kN da direção y .

Tabela 5.2 – Comparação da força de protensão das cordoalhas na ruptura da série A

Modelo \ Cabo	direção x (kN)				direção y (kN)			
	5	6	7	8	5	6	7	8
A-5	136,41	137,27	140,93	135,02	138,23	141,86	137,18	137,77
A-10	137,28	137,94	141,41	135,63	139,13	142,61	137,52	138,17
A-15	135,73	136,21	139,41	134,08	137,38	140,59	135,13	136,45
A-20	133,76	134,09	137,19	132,85	135,07	138,11	132,50	134,99

5.3.1.1 Panorama de fissuração da série A

O panorama de fissuração foi analisado pela vista superior da laje e por uma vista em relação a espessura dos modelos. Assim como no Capítulo 4, foram mostrados os resultados no momento da abertura da primeira fissura, no passo de carga a $0,75P$, e no momento da ruptura (P). Como pode ser visto na Figura 5.7, os modelos analisados foram condizentes com a evolução das fissuras observadas no modelo de calibração numérico, M4 (equivalente ao **A-10**), assim como apresentado no ensaio de Melges (2001).

No geral, o panorama das fissuras radiais dos modelos seguiu a direção das barras superiores tracionadas até a margem. Próximo da ruptura, é possível identificar como a laje **A-5** consegue suportar maiores deformações em relação às demais. O modelo também se destaca como o de maior formação e distribuição de fissuras na superfície da laje, o que se justifica devido às tensões de protensão estarem concentradas na região mais próxima do pilar, o que faz com que a laje resista a maiores deformações. Nas Figuras 5.7f, 5.8f e 5.9f, também é possível identificar uma semelhança das fissuras tangenciais quanto à espessura e à superfície da laje (Figuras 5.7c, 5.8c e 5.9c) no entorno do pilar, algo característico da formação do cone de punção. Conforme as figuras são apresentadas, percebe-se que o espaçamento dos cabos interfere não somente na capacidade da laje, mas também na concentração de fissuras.

Figura 5.7 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo **A-5**

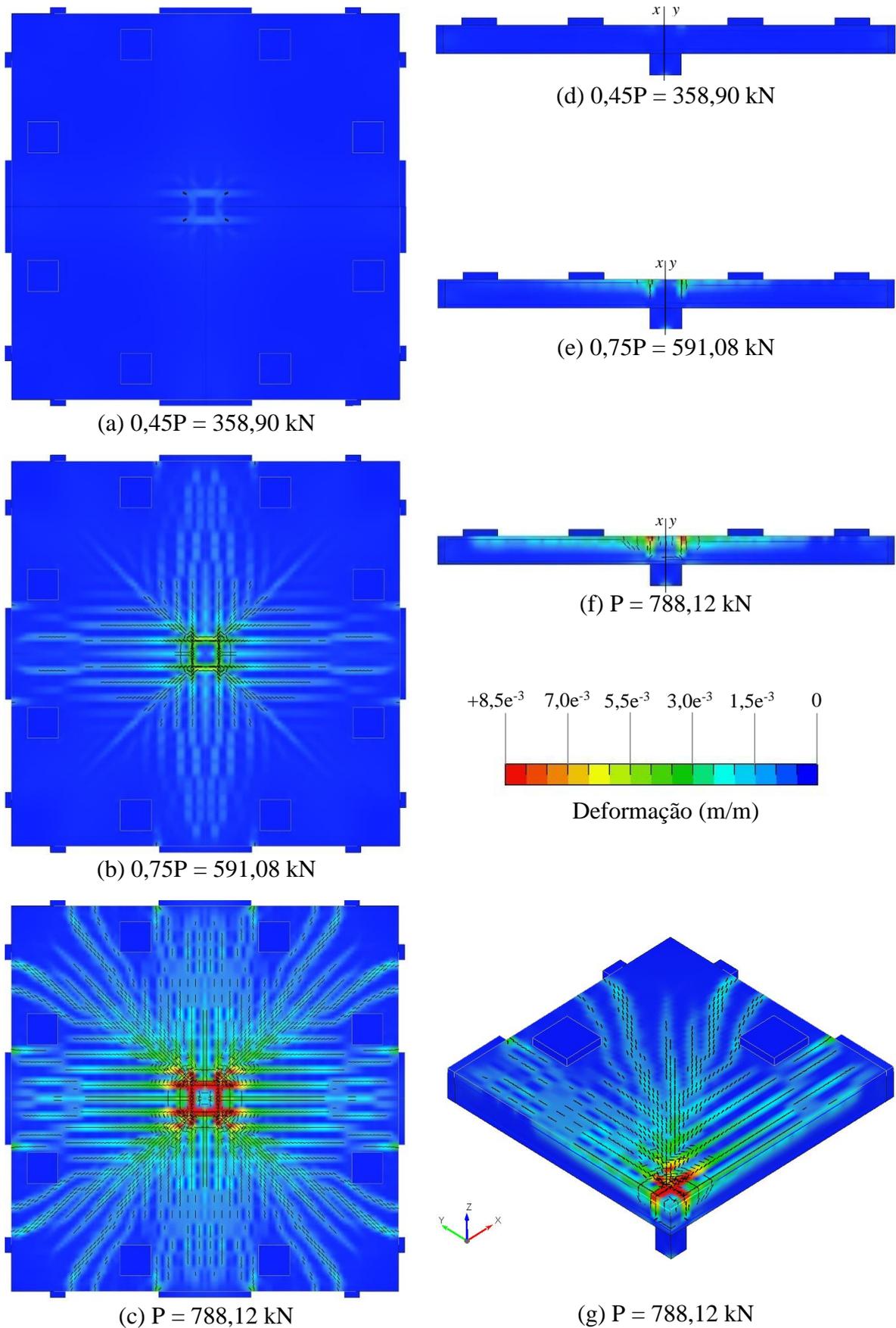


Figura 5.8 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo A-15

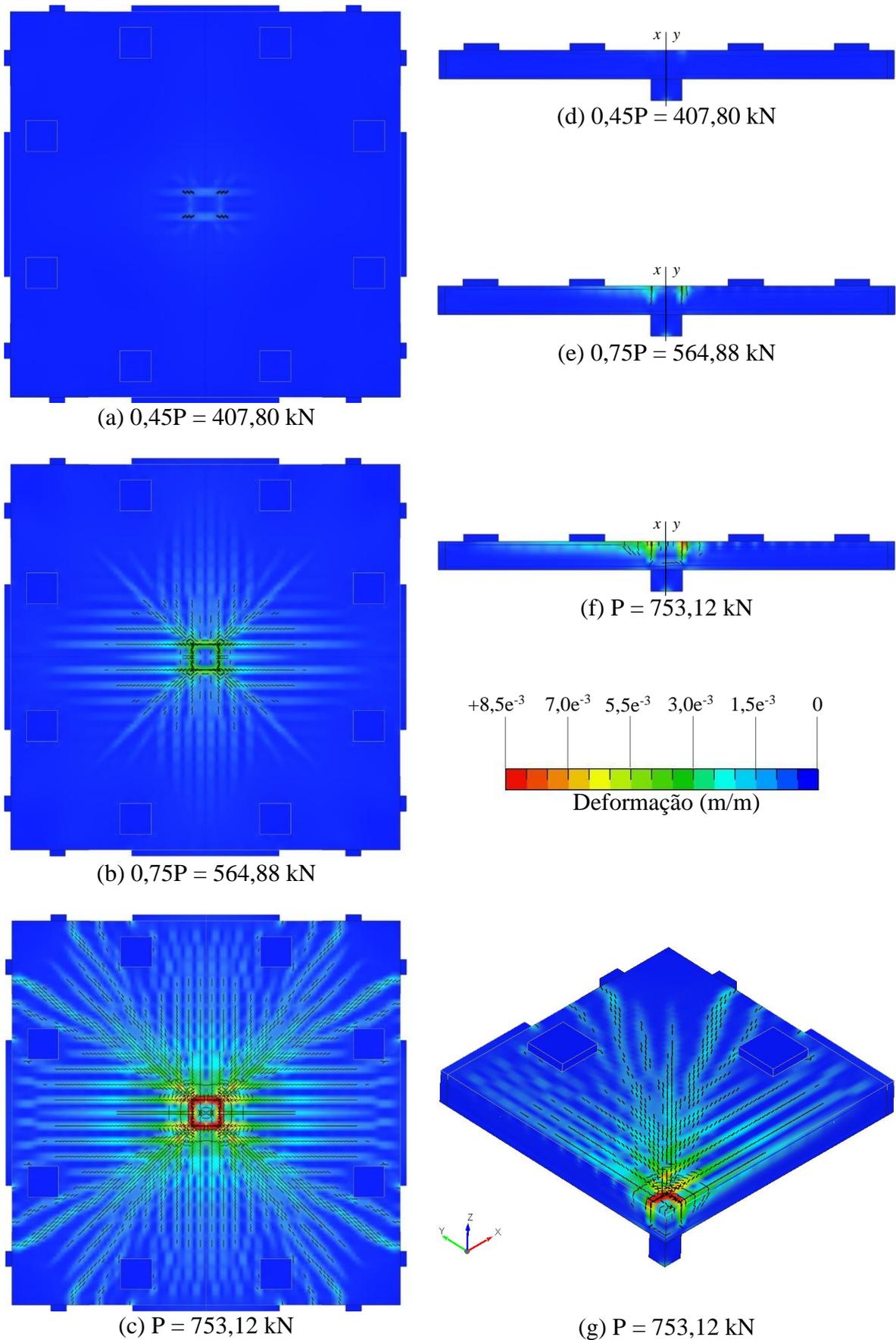
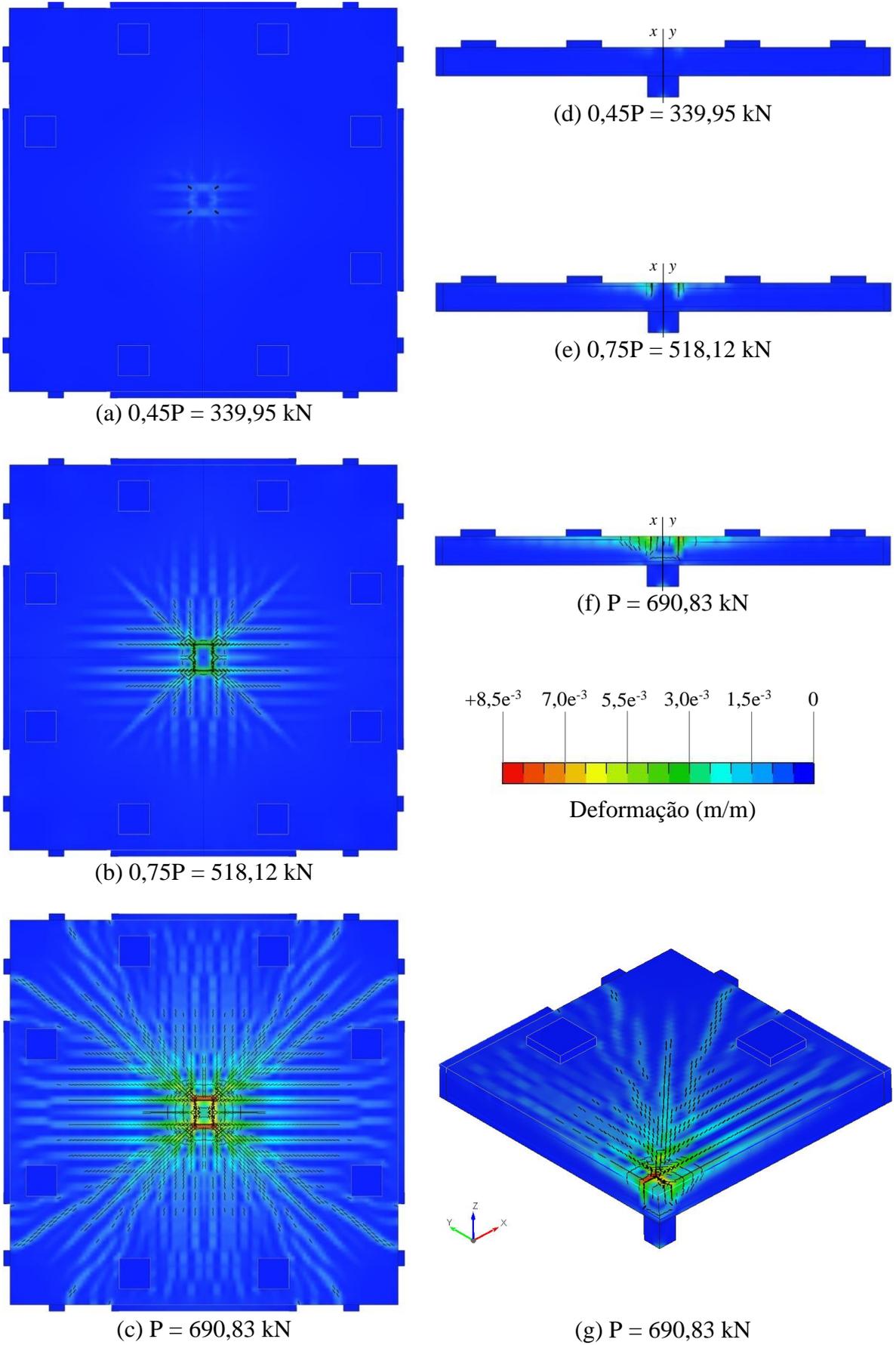


Figura 5.9 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo A-20



5.3.2 Resultados obtidos nos modelos da série E

Na sequência do estudo, também são apresentados alguns resultados com a finalidade de identificar a influência que acréscimos na espessura da laje exercem na capacidade contra punção de lajes lisas protendidas. Os resultados são dispostos na forma de tabelas, curvas e panorama de fissuração, assim como no item anterior.

Na Tabela 5.3, são comparados a carga e o deslocamento máximo dos oito modelos da Série E, de **E-16** à **E-30**, no momento da ruptura, e às suas respectivas variações. Com base nos dados apresentados, é perceptível como alterações na espessura da laje provocam interferências na sua capacidade de resistência e na rigidez dos modelos. As configurações apresentaram contribuições de 8% a 19% para a carga última - considerando-se, aqui, o respectivo número do modelo anterior menos espesso - e, para alguns, uma redução no deslocamento de até 20%.

Tabela 5.3 – Comparação da carga e deslocamento na ruptura dos modelos da série E

Modelo	Carga (kN)	Variação (%)	Deslocamento (mm)	Variação (%)
E-16	785,06	-	8,79	-
E-18	909,46	15,85	7,04	-19,90
E-20	1059,23	16,46	6,22	-11,64
E-22	1187,16	12,08	5,33	-14,31
E-24	1408,22	18,62	5,62	5,44
E-26	1534,49	8,97	4,81	-14,41
E-28	1669,18	8,78	4,19	-12,89
E-30	1870,16	12,04	4,22	0,72

Obs:

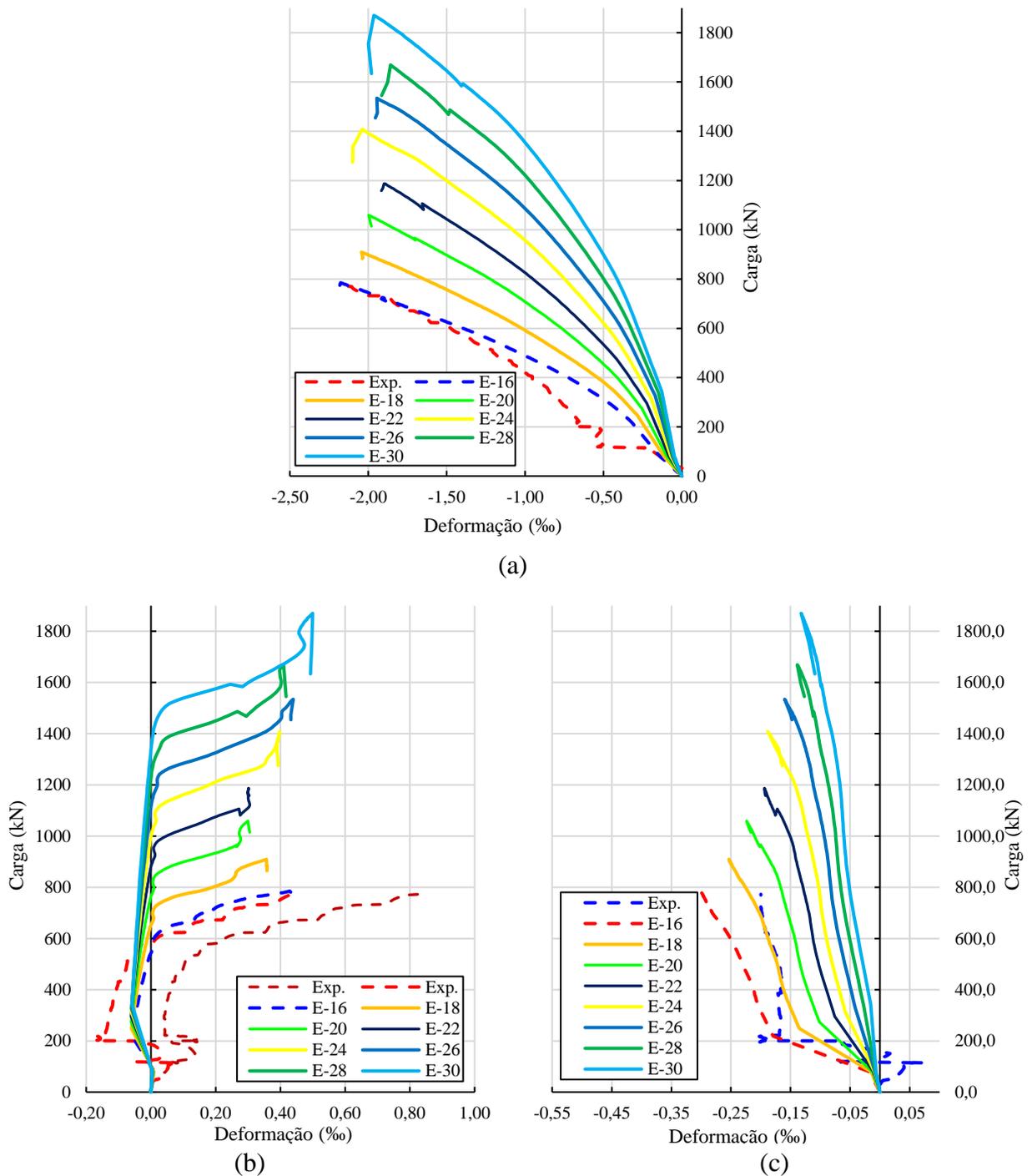
Variação (%) é a diferença percentual em relação ao modelo anterior

Outro ponto analisado diz respeito às deformações máximas em cada modelo da Série E. Na Figura 5.10a, é observado, para a deformação do concreto, um comportamento muito similar ao da laje de referência **E-16**, com diferença de -5,77% para o modelo **E-30**.

Observando as curvas de deformação no ponto de monitoramento das barras, tal como disposto na Figura 5.10b, apesar do visível ganho de resistência, a barra tracionada teve curvas com variações parecidas, considerando-se apenas a deformação máxima ($\epsilon_{st,máx}$), em-quanto que, no modelo de referência, **E-16**, a deformação atingiu 0,43%, e, no modelo mais espesso, **E-30**, foi de 0,50%. Com estes valores próximos de deformações, pode-se concluir que as barras tracionadas conseguiram manter os mesmos comportamentos em todos os modelos.

Na Figura 5.10c, observa-se um aumento da rigidez da barra comprimida à sua deformação máxima ($\epsilon_{sc,m\acute{a}x}$) ser reduzida para a do modelo de referência. Com os resultados tabelados, e de acordo com as curvas de deformação, fica evidente que o aumento na parcela de concreto contribuiu para o aumento da capacidade e da rigidez das lajes, bem como fica indicado que o ganho de resistência se deu principalmente pela parcela adicional de concreto.

Figura 5.10 – Curva carga *versus* deformação do concreto a) na armadura tracionada b) e comprimida c) da série E



A seguir, é mostrada, na Tabela 5.4, a contribuição máxima da força de protensão exercida nas lajes. Em primeiro lugar, observa-se pouca variação das forças resistidas pelos cabos em relação à laje de referência **E-16**, com contribuições inferiores a 2,0 kN. Pode-se considerar que, como nenhuma variável dos cabos foi alterada, e esses elementos são cordoalhas não aderentes, já se esperava que tais valores se mantivessem estáveis.

Tabela 5.4 – Comparação da força de protensão das cordoalhas na ruptura da série E

Modelo \ Cabo	direção x (kN)				direção y (kN)			
	5	6	7	8	5	6	7	8
E-16	136,41	137,27	140,93	135,02	138,23	141,86	137,18	137,77
E-18	136,83	137,55	141,01	135,55	138,32	141,80	136,75	137,93
E-20	137,22	137,92	141,41	136,02	138,47	141,93	136,91	138,17
E-22	136,96	137,65	141,18	135,98	138,02	141,48	136,48	138,03
E-24	139,05	139,72	143,27	137,49	140,11	143,54	138,59	139,66
E-26	138,22	138,90	142,48	137,21	139,14	142,59	137,67	139,12
E-28	137,50	138,21	141,81	136,94	138,29	141,73	136,87	138,76
E-30	138,50	139,18	142,79	137,76	139,24	142,70	137,85	139,56

5.3.2.1 Panorama de fissuração da série E

Assim como na Série A, o panorama de fissuração foi comparado para a superfície e a espessura da Série E, sendo escolhido os modelos **E-18**, **E-22** e **E-30** para esse processo. Como pode ser visto nas Figuras 5.11 a 5.13, as fissuras surgiram de forma radial e circunferencial próximo ao pilar, apresentando de forma clara o efeito da punção em todos os modelos.

A princípio, em todos os modelos, as fissuras se iniciaram de forma radial, seguindo a direção das barras superiores até a margem. Destaca-se também a grande influência que o aumento da espessura exerce no ganho de resistência. Se na laje **E-18** a primeira fissura aparece com 407,80 kN, na **E-30** a primeira fissura só é perceptível com 889,90 kN.

Próximo da ruptura, é possível identificar como a laje **E-30** (Figura 5.13c) concentra maiores esforços de cisalhamento em um ponto mais central e superior, enquanto que os modelos menos espessos contam com uma tendência de iniciarem esse processo no contorno da face do pilar.

Nas Figuras 5.11f, 5.12f e 5.13f, observa-se uma semelhança entre as direções das fissuras tangenciais na espessura e na superfície da laje (Figuras 5.11c, 5.12c e 5.13c), formando o tronco cônico característico em ruptura por punção. Conforme apresentado nas referidas imagens, percebe-se que, em lajes mais espessas, essas tendem a concentrar maiores deformações antes da ruptura em um ponto mais central e na face superior.

Figura 5.11 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo **E-18**

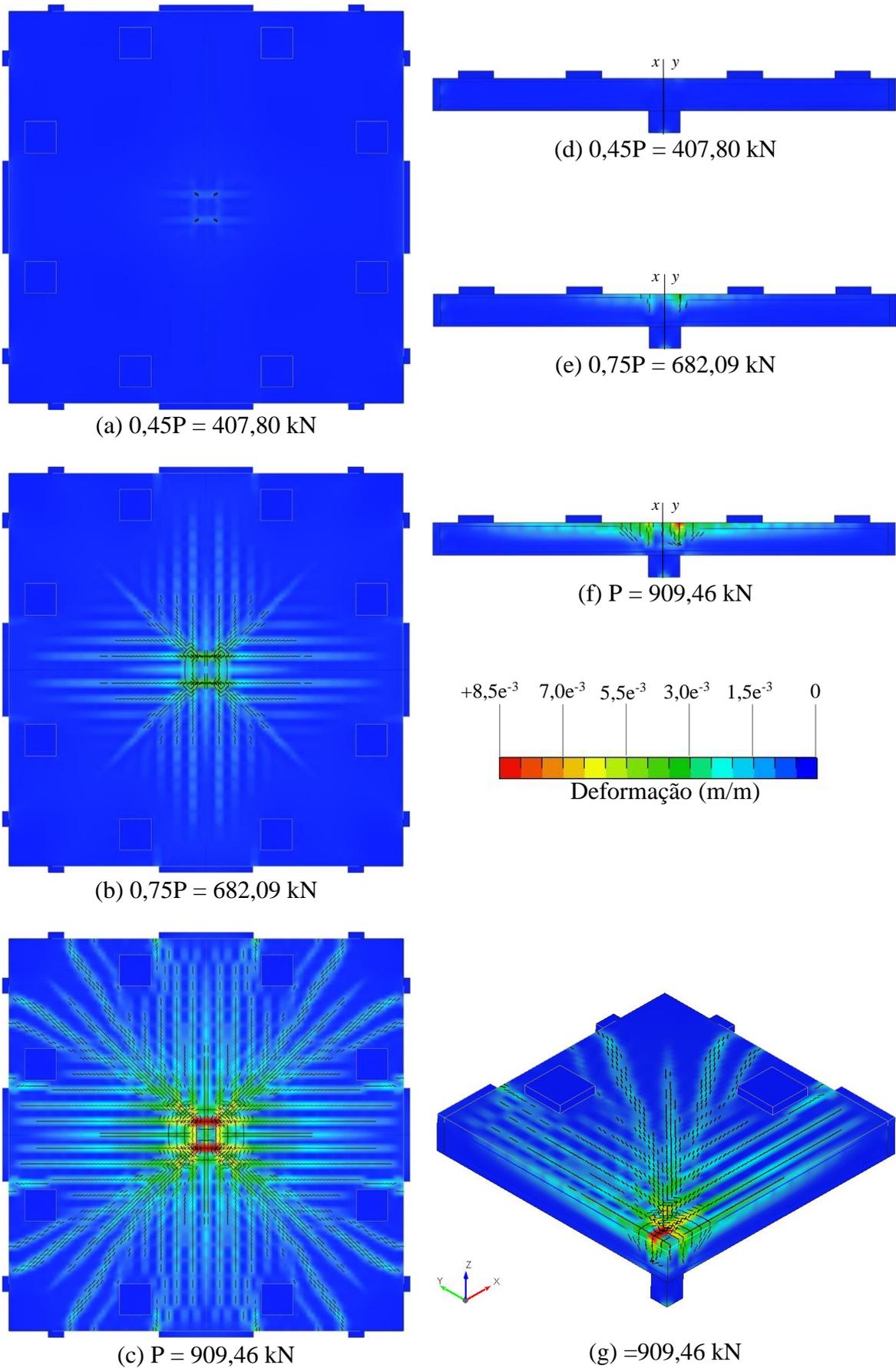


Figura 5.12 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo **E-22**

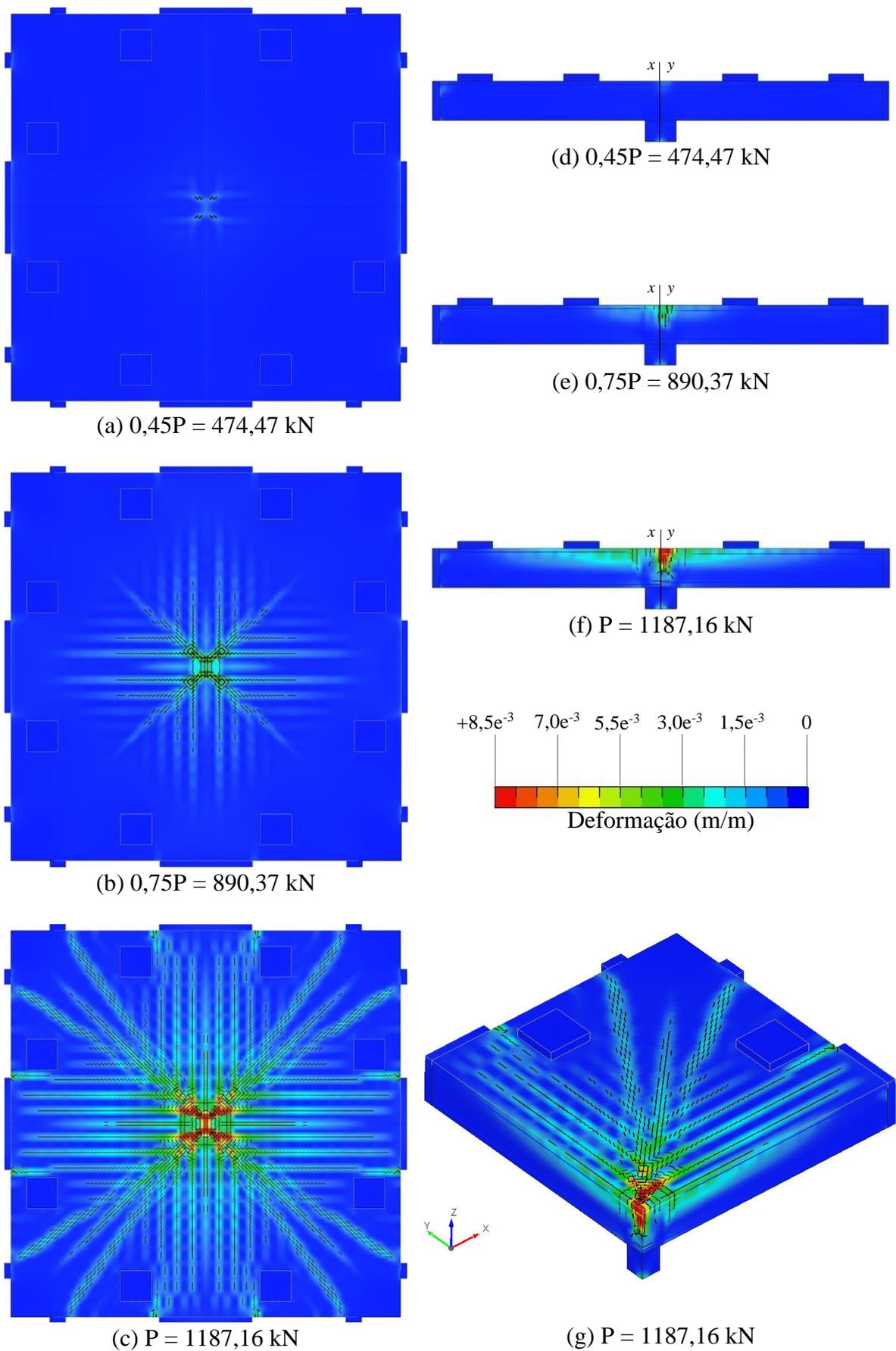
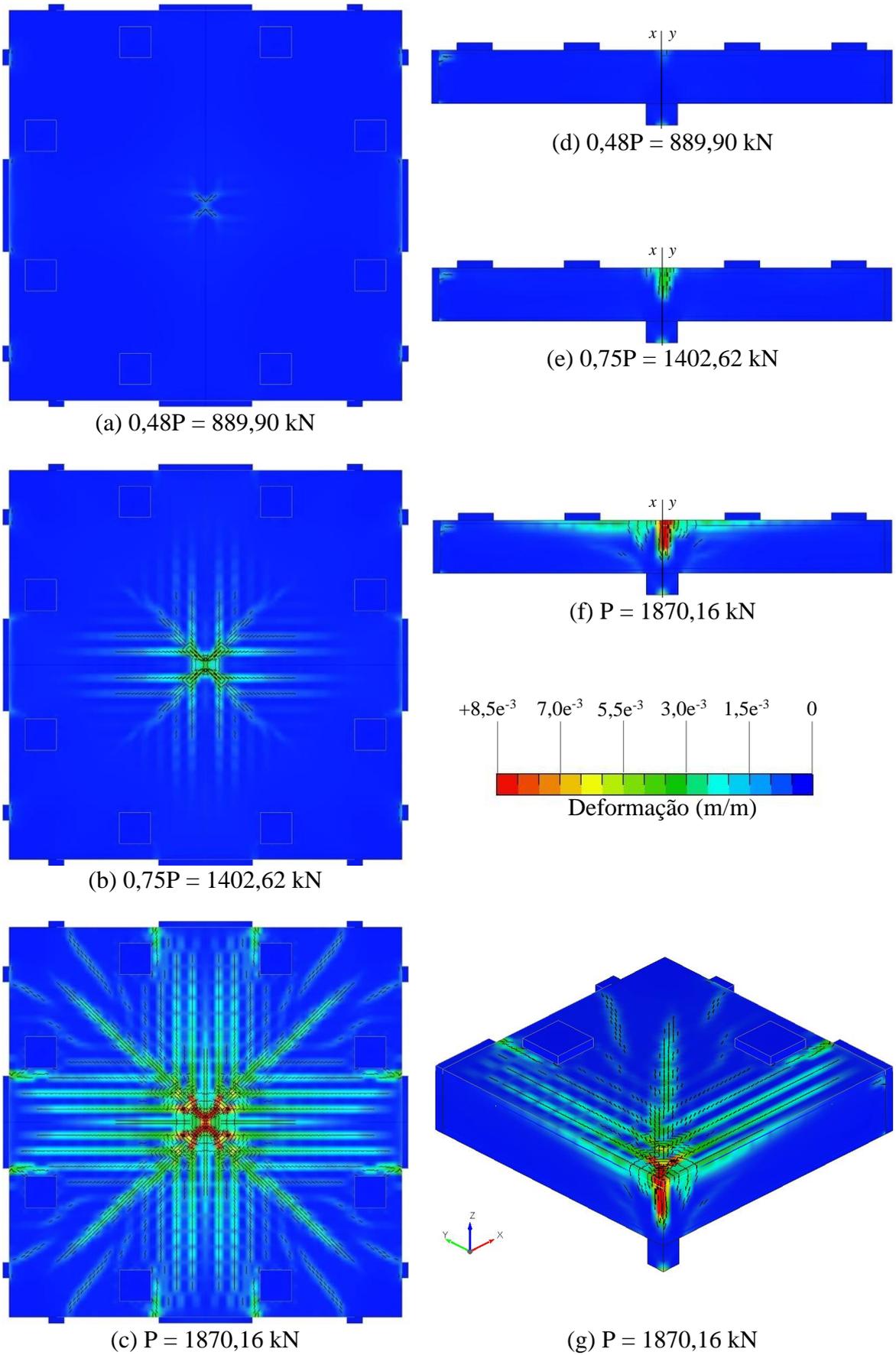


Figura 5.13 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo **E-30**



5.3.3 Resultados obtidos nos modelos da série P

São apresentados, a seguir, alguns resultados com a finalidade de identificar o impacto da retangularidade do pilar na capacidade contra punção de lajes lisas protendidas. Na Figura 5.14, são comparadas as curvas de carga *versus* deslocamento de nove modelos da Série P, juntamente com o resultado experimental da laje M4. Na Tabela 5.5, são dispostos os máximos valores de carga, deslocamento e a relação $P_{Série} / P_{18}$ das 16 lajes analisadas.

Os resultados apresentados evidenciam a grande influência na capacidade resistente de lajes lisas protendidas quando altera-se o comprimento de um lado do pilar. Com os valores máximos indicados na Tabela 5.5, os ganhos observados a partir do modelo **P-60**, foram superiores em 30%. Para o modelo **P-90** os ganhos observados foram superiores em 53% em relação à resistência, e 37% maiores no que se trata do deslocamento máximo. Na Figura 5.14, é possível observar a similaridade entre as curvas de carregamento das lajes.

Figura 5.14 – Curva carga *versus* deslocamento da série P

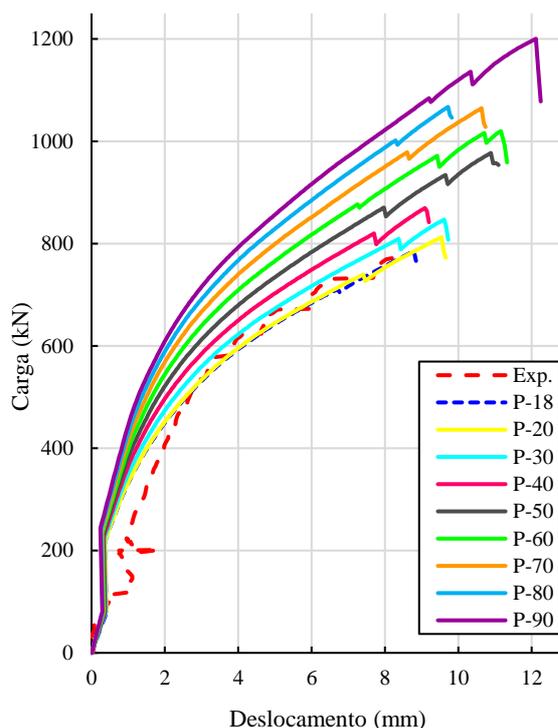


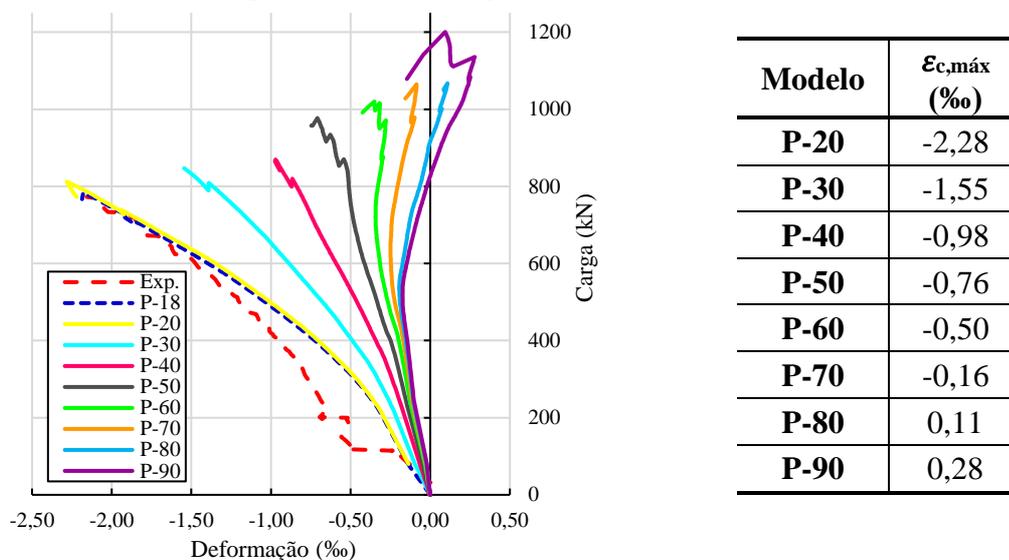
Tabela 5.5 – Valores máximos para carga e deslocamento da série P

Modelo	Carga (kN)	$\frac{P_{série}}{P_{18}}$	Deslocamento (mm)
P-18	785,06	-	8,79
P-20	812,31	1,04	9,54
P-25	846,78	1,08	10,02
P-30	847,04	1,08	9,61
P-35	833,47	1,06	8,51
P-40	869,48	1,11	9,09
P-45	932,41	1,19	10,26
P-50	977,14	1,24	10,89
P-55	917,22	1,17	8,65
P-60	1019,94	1,30	11,16
P-65	1047,08	1,33	10,85
P-70	1064,57	1,36	10,63
P-75	1014,59	1,30	9,19
P-80	1047,25	1,33	9,87
P-85	1129,02	1,44	10,59
P-90	1200,37	1,53	12,11

Em relação à deformação do concreto, observa-se, por meio das curvas carga *versus* deformação da Figura 5.15, uma grande interferência no comportamento das lajes à medida que as dimensões do pilar são aumentadas. Verifica-se, nos gráficos e com seus respectivos valores máximos tabelados, que as maiores variações de deformação foram atingidas pelas lajes com menor área de contato da face superior do pilar com a laje. É importante salientar, nesse contexto, que as pequenas variações das curvas no trecho final começam a dar um indicativo do momento de ruptura de cada modelo entre 85% e 96% da carga última.

Também é preciso destacar que, as curvas observadas na Figura 5.15 dão um indicativo de redução na deformação comprimida do concreto. A partir da laje **P-80**, fica evidenciado uma deformação de tração na região central, indicando uma deformação de tração na região central da laje onde está localizado o ponto de monitoramento.

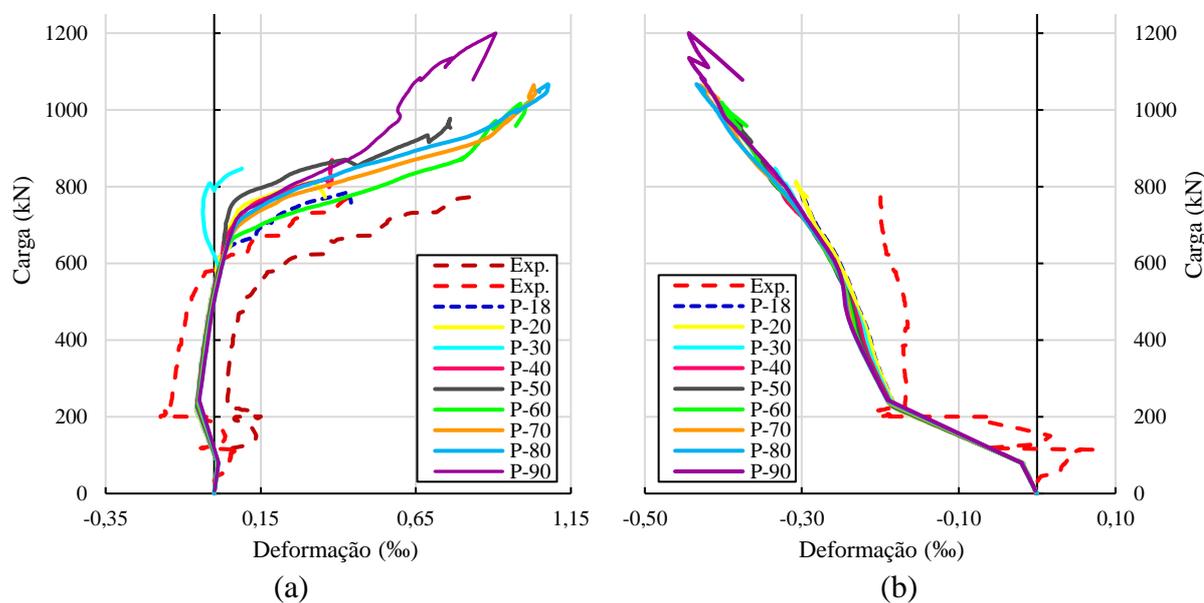
Figura 5.15 – Curva carga *versus* deformação do concreto da série A e valores máximos



Na sequência, foram analisadas as deformações máximas atingidas nas armaduras passivas das lajes. A Figura 5.16a, apresenta as curvas de carga *versus* deformação do aço tracionado para 10 modelos estudados da Série P. Assim como os modelos da série A, verifica-se, até atingir certo valor de carga, aproximadamente 600 kN, um comportamento bem similar entre os modelos. A partir deste ponto as deformações começam a se distinguir das demais.

Em relação às barras comprimidas, na Figura 5.16b é observado um comportamento muito similar entre as curvas de deformação dos modelos, indicando que o aumento das dimensões do pilar não altera o comportamento de barras passivas inferiores das lajes.

Figura 5.16 – Curva carga *versus* deformação na armadura tracionada a) e comprimida b) da série P



Assim como as séries anteriores, também foi possível comparar a contribuição máxima da força de protensão exercida nas lajes. Na Tabela 5.6 são comparados 8 modelos da série P.

Quando comparada a força aplicada na ruptura entre o modelo **P-90**, de maiores esforços, e o **P-18**, de menores esforços, é observado que a força nos cabos centrais da direção x foram as que tiveram maiores variações, passando de 8,95 kN, no cabo 7 e 9,33 kN para o cabo 5, enquanto que nos cabos da direção y esses índices foram de 5,75 kN e 5,20 kN respectivamente. Tais diferenças podem ser justificadas devido ao avanço da retangularidade do pilar. Considerando que as dimensões dos pilares são ampliadas na direção do eixo x , isso cria uma área de apoio maior para os cabos do eixo y , e, com isso, os cabos que coincidem com esta área exercem menos esforços quando comparados aos cabos do eixo x sem região de apoio.

Tabela 5.6 – Comparação das forças de protensão nas cordoalhas na ruptura da série P

Modelo \ Cabo	direção x (kN)				direção y (kN)			
	5	6	7	8	5	6	7	8
P-18	137,28	137,94	141,41	135,63	139,13	142,61	137,52	138,17
P-20	138,28	138,98	142,33	136,17	140,32	143,78	138,66	138,88
P-30	138,90	139,53	143,01	136,50	140,74	144,27	139,25	139,37
P-40	138,74	139,47	142,83	136,36	140,04	143,60	138,71	139,28
P-50	142,12	142,82	146,12	138,25	143,10	146,68	141,86	141,70
P-60	143,27	143,89	147,16	138,82	143,61	147,22	142,46	142,47
P-70	143,23	143,77	147,18	138,65	142,50	146,12	141,40	142,35
P-80	142,29	142,95	146,23	137,92	140,86	144,49	139,77	141,65
P-90	146,61	147,15	150,36	140,25	144,33	147,99	143,27	144,58

5.3.3.1 Panorama de fissuração da série P

O panorama de fissuração foi comparado para 3 lajes da Série P, nas quais foram observadas as superfícies e as espessuras dos modelos **P-20**, **P-50** e **P-90**. Como pode ser visto nas Figuras 5.17 a 5.19, a propagação das fissuras dos modelos sofreu interferências conforme aumentava-se a dimensão do pilar em uma direção.

A princípio em todos os modelos as fissuras iniciaram-se no canto do pilar, conforme dispostos nas Fissuras 5.17d, 5.18d e 5.19d, seguindo de forma radial a direção das barras superiores até o bordo da laje. Com base nas figuras apresentadas, observa-se a influência que o aumento da retangularidade do pilar exerce ao proporcionar maiores ganhos de resistência

após o início da fissuração nas lajes. Se na laje **P-20** a primeira fissura aparece com 358,20 kN, no modelo **P-90** ela é cerca de 13% superior, sendo perceptível a 404,67 kN.

As Figuras 5.17c, 5.18c e 5.19c mostram o que ocorre, na ruptura, com os padrões de fissuração na superfície tracionada. Observa-se uma semelhança em ambas as direções nas fissuras perpendiculares da laje com pilar quadrado, **P-20** (Figura 5.17c). À medida que a retangularidade do pilar aumenta, os padrões de fissuração não são mais tão uniformes como observado em seções quadradas. Ademais, as fissuras diagonais na superfície passam a se concentrar na menor dimensão do pilar. As maiores concentrações de esforços observados na Figura 5.19c indicam que a ruptura por punção ocorrerá nas duas faces mais curtas do pilar.

Outro ponto observado, além da redução nas fissuras tangenciais formadoras do cone de punção, é o fato de que as fissuras perpendiculares do lado maior do pilar (Figura 5.19f), indicam um comportamento predominante de cisalhamento direcional no lado mais longo. Deve-se considerar, também, que o aumento da retangularidade provoca uma região de esforços na superfície inferior da laje (Figura 5.19f), movimento não observado em pilares quadrados. Outro ponto a destacar é que em todos os modelos estudados, próximo à falha, aparecem fissuras circunferenciais. Assim, conclui-se que todos os modelos falharam devido ao cisalhamento por punção.

Figura 5.17 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo **P-20**

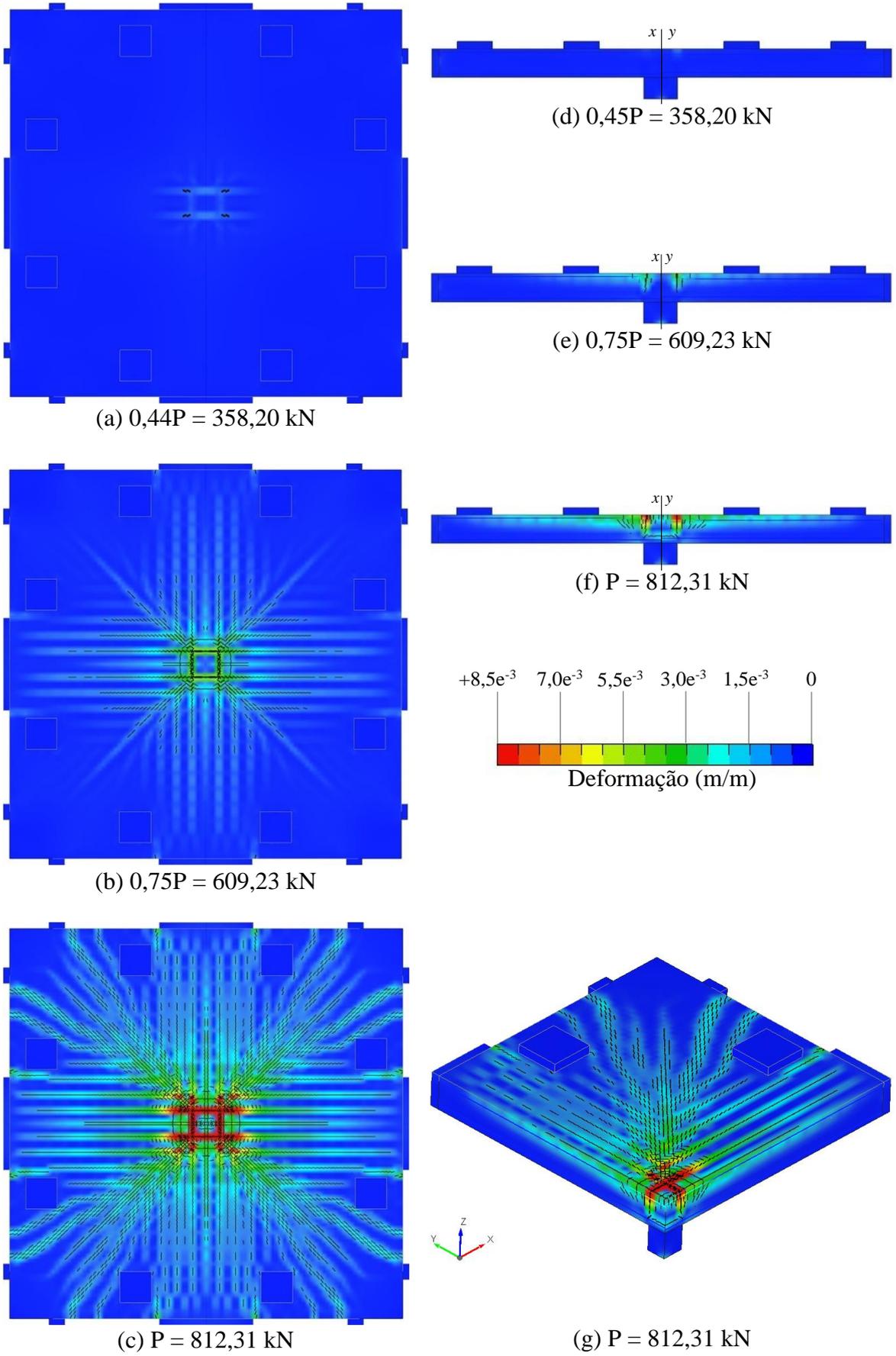


Figura 5.18 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo **P-50**

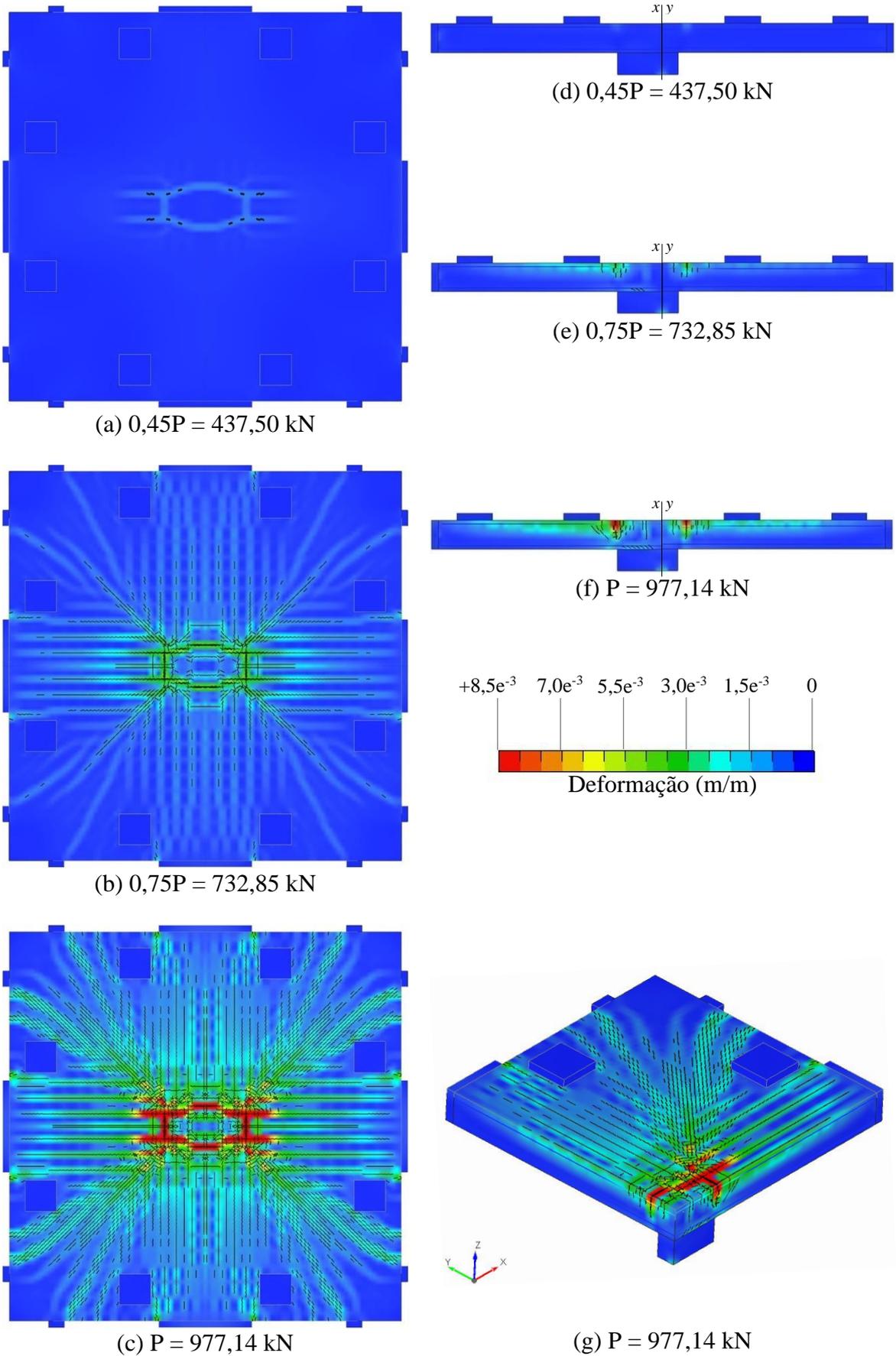
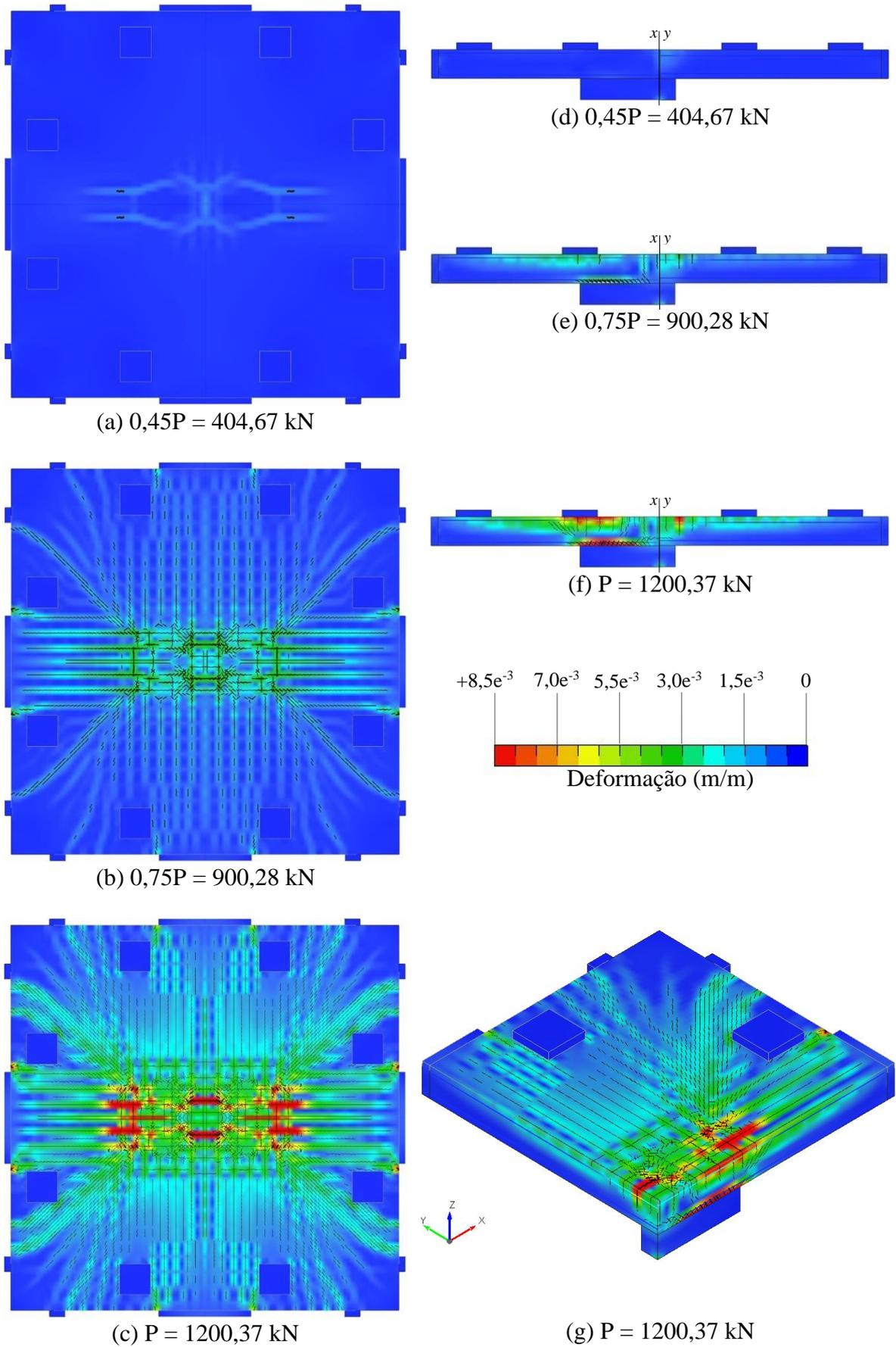


Figura 5.19 – Panorama de fissuração na superfície e na espessura do modelo **P-90**



5.4 COMPARAÇÃO NORMATIVA

Na sequência, como objeto de estudo deste capítulo, têm-se os resultados numéricos, apresentados anteriormente, das três séries em comparação com os valores de resistência à punção previstos por ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2004), NBR 6118 (2014) e *fib* Model Code (2010), sendo essa mais uma forma de validar os índices de cada norma responsáveis por interferir no espaçam entre os cabos de protensão, espessura da laje e retangularidade do pilar.

Para cada série, são dispostos os resultados de carga última (V_R) dos códigos normativos junto aos modelos numéricos ($V_{R,FEM}$). A relação $V_{R,FEM}/V_R$ também é apresentada para facilitar a comparação dos resultados. Nas três séries, é possível observar como cada norma consegue prever a carga última de cada modelo cujos resultados obtidos serão discutidos.

5.4.1 Considerações iniciais

Para facilitar na compreensão, as expressões apresentadas no item 2.5 são alteradas para representarem a carga última (V_R) de cada norma, diferenciando-se pelos subíndices com as siglas de cada código normativo, e os demais parâmetros, com a mesma nomenclatura uniforme conforme as equações (5.1) a (5.4);

ACI 318 (2019):

$$V_{R,ACI} = \min. \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{3,5}{12} \lambda \sqrt{f_c} + 0,3\sigma_{cp} + \frac{V_p}{b_1 d} \right] b_1 d \\ \left[\frac{1}{12} \left(1,5 + \frac{\alpha_s d}{b_0} \right) \lambda \sqrt{f_c} + 0,3\sigma_{cp} + \frac{V_p}{b_1 d} \right] b_1 d \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Eurocode 2 (2004):

$$V_{R,EC} = \left[\frac{0,18}{\gamma_c} (1 + k) (100 \rho f_c)^{1/3} + 0,10\sigma_{cp} \right] b_1 d + V_p \quad (5.2)$$

NBR 6118 (2014):

$$V_{R,NBR} = \left[0,18(1 + k) (100 \rho f_c)^{1/3} + 0,10\sigma_{cp} \right] b_1 d + V_p \quad (5.3)$$

fib Model Code (2010):

$$V_{R,MC} = k_{\psi} \frac{\sqrt{f_c}}{\gamma_c} b_1 d + V_p \quad (5.4)$$

Sendo:

λ : fator de modificação do concreto igual a 1,0 para concretos de peso normal entre 21,55 e 25,60 kN/m³;

f_c : resistência média do concreto;

σ_{cp} : tensão média de compressão provocada pela protensão;

d : é a altura útil da laje;

b_1 : perímetro crítico de controle, de acordo com cada norma;

γ_c : foi atribuído o valor de 1,0 para determinar o máximo valor da carga resistente;

k : fator de escala, $\sqrt{200/d}$, em (mm). Para o Eurocode 2 (2004) considerar $k \leq 2,0$;

ρ : taxa da armadura longitudinal. Foi considerado a média da taxa de armadura nas barras das direções x e y ;

V_p : acréscimo da força vertical devido a protensão.

A força vertical devido à protensão (V_p) leva em consideração a força exercida em função da protensão que passa pela interseção com o perímetro b_1 . O ponto onde os cabos coincidem com b_1 foi determinado de acordo com a equação (5.5);

$$(x,y) = \frac{250}{2} - \frac{c_{x,y}}{2} - \frac{d}{2} \quad (5.5)$$

Os valores encontrados na equação (5.5) são aplicados nas equações (5.6), e assim chega-se as excentricidades e_x e e_y dos cabos na interseção com o perímetro b_1 , obtidas a partir das equações (4.2) e (4.3).

$$e_x = -0,00021488x^2 + 0,05372x \quad e_y = -0,00029488y^2 + 0,07372y \quad (5.6)$$

Aplicando os valores obtidos de (5.5) na derivada das equações, encontra-se V_p , que é a soma das verticais de protensão em x e y , dadas por;

$$V_{p(x,y)} = 2 \sum F_{p(x,y),b_1} \frac{\partial}{\partial x, \partial y} \quad (5.7)$$

Sendo:

$F_{p(x,y),b_1}$: força de protensão que passa pelo perímetro crítico b_1 , exceto *fib* Model Code (2010) que deve ser considerado a soma das forças dos cabos na faixa b_s .

Para o *fib* Model Code (2010), foi utilizado o processo cálculo descrito no item 2.5.4. Assim, foram empregados os dois níveis de aproximação (LoA II e LoA III), para avaliar qual representa melhor os resultados comparados aos dos modelos numéricos. A resistência à punção das lajes modeladas foi determinada por um processo iterativo em que alterava-se a carga atuante (V_E) até que essa igualasse com a carga resistente última ($V_{R,MC}$) prevista.

Para o cálculo dos valores de cargas de ruptura, todos os coeficientes parciais de segurança previstos nos códigos de projeto, foram considerados iguais a um.

5.4.2 Comparação dos resultados

Nos itens subsequentes, são comparados os resultados estimados para a carga última de cada série com os modelos numéricos.

5.4.2.1 Resultados obtidos para a série A

A Tabela 5.7 apresenta os resultados obtidos numericamente dos quatro modelos da Série A, junto das estimativas da carga de ruptura obtidas a partir das instruções normativas ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2004), NBR 6118 (2014) e *fib* Model Code (2010).

Tabela 5.7 – Estimativa da carga de ruptura por meio dos códigos de projeto, série A

Modelo	$V_{R,FEM}$ (kN)	$V_{R,ACI}$ (kN)	$V_{R,EC}$ (kN)	$V_{R,NBR}$ (kN)	$V_{R,MC II}$ (kN)	$V_{R,MC III}$ (kN)
A-5	788,12	514,35	567,24	613,67	643,12	650,37
A-10	785,06	505,97	567,24	613,67	643,12	650,37
A-15	753,17	497,55	548,08	594,51	643,12	650,37
A-20	690,83	497,55	548,08	594,51	643,12	650,37

Para comparação desses valores, é apresentado, na Tabela 5.8, a relação $V_{R,FEM}/V_R$ e, na Figura 5.20, é pontuada graficamente a evolução da capacidade máxima *versus* espaçamento dos cabos de cada norma em comparação com os modelos numéricos.

Tabela 5.8 – Comparação entre as cargas de ruptura numéricos e teóricos, série A

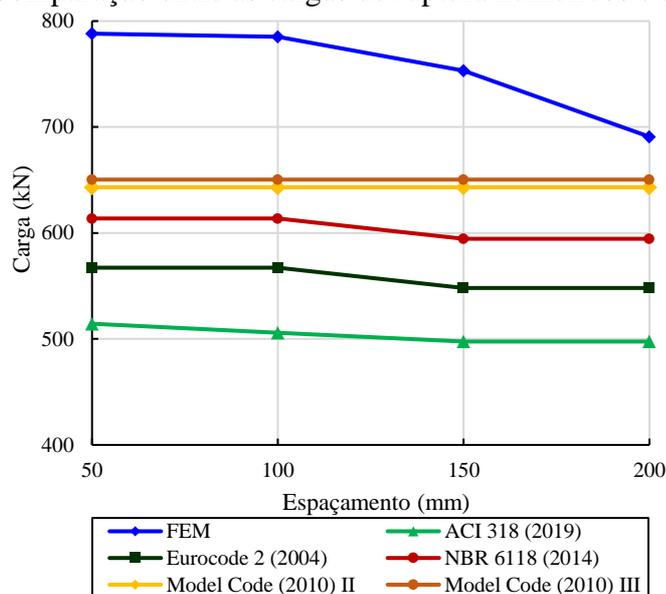
Modelo	$\frac{V_{R,FEM}}{V_{R,ACI}}$	$\frac{V_{R,FEM}}{V_{E,EC}}$	$\frac{V_{R,FEM}}{V_{R,NBR}}$	$\frac{V_{R,FEM}}{V_{R,MC II}}$	$\frac{V_{FEM}}{V_{R,MC III}}$
A-5	1,53	1,39	1,28	1,23	1,21
A-10	1,55	1,38	1,28	1,22	1,21
A-15	1,51	1,37	1,27	1,17	1,16
A-20	1,39	1,26	1,16	1,07	1,06
Média	1,50	1,35	1,25	1,17	1,16
DP	0,06	0,05	0,05	0,06	0,06
CV (%)	4,26	3,93	4,01	5,19	5,19

Obs:

DP: Desvio padrão

CV: Coeficiente de variação

Figura 5.20 – Comparação entre as cargas de ruptura numéricos e teóricos, série A



A partir dos dados apresentados, é observado que os resultados médios mais próximos dos valores numéricos foram obtidos, respectivamente, pelas equações do *fib* Model Code (2010) em seu nível III e II (LoA III e LoA II) de aproximação respectivamente, seguidos pelos índices da NBR 6118 (2014) e do Eurocode 2 (2004). Ambos os resultados numéricos tiveram índices de majoração médios inferiores a 1,35, acima dos calculados por meio das equações. Observa-se que o ACI 318 (2019) e o Eurocode 2 (2004) apresentaram resultados médios mais

conservadores, com índices que correspondem sempre 30% superior daqueles resultados obtidos numericamente.

É importante observar que os resultados obtidos pelo nível III do *fib* Model Code (2010), apesar de representarem a melhor média, a saber, 1,17, foram também os que obtiveram o maior coeficiente variacional, correspondendo a 5,19%, o que indica uma maior dispersão dos resultados em relação ao valor médio, algo que também pode ser observado na curva da Figura 5.20. Avaliando os índices de desvio padrão e a média dos resultados obtidos na Tabela 5.8, que ambos os níveis de aproximação do *fib* Model Code (2010) conseguiu representar resultados mais uniformes e próximos dos modelos numéricos seguidos da NBR 6118 (2014).

Em relação ao modelo de cálculo que cada norma emprega ao considerar a protensão em lajes lisas, nota-se, conforme Tabela 5.8, que os resultados estimados em cada norma para a Série **A-15** foram os mesmos que os da Série **A-20**. Esses resultados indicam que, em ambos os códigos de projeto, consideram-se apenas a força de protensão, e não é estimada a carga última de lajes lisas levando em consideração o espaçamento entre os cabos.

5.4.2.2 Resultados obtidos para a série E

Para o estudo da espessura de lajes protendidas, também são apresentados os resultados numéricos obtidos dos 8 modelos da Série E junto das estimativas da carga de ruptura, as quais foram obtidas a partir das instruções normativas, conforme indicado na Tabela 5.9.

Tabela 5.9 – Estimativa da carga de ruptura por meio dos códigos de projeto, série E

Modelo	$V_{R,FEM}$ (kN)	$V_{R,ACI}$ (kN)	$V_{R,EC}$ (kN)	$V_{R,NBR}$ (kN)	$V_{R,MC II}$ (kN)	$V_{R,MC III}$ (kN)
E-16	785,06	505,97	567,24	613,67	643,12	650,37
E-18	909,46	597,34	685,76	721,81	789,37	796,96
E-20	1059,23	695,17	796,40	818,09	931,23	938,98
E-22	1187,16	799,53	912,74	917,60	1074,59	1082,59
E-24	1408,22	910,46	1020,29	1020,29	1218,49	1226,73
E-26	1534,49	1028,01	1126,05	1126,05	1362,25	1370,65
E-28	1669,18	1152,19	1253,86	1253,86	1519,71	1529,76
E-30	1870,16	1283,02	1366,24	1366,24	1663,80	1674,05

A relação $V_{R,FEM}/V_R$ também foi utilizada para comparação entre os códigos normativos, conforme Tabela 5.10, em conjunto com a Figura 5.21, que representa graficamente a evolução da capacidade máxima em relação à espessura da laje de cada norma em comparação com os modelos numéricos.

Tabela 5.10 – Comparação entre as cagas de ruptura numéricos e teóricos, série E

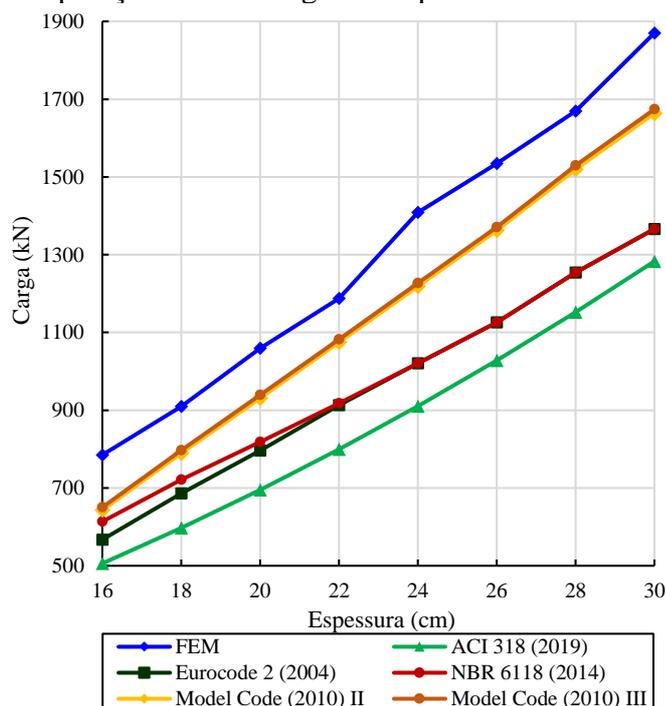
Modelo	$\frac{V_{R,FEM}}{V_{R,ACI}}$	$\frac{V_{R,FEM}}{V_{E,EC}}$	$\frac{V_{R,FEM}}{V_{R,NBR}}$	$\frac{V_{R,FEM}}{V_{R,MC II}}$	$\frac{V_{FEM}}{V_{R,MC III}}$
E-16	1,55	1,38	1,28	1,22	1,21
E-18	1,52	1,33	1,26	1,15	1,14
E-20	1,52	1,33	1,29	1,14	1,13
E-22	1,48	1,30	1,29	1,10	1,10
E-24	1,55	1,38	1,38	1,16	1,15
E-26	1,49	1,36	1,36	1,13	1,12
E-28	1,45	1,33	1,33	1,10	1,09
E-30	1,46	1,37	1,37	1,12	1,12
Média	1,50	1,35	1,32	1,14	1,13
DP	0,04	0,03	0,04	0,04	0,03
CV (%)	2,41	2,08	3,23	3,15	3,01

Obs:

DP: Desvio padrão

CV: Coeficiente de variação

Figura 5.21 – Comparação entre as cagas de ruptura numéricos e teóricos, série E



Os resultados observados na Figura 5.21 indicam uma tendência de evolução da capacidade resistente, o que está previsto nos códigos normativos para cada modelo analisado, assim como também é observado nos índices numéricos. Nota-se que o ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2004) e NBR 6118 (2014) tendem a serem mais conservadores nos resultados, com as melhores estimativas apresentadas pelos níveis III e II do *fib* Model Code respectivamente.

A partir dos dados apresentados na Tabela 5.10, percebe-se que os resultados médios dos códigos normativos mais semelhantes aos obtidos pelo MEF foram obtidos, respectivamente, pelas equações do *fib* Model Code (2010), nível III e II de aproximação, seguidos pela NBR 6118 (2014), Eurocode 2 (2004) e ACI 318 (2019), ambos com resultados médios inferiores à 1,50 em relação aos modelos numéricos. O ACI 318 (2019) foi a norma com resultados mais distantes dos previstos numericamente, mantendo uma relação média sempre acima de 1,45.

Avaliando individualmente cada série, observa-se uma tendência em comum entre o ACI 318 (2019) e *fib* Model Code (2010), nível III e II de estimarem resultados mais próximos dos previstos numericamente à medida que a espessura das lajes são menores. Quando comparados os resultados da Tabela 5.9, nota-se que, a partir da série E-24, o Eurocode 2 (2004) e a NBR 6118 (2014) preveem os mesmos resultados, o que é indicado devido às normas compartilharem de formulações semelhantes, conforme apresentado nas equações (5.2) e (5.3), diferenciando-se, no entanto, nas lajes de menor espessura. Esses resultados são justificados em função do fator de escala k , no qual, até a série E-22, o Eurocode 2 (2004) limita k como menor ou igual a 2,0, enquanto a norma brasileira não tem essa limitação. A exemplo, pode-se citar a laje E-16, na qual a NBR 6118 (2014) determina k igual a 2,22.

5.4.2.3 Resultados obtidos para a série P

Para avaliar o efeito da retangularidade do pilar em lajes protendidas, foram apresentados os resultados obtidos numericamente dos 16 modelos da série P com suas respectivas estimativas da carga de ruptura obtidas a partir das instruções normativas conforme disposto na Tabela 5.11.

Tabela 5.11 – Estimativa da carga de ruptura por meio dos códigos de projeto, série P

Modelo	$V_{R,FEM}$ (kN)	$V_{R,ACI}$ (kN)	$V_{R,EC}$ (kN)	$V_{R,NBR}$ (kN)	$V_{R,MC II}$ (kN)	$V_{R,MC III}$ (kN)
P-18	785,06	505,97	567,24	613,67	643,12	650,37
P-20	812,31	521,96	581,82	629,61	652,79	661,04
P-25	846,78	561,96	601,20	650,55	665,98	676,07
P-30	847,04	601,96	627,31	678,94	682,31	694,35
P-35	833,47	641,95	646,74	699,92	692,31	705,87
P-40	869,48	686,83	672,81	728,27	707,08	722,42
P-45	932,41	726,83	692,28	749,30	704,32	719,70
P-50	977,14	766,82	718,33	777,62	706,39	722,10
P-55	917,22	806,82	737,82	798,68	702,66	718,32
P-60	1019,94	846,81	763,85	826,98	704,40	720,40
P-65	1047,08	886,81	783,37	848,06	700,69	716,67
P-70	1064,57	926,81	809,38	876,35	702,13	718,45
P-75	1014,59	966,80	828,92	897,46	698,41	714,75
P-80	1047,25	1006,80	854,91	925,72	699,57	716,26
P-85	1129,02	1046,80	874,48	946,85	695,85	712,57
P-90	1200,37	1086,02	900,45	975,10	696,76	713,83

Na Figura 5.22, é indicado graficamente a comparação entre os modelos numéricos e teóricos da carga última para cada uma das 16 lajes da série P. Na Tabela 5.12, é comparado a relação $V_{R,FEM}/V_R$ para cada uma das normas estudadas.

Figura 5.22 – Comparação entre as cargas de ruptura numéricas e teóricas, série P

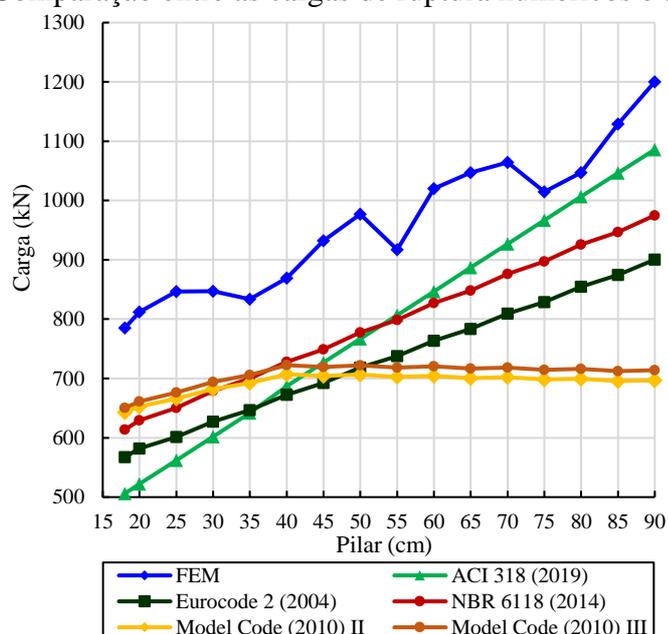


Tabela 5.12 – Comparação entre as cargas de ruptura numéricas e teóricas, série P

Modelo	$\frac{V_{R,FEM}}{V_{R,ACI}}$	$\frac{V_{R,FEM}}{V_{E,EC}}$	$\frac{V_{R,FEM}}{V_{R,NBR}}$	$\frac{V_{R,FEM}}{V_{R,MCII}}$	$\frac{V_{R,FEM}}{V_{R,MCIII}}$
P-18	1,55	1,38	1,28	1,22	1,21
P-20	1,56	1,40	1,29	1,24	1,23
P-25	1,51	1,41	1,30	1,27	1,25
P-30	1,41	1,35	1,25	1,24	1,22
P-35	1,30	1,29	1,19	1,20	1,18
P-40	1,27	1,29	1,19	1,23	1,20
P-45	1,28	1,35	1,24	1,32	1,30
P-50	1,27	1,36	1,26	1,38	1,35
P-55	1,14	1,24	1,15	1,31	1,28
P-60	1,20	1,34	1,23	1,45	1,42
P-65	1,18	1,34	1,23	1,49	1,46
P-70	1,15	1,32	1,21	1,52	1,48
P-75	1,05	1,22	1,13	1,45	1,42
P-80	1,04	1,22	1,13	1,50	1,46
P-85	1,08	1,29	1,19	1,62	1,58
P-90	1,11	1,33	1,23	1,72	1,68
Média	1,26	1,32	1,22	1,39	1,36
DP	0,17	0,06	0,05	0,15	0,14
CV (%)	13,26	4,17	4,18	10,94	10,66

Obs.

DP: Desvio padrão

CV: Coeficiente de variação

Nas curvas apresentadas na Figura 5.22, é interessante observar que as previsões do Eurocode 2 (2004) e da NBR 6118 (2014) seguem com a mesma tendência de comportamento. No caso do ACI 318 (2019), por sua vez, nota-se que os resultados se ajustam melhor às previsões numéricas à medida que a retangularidade do pilar aumenta.

Quanto às curvas obtidas pelo *fib* Model Code (2010), pontua-se que, para os níveis II e III, há uma estabilidade dos resultados a partir da Série **P-40**, o que é justificado devido à descontinuidade do perímetro crítico b_1 , que, para a verificação de cálculo, considera que a medida máxima do pilar não exceda $3,0d$. Com isso, observou-se que 10 dos 16 modelos apresentaram resultados muito conservadores, mesmo no nível mais alto do *fib* Model Code (2010), o que significa que as equações requerem ajustes.

Avaliando a Tabela 5.12, percebe-se que o nível II do *fib* Model Code (2010) apresentou resultados mais conservadores em relação às demais normas, com média de 1,39. Tem-se,

também, que os resultados do nível II estiveram sempre a favor da segurança, com todas as lajes avaliadas dispondo razão entre a resistência numérica e a estimativa teórica ($V_{R,FEM}/V_{R,MC}$) variando entre 1,20 e 1,72. Porém deve-se observar que a média e variação nos resultados para os dois níveis de aproximação foi prejudicada devido a limitação do perímetro de controle em $3d$ (até P-40). Porém, deve-se observar que, até o modelo P-40, o *fib* Model Code (2010) obteve as melhores aproximações dos resultados.

Na Tabela 5.12, pode-se verificar que os melhores resultados ficaram por conta da NBR 6118 (2014), com média de 1,22 e coeficiente de variação de 4,18%. A maior relação $V_{R,FEM}/V_{R,NBR}$ não ultrapassou 1,30, indicando estimativas sempre a favor da segurança. Em relação ao Eurocode 2 (2004), pode-se destacar que os resultados se diferenciam da norma brasileira devido ao fato de o seu maior conservadorismo referente ao fator de escala estar fixado em 2,0. O ACI 318 (2019) mostrou resultados satisfatórios, com média de 1,26, porém, deve-se observar o percentual de 13,26% de dispersão e com resultados mais satisfatórios nos modelos com pilares de maiores dimensões.

6 CONCLUSÕES

O presente trabalho avaliou o comportamento de lajes lisas de concreto protendido. Utilizando-se de análises numéricas não lineares, as quais foram promovidas pelo *software ATENA*. Foi realizado um estudo do modelo constitutivo capaz de representar a não linearidade física dos comportamentos do concreto em relação à tração, à compressão e ao cisalhamento. Foi observado também, o comportamento plástico das armaduras e os métodos para o emprego de protensão em estruturas com ruptura por punção. O modelo constitutivo foi viabilizado a partir de ensaios experimentais realizados por Melges (2001).

Os resultados obtidos por meio das análises numéricas foram comparados aos dos modelos experimentais, considerando-se não apenas as comparações das curvas carga *versus* deslocamento e carga *versus* deformação do concreto e das armaduras longitudinais, como também o panorama de fissuração, no qual percebeu-se que as modelagens conseguiram representar corretamente o comportamento observado nos ensaios experimentais. A ruptura do modelo numérico M1 foi 0,22% superior à do modelo experimental, enquanto que, no caso do modelo M4, com protensão, foi de 1,63%, o que demonstra uma boa confiabilidade nos modelos constitutivos adotados. O panorama de fissuração também foi bem representado. De modo geral, portanto, as análises numéricas conseguiram reproduzir de forma satisfatória o comportamento notado experimentalmente.

Tendo em vista a boa convergência dos resultados, foi possível dar continuidade à pesquisa por meio de um estudo paramétrico de novos modelos estruturais. Foram determinadas, para tanto, três séries, as quais foram constituídas considerando-se o espaçamento entre os cabos de protensão (Série A), a espessura da laje (Série E) e a retangularidade do pilar (Série P), elementos esses que permitiram a compreensão acerca do comportamento de lajes lisas protendidas submetidas à punção.

Nas três séries foram observadas algumas características. A Série A, por ser a que interfere diretamente na protensão, ao aumentar o espaçamento entre os cabos, promoveu redução na resistência à punção e diminuição da deformação do concreto. Também foi observado, nesse contexto, redução nas forças exercidas pelas cordoalhas de protensão. O panorama de fissuração da laje com menor espaçamento evidencia uma maior concentração de fissuras e de deformações, acompanhada do aumento da resistência à punção.

Na Série E, é perceptível como alterações na espessura da laje provocaram interferências na capacidade de resistência e de rigidez dos modelos. As configurações apresentaram

contribuições de até 19% na resistência à punção e redução de aproximadamente 20% no deslocamento com o acréscimo de apenas 2 cm na espessura. Os resultados também mostraram pouca influência nas deformações do concreto e das barras longitudinais tracionadas, resultado do aumento da espessura. Em relação aos cabos de protensão, estes não sofreram interferências. Os modelos revelaram que as deformações em lajes mais espessas tendem a se concentrar, antes da ruptura, em um ponto mais central e na face superior da laje.

Para a Série P, os resultados numéricos evidenciaram uma grande influência na capacidade de resistência dos modelos quando alteradas as dimensões de um pilar central quanto à sua retangularidade. Para o modelo P-90, os ganhos observados foram superiores em 53% na capacidade contra à punção. Em relação à deformação do concreto, notou-se que as maiores variações de deformação foram atingidas pelas lajes com menor área do pilar. Deve-se destacar, também, que, ao aumentar a dimensão do pilar, a partir da laje P-80 houve uma variação positiva de deformação em sua região central. Avaliando os efeitos da retangularidade nos cabos de protensão, constatou-se que, ao ampliar as dimensões do pilar em uma direção, esta cria uma área de apoio maior para os cabos, que, ao coincidirem com esta área, exercem menos esforços.

Analisando as estimativas obtidas com os códigos normativos no que se refere à Série A, no geral, as normas trabalharam a favor da segurança. Nota-se que as normas não apresentaram um parâmetro capaz de interferir nos resultados quando da alteração do espaçamento entre os cabos. Foi identificado, também, que o *fib* Model Code (2010) apresenta as melhores estimativas mesmo no LoA III de aproximação onde o código considera que este nível não é adequado para estimativas de elementos fissurados. O ACI 318 (2019) foi o mais conservador nas estimativas.

Em relação à Série E, observou-se que nível III do *fib* Model Code (2010) dispõe das melhores tendências dos resultados à medida que é aumentado a espessura da laje, e pouca diferença nos resultados em seus dois níveis de aproximação. No geral, as demais normas tendem a apresentar o mesmo comportamento, com exceção do ACI 318 (2019), com um comportamento característico mais conservador nas estimativas.

Nos resultados numéricos obtidos dos 16 modelos da Série P, é interessante observar que as previsões do Eurocode 2 (2004) e da NBR 6118 (2014) seguem com a mesma tendência de comportamento, diferenciando-se devido ao fator de escala k . Considerando o coeficiente de variação e a média, os melhores resultados foram expressos pela NBR 6118 (2014) seguido do ACI 318 (2019). No caso do ACI 318 (2019), notou-se melhores previsões com o aumento da

retangularidade do pilar. Para o *fib* Model Code (2010), observa-se que, nos níveis II e III, há uma estabilidade dos resultados a partir da série P-40, o que é justificado em função da descontinuidade do perímetro crítico, limitado à $3,0d$.

Com as análises gráficas apresentadas para os modelos numéricos e teóricos, foi possível identificar a influência do espaçamento entre os cabos de protensão, o aumento na espessura da laje e a retangularidade do pilar exercem na resistência à punção. Quando comparadas as duas análises, notou-se que as cargas previstas pelos modelos numéricos foram maiores que as calculadas pelas normas. De forma geral, as duas análises em conjunto podem ajudar na melhoria de algumas limitações impostas pelos códigos de projeto e auxiliar projetistas a decidir qual parâmetro podem modificar na busca da melhor eficiência possível para a resistência à punção de lajes lisas protendidas.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como continuidade para o estudo da punção, algumas sugestões, baseadas nos diferentes parâmetros investigados durante a pesquisa, podem ser propostas, as quais aparecem a seguir.

- O modelo pesquisado tratou da punção em lajes lisas com pilar central, mas sugere-se o emprego do modelo constitutivo para situações de punção em lajes com diferentes disposições de pilar, como o de canto e o lateral.
- O estudo avaliou o caso de laje apoiada em pilar, considerando como a punção ocorre em diferentes situações, porém, cabem investigações sobre lajes do tipo radier e sapatas flexíveis.
- A análise global de uma laje apoiada por vários pilares também seria um tópico para que se avaliassem os efeitos de membrana.
- As lajes com carga centrada foram consideradas no estudo, mas sugere-se investigar situações de punção para momentos aplicados.
- Propõe-se mais análises paramétricas, ou, também, em conjunto com ensaios experimentais, o emprego de concretos de alto desempenho.
- Na revisão bibliográfica, foram encontradas alternativas de aumento da resistência à punção, como o emprego de diferentes tipos de armadura de cisalhamento e aumento na

taxa de armadura longitudinal. Indica-se, assim, a realização de análises que considerem variações nesses parâmetros.

- Em conjunto com um estudo experimental, seria interessante comparar o comportamento de lajes lisas, com protensão aderente e não aderente, submetidas à punção.

7 REFERÊNCIAS

- AFONSO, C. L. M. **Lajes Fungiformes. Contribuições para a compreensão de seu comportamento.** 2010. 323 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade do Porto, 2010.
- ALBUQUERQUE, N. G. B. **Comportamento das Ligações de Lajes Lisas de Concreto Armado com Pilares de Borda Sujeitas a Excentricidades Interna e Externas.** 2014. 204 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 318-14. **Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI 318R-19).** Farmington Hills, Michigan, 2019.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento.** Rio de Janeiro, 2014.
- BARBÁN, V. V. **Punção em lajes cogumelo protendidas com cabos não-aderentes e pilares com pequeno desalinhamento.** 2003. 205 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2003.
- BARBÁN, V. V. **Punção em lajes cogumelo de concreto protendido com cabos não-aderentes na ligação laje-pilar de borda.** 2008. 379 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2008.
- BARROS, J. A.; FIGUEIRAS, J. A. Experimental behaviour of fibre concrete slabs on soil. **Mechanics of Cohesive-frictional Materials: An International Journal on Experiments, Modelling and Computation of Materials and Structures**, Wiley Online Library, v. 3, n. 3, p. 277–290, 1998.
- BAŽANT, Z.P., Oh, B.H. Crack band theory for fracture of concrete. **Materials and Structures.** v. 16, p. 155–177, 1983.
- BRANTSCHEN, F. **Influence of bond and anchorage conditions of the shear reinforcement on the punching strength of RC slabs.** 2016. 27p. Thèse (Doctorat ès Sciences) – Faculté de L’environnement Naturel, Architectural et Construit, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 2016.
- BUTTIGNOL T.E.T., SOUSA J.L.A.O., BITTENCOURT T.N. Ultra High-Performance Fiber-Reinforced Concrete (UHPFRC): a review of material properties and design procedures. *Rev IBRACON Estrut Mater [Internet].* 2017Aug;10(Rev. **IBRACON Estrut. Mater.**, v.10(4), p. 957-971, 2017.
- CARVALHO, L. A. **Punção em lajes cogumelo de concreto protendido com cabos não aderentes e armadura de cisalhamento.** 2005. 458 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2005.

CARVALHO, C. B., **Análise Crítica dos Critérios Normativos de Dimensionamento à Punção em Lajes Lisas**. 2008. 215 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

ČERVENKA J.; PAPANIKOLAOU V. K, **Three dimensional combined fracture–plastic material model for concrete**. International Journal of Plasticity, v. 24, p. 2192-2220, 2008.

ČERVENKA, V.; JENDELE, L.; ČERVENKA, J. ATENA Program Documentation Part 1 Theory. **Atena**, p. 282, 2016.

CLÉMENT, T. **Influence de la précontrainte sur la résistance au poinçonnement de dalles en béton armé**. 2012. 250p. Thèse (Doctoral en Structures) – École Polytechnique Fédérale De Lausanne, Lausanne, 2012.

CLÉMENT, T.; A. P.; RUIZ, M. F.; MUTTONI, A. **Influence of prestressing on the punching strength of post-tensioned slabs**. Engineering Structures, Elsevier, v.72, p.56-69, 2014.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB – fib Model Code Design Code 2010**: Final Draft. Bulletin d'Information, CEB, Lousanne, April 2010.

CORRÊA, G. **Puncionamento em lajes cogumelo protendidas com cabos não aderentes**. 2001. 153 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2001.

DE BORST, R. **Non-linear analysis of frictional materials**. Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, The Netherlands, 1986.

DÍAZ, R. A. S., **Análise numérica da resistência à punção de lajes lisas protendidas com cabos não aderentes**. 2018. 207 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2018.

EDER, M.; VOLLUM, R.; ELGHAZOULI, A.; ABDEL-FATTAH, T. Modelling and experimental assessment of punching shear in flat slabs with shearheads. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 32, n 12, p. 3911-3924, 2010.

EINPAUL, J.; BRANTSCHEN, F.; FERNÁNDEZ RUIZ, M.; MUTTONI, A. Performance of punching shear reinforcement under gravity loading: Influence of type and detailing. **ACI Structural Journal**, v. 113, n. 4, p. 827-838, jul-aug. 2016.

EUROCODE 2: **Design of Concrete Structures – Part 1: General Rules and Rules for Building**. Bruxelas, 2004, 225p.

FARIA, E. L., **Análise Crítica dos Critérios Normativos de Dimensionamento à Punção em Lajes Lisas**. 2004. 260 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Sistemas estruturais de lajes sem vigas: subsídios para o projeto e execução**. 1989. 272 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1990.

FÜRST, A.; MARTI, P. Robert Maillart's design approach for flat slabs. **Journal of Structural Engineering, ASCE**, n. 123(8), p. 1102–1110, aug. 1997.

Gar, Shobeir & Head, Monique & Hurlebaus, Stefan. (2012). Tension Stiffening in Prestressed Concrete Beams Using Moment-Curvature Relationship. **Journal of Structural Engineering**. v. 138 n.8, p 1075-1078, 2012.

GUANDALINI, S. **Poinçonnement Symetrique des Dalles en Beton Arme**. 2005. 289p. Thèse (Doctoral en Structures) – École Polytechnique Fédérale De Lausanne, Lausanne, 2006.
HASSANZADEH, G.; SUNDQUIST, H. Influence of post-tensioned reinforcement distribution on design of prestressed reinforcement in column supported flat slabs. **Trita-BKN. Bulletin**, Royal Institute of Technology, v. 57, p. 457-466, 2000.

HONORATO, M. O. **Punção em Lajes Lisas com Pilar de Borda Protendidas com Cordoalhas Não Aderentes**. 2008. 195 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2008.

HORDIJK, D. A. **Local approach to fatigue of concrete**. Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, The Netherlands, 1991.

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE (*fib*). **Punching of Structural Concrete Slabs**. *fib* Bulletin 12, Lausanne, Switzerland, 314 p, 2001.

LIBERATI, E. A. P. **Análise de confiabilidade de lajes lisas de concreto armado submetidas à punção**. 2019. 310 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2019.

LIPS, S.; FERNÁNDEZ RUIZ, M.; MUTTONI, A. Experimental investigation on punching strength and deformation capacity of shear-reinforced slabs. **ACI Structural Journal**, v. 109, n. 6, p. 889–900, nov-dez. 2012.

LOURENÇO, P. B.; FIGUEIRAS, J. A. **Solution for the Design of Reinforced Concrete Plates and Shells**. *Journal of Structural Engineering*, v. 121, n. 5, p. 815–823, 1995.

MOBASHER, B.; BARROS, J.; NAAMAN, A.; DESTREE et al. **Report on design and construction of steel fiber-reinforced concrete elevated slabs**. American Concrete Institute: ACI, 2015.

MELGES, J. L. P. **Punção em lajes: exemplos de cálculo e análise teóricoexperimental**. 1995. 252 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

MELGES, J. L. P. **Análise experimental da punção em lajes de concreto armado e protendido**. 2001. 414 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

MUTTONI, Aurelio. Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement. **ACI structural Journal**, v. 105, p. 440-450, 2008.

NYLANDER, H.; KINNUNEN, S.; INGVARSSON, H. **Punching of a prestressed and normally reinforced concrete bridge slab supported by a column**, 1977.

OLIVEIRA, L. H. B., **Resistência à punção em lajes lisas de concreto armado com adição de fibras de aço e aberturas adjacentes ao pilar**. 2020. 367 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2020.

OLIVEIRA, P. R. F.; ANDRADE, A. A.; PINTO, D. A. M.; MATOS JÚNIOR, H. S.; ARAÚJO, J. B. S.; MORAIS, M. G. N. O.; SEABRA, M. S. G. A.; MENDES, P. T. C.; TEIXEIRA, P. W. G. N.; SOUZA, S. A. C. e REINALDO, T. S. **Relatório Técnico Sobre o Desabamento da Obra do Shopping Rio Poty**. Relatório Técnico, CREA/PI, Teresina. 2013.

PRALONG, J; BRÄNDLI, W; THÜRLIMANN, B. **Durchstanzversuche an stahlbeton-und spannbetonplatten**. Birkhäuser, 1979.

RABELLO, F.T. **Análise comparativa de normas para a punção em lajes de concreto armado**. 2010. 248 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

REAGAN, P. E.; BRAESTRUP, M. W. Punching shear in reinforced concrete a state-of-the-art report. **Bulletin d'Information**, n. 186, p. 232, 1985.

REGAN P.; SAMADIAN F. Shear reinforcement against punching in reinforced concrete flat slabs. **The Structural Engineer**, v. 79, n. 10, p. 24-31, 2001.

RAMOS, A. M. P. **Punçamento em lajes fungiformes pré-esforçadas**. Tese (Doutorado) - Universidade Técnica de Lisboa – Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 2003.

RAO, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**. 6. ed. Burlington: Elsevier, 2017.

RUIZ, M. F.; MIRZAEL, Y.; MUTTONI, A. Post-punching behavior of flat slabs. **ACI Structural Journal**, v. 110, n. 5, p. 801-812, 2013.

RUIZ, F. M.; MUTTONI, A. Applications of critical shear crack theory to punching of reinforced concrete slabs with transverse reinforcement. **ACI Structural Journal**, v. 106: 485-494, 2009.

SANTOS, G. S. et al. Sistema de reforço à punção de lajes lisas de concreto armado com polímeros reforçados com fibra de carbono (PRFC). **Revista IBRACON de estruturas e materiais**, v. 7, p. 592-625, 2014.

SCHMID, M. T. **Lajes Planas Protendidas**, 3. ed. São Paulo: Rudloff, 2009

SHEHATA, I. A. E. M. **Theory of Punching in Concrete Slabs**. London, October, 1985. PhD Thesis. The Polytechnic of Central London, 1985

SILVA, R. **Punção em lajes cogumelo protendidas com cordoalhas não aderentes em pilares de diferentes dimensões**. 2005. 224 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, 2005.

SOARES, L.F.S. **Influence of slab continuity on punching resistance.** 2017. 258 p. Tese (Doutorado) - Imperial College London, Londres, 2017.

TURNER, M. J. *et al.* Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of Aeronautical Sciences**, Easton, v.23, p. 805-824, 1956.

VAN MIER, J. G. M. Multiaxial strain-softening of concrete: Part II: Load-histories. **Materials and structures**, v. 19, p. 190-200, 1986.

VANDERBILT, M. D. **Shear Strength of Continuous Plates.** **Journal of the Structural Division, ASCE**, v. 98, p. 961-973, 1972.

VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. **ACI Journal**, v. 83, n. 2, p. 219-231, 1986.

VOS, E. **Influence of Loading Rate and Radial Pressure on Bond in Reinforced Concrete,** Dissertation, Delft University, 1983.

WILLIAMSON JR. F. **Richard courant and the finite element method: A further look.** *Historia Mathematica*, v. 7, Issue 4, p. 369-378, nov. 1980.