

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

DIONISIO PALHARINI JUNIOR

**ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE VIGAS DE SEÇÃO “L” DE CONCRETO  
PRÉ-MOLDADO UTILIZANDO O MÉTODO DAS BIELAS**

Maringá

2020



DIONISIO PALHARINI JUNIOR

**ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE VIGAS DE SEÇÃO “L” DE CONCRETO  
PRÉ-MOLDADO UTILIZANDO O MÉTODO DAS BIELAS**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá.

Área de concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rafael Alves de Souza

Maringá

2020

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

P161a

Palharini Junior, Dionisio

Análise e dimensionamento de vigas de seção "L" de concreto pré-moldado utilizando o método das bielas / Dionisio Palharini Junior. -- Maringá, PR, 2020.  
247 f.: il. color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Alves de Souza.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2020.

1. Método das bielas. 2. Vigas de concreto (seção L). 3. Concreto pré-moldado. 4. Torção - Vigas. I. Souza, Rafael Alves de, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

CDD 23.ed. 624.183414

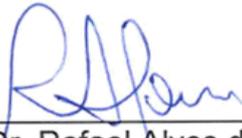
DIONISIO PALHARINI JUNIOR

**ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE VIGAS DE SEÇÃO “L” DE CONCRETO  
PRÉ-MOLDADO UTILIZANDO O MÉTODO DAS BIELAS**

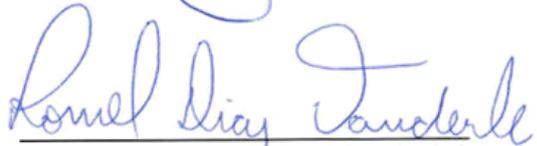
Dissertação apresentada à Universidade  
Estadual de Maringá, como requisito parcial para  
a obtenção do título de mestre.

Aprovado em: 28/02/2020

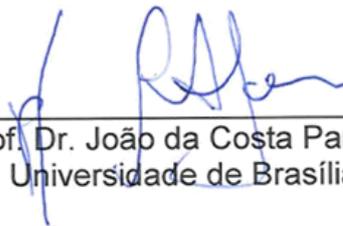
**BANCA EXAMINADORA**



Prof. Dr. Rafael Alves de Souza  
Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Romel Dias Vanderlei  
Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. João da Costa Pantoja  
Universidade de Brasília



## AGRADECIMENTOS

A Deus, que sempre abençoou e iluminou minhas decisões, me protegeu nos momentos difíceis, sempre me dando forças para continuar lutando e batalhando pelos meus sonhos. Agradeço pela realização deste trabalho e por todas as conquistas que o Senhor tem colocado no meu caminho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Rafael Alves de Souza que sempre foi um exemplo a ser seguido. Agradeço pela atenção, confiança, honestidade, conselhos, ensinamentos, pelas oportunidades e principalmente por compartilhar comigo um pouquinho de todo seu conhecimento.

À minha família, meus pais Dionisio e Fabiola, meus irmãos Marlon e Braulio e minha noiva Bruna Maia. Agradeço por toda dedicação, por estarem presentes em todos os momentos da minha formação, pela proteção, incentivo e por todo amor e carinho que sempre me deram.

Ao Eng. José Ricardo Parra de Oliveira e a RO Engenharia, pela compreensão e por todo suporte dado durante este tempo.

Aos amigos Eng. João Pedro Lopes e Eng. João de Oliveira Dorta Filho, pela amizade, conselhos, contribuições e por serem grandes profissionais que estiveram comigo durante essa jornada.

A todos os Professores e Colaboradores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá.



## RESUMO

Dentre os elementos presentes nas estruturas de concreto pré-moldado estão as vigas de seção “L”, largamente utilizadas no perímetro (bordas e fachadas) das edificações. A geometria tridimensional e as cargas externas aplicadas excêntrica ao eixo longitudinal, através de abas laterais, fazem com que este tipo de viga esteja submetido simultaneamente a tensões normais e tensões de cisalhamento por forças cortante e momentos torsores, gerando um complexo estado tensional. Diferentes modelos presentes na literatura tentam capturar o comportamento das abas laterais e os efeitos combinados da flexão e do cisalhamento em vigas de seção “L”, dentre eles, a abordagem proposta por Marti (1985) através da utilização do Método das Bielas (“*Strut-and-Tie Method*”). Sendo assim, este trabalho tem como objetivo geral aplicar o Método das Bielas para análise e dimensionamento completo de vigas de seção “L” de concreto pré-moldado. Para tanto, foi desenvolvido um estudo de caso com auxílio do software CAST contemplando todas as etapas de dimensionamento e respeitando os parâmetros genéricos recomendados pela ABNT NBR 6118:2014. Para que a utilização do método pudesse ser avaliada com relação a viabilidade e segurança, os resultados para o dimensionamento das armaduras transversais e longitudinais foram comparados com diferentes métodos analíticos alternativos recomendados por documentos normativos internacionais. Os resultados obtidos mostram que o Método das Bielas, quando utilizado de forma isolada para o dimensionamento da aba lateral, sem considerar a viga com um todo, apresentou resultados conservadores quando comparado com os outros métodos analíticos utilizados. Por outro lado, quando o Método das Bielas foi utilizado para análise e dimensionamento completo da viga, as diferenças nas armaduras longitudinal principal e transversal foram inferiores a 8,3%. Desse modo, o estudo de caso apresentado corrobora para aceitação do Método das Bielas como uma ferramenta segura e altamente competitiva para análise e dimensionamento de vigas de seção “L” de concreto pré-moldado.

**Palavras-chave:** Concreto pré-moldado; Vigas de seção “L”; Método das Bielas; Torção.



## ABSTRACT

Among the elements in precast concrete structures, the L-shaped spandrel beams are widely used in around the exterior edge of buildings. The three-dimensional geometry and the external loads applied eccentrically to the longitudinal axis, on a continuous ledge, make this type of section subject to both normal and shear stresses, generating in this way a complex stress state. Different models present in the literature try to capture the behavior of the ledge and the combined effects of flexion and shear in spandrel beams, including the approach proposed by Marti (1985), using the Strut-and-Tie Method. Thus, this work aims to present the use of the Strut-and-Tie Method for analysis and complete design precast concrete spandrel beams. For this, a numerical example was developed with software CAST, covering all design steps and respecting the parameters recommended by ABNT NBR 6118:2014. In order for the method could be evaluated with regard to viability and safety, the results for the design of longitudinal and transverse reinforcements was compared with results from different alternative analytical methods recommended by international codes. The results show that the Strut-and-Tie Method, when used only for ledge design, presented conservative results when compared with the other analytical methods adopted. However, when the Strut-and-Tie Method was used for the complete section design, the differences in longitudinal and transverse reinforcement distribution were less than 8,3%. Thus, the example presented corroborates the acceptance of the Strut-and-Tie Method as a safe and highly competitive tool for analysis and design of precast concrete “L” shaped beams.

**Keywords:** Precast concrete; Spandrel beams; L-shaped beams; Strut-and-Tie Method; Torsion.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Viga de borda de seção “L” sujeita a torção .....	18
Figura 2.1 - Nomenclatura das regiões da viga de seção "L" .....	24
Figura 2.2 - Tipologias de vigas de seção "L": a) Abas laterais contínuas; b) Consolos individuais; c) Aberturas na alma. ....	24
Figura 2.3 - Recomendações de Elliot (2017) para as dimensões de vigas de seção “L” .....	25
Figura 2.4 - Dimensões normais das vigas de seção "L" .....	25
Figura 2.5 - Modelos de vigas de seção "L" abordadas pelo PCI (2010) .....	26
Figura 2.6 – Possibilidades de aplicação de cargas verticais em vigas de seção "L" .....	30
Figura 2.7 - Reação vertical responsável Tabela 131 pelo equilíbrio da viga .....	30
Figura 2.8 - Tipos de forças oriundas de variações volumétricas.....	32
Figura 2.9 - Binário horizontal resultante do efeito de pórtico .....	33
Figura 2.10 - Abordagens para ligação entre laje e viga de seção "L". a) laje simplesmente apoiada na viga; b) laje ligada à viga por meio de mecanismos complementares .....	34
Figura 2.11 - Exemplo de ligação laje-viga em que o momento torsor não é restringido .....	35
Figura 2.12 - Ligações viga-laje capazes de restringir a torção (alveolar e duplo “T”) .....	36
Figura 2.13 - Soluções variantes para a largura das vigas para apoio de piso .....	38
Figura 2.14 - Tipologias de ligações viga-pilar resistentes à torção com e sem chumbadores	39
Figura 2.15 - Esquema da barra do chumbador.....	40
Figura 2.16 - Disposição dos atuadores para aplicação da ação de torção na ligação.....	40
Figura 2.17 - Componentes normais na seção resistente à torção na ligação .....	41
Figura 2.18 - Esforços verticais na ligação viga-pilar por chumbadores.....	44
Figura 2.19 - Interfaces de ligação entre a barra e o concreto.....	45
Figura 2.20 - Efeitos provocados pela força $H_d$ na ligação com chumbadores.....	46
Figura 2.21 - Ligação viga-pilar com chapa de aço soldada .....	47
Figura 2.22 - Etapas para verificação da capacidade resistente da ligação viga-pilar com chapas de aço soldadas .....	48
Figura 2.23 - Mecanismo resistente ao cisalhamento das barras que ancoram a chapa embutida no topo da viga .....	49
Figura 3.1 - Eixos principais de inércia em vigas de seção "L" .....	52
Figura 3.2 – Parâmetros geométricos para comparação entre os módulos de resistência .....	52

Figura 3.3 - Relação entre os dimensionais $h/b$ e $W_{mín}/W_z$ para seções "L" .....	54
Figura 3.4 - Analogia de treliça espacial.....	56
Figura 3.5 - Detalhamento da armadura de viga de seção "L" utilizando o CFT .....	60
Figura 3.6 - Fragmentação do concreto na região de cobrimento das armaduras .....	61
Figura 3.7 - Região tubular efetiva em uma viga sujeita a torção .....	62
Figura 3.8 - Área interna à trajetória do fluxo de cisalhamento por torção .....	63
Figura 3.9 - Fragmentação do cobrimento do concreto devido ao cisalhamento por forças cortantes.....	64
Figura 3.10 – Determinação dos parâmetro $b_v$ e $d_{ve}$ .....	72
Figura 3.11 – Diferenças entre o CFT, o MCFT e o DSFM .....	74
Figura 3.12 - Detalhamento da armadura pelo método proposto por Zia e McGee (1974).....	75
Figura 3.13 – Divisão da seção transversal em retângulos.....	78
Figura 3.14 - Modelo analítico proposto com base no mecanismo de ruptura observado experimentalmente.....	86
Figura 3.15 - Divisão das três regiões que compõem a viga, conforme panorama de fissuração apresentado em observações experimentais e numéricas.....	87
Figura 3.16 – Definição de seções poligonais cheias convexas e côncavas.....	99
Figura 3.17 – Divisão da seção transversal de uma viga de seção "L" em retângulos.....	100
Figura 3.18 - Modelo proposto por Collins e Mitchell (1980) para a ligação da aba lateral com a alma da viga .....	106
Figura 3.19 - Comportamento à flexão da aba lateral em uma viga de seção "L" .....	108
Figura 3.20 - Ruptura por punção da aba lateral observado em avaliação experimental .....	109
Figura 3.21 - Parâmetros geométricos adotados para o dimensionamento da aba lateral pelo Manual do BCA (2001).....	110
Figura 3.22 - Requisitos para o dimensionamento da aba lateral de acordo com o Manual do PCI (2010) .....	113
Figura 3.23 – Parâmetros geométricos adotados pelo Manual do PCI (2010) para verificação da punção .....	114
Figura 3.24 – Esquema estrutural e modos de ruptura de abas laterais .....	119
Figura 3.25 – Parâmetros geométricos que afetam as verificações pelo modelo de ruptura por atrito-cisalhamento.....	120
Figura 3.26 – Parâmetros geométricos que afetam o dimensionamento da armadura horizontal de flexão e de tração direta da aba lateral .....	121

Figura 3.27 – Parâmetros geométricos que afetam a verificação à punção da aba lateral .....	124
Figura 3.28 – Recomendações para o posicionamento do aparelho de apoio na aba lateral .	126
Figura 3.29 – Inclinação do cone de punção observado por Nafadi et al. (2018a) .....	127
Figura 4.1 - Exemplos de “Regiões D” .....	134
Figura 4.2 - Possibilidade de viga de seção "L" com descontinuidade generalizada .....	135
Figura 4.3 – Comparação entre modelos resistentes para aba lateral de vigas de seção "L" e consolos .....	136
Figura 4.4 – Combinação de modelos de escoras e tirantes para vigas de seção "L" .....	137
Figura 4.5 - Modelos sobrepostos para suportar cargas de grande magnitude.....	137
Figura 4.6 – Abordagem feita por Marti (1985) para utilização do Método das Bielas em vigas de seção "L" .....	138
Figura 4.7 - Tipos de escoras: a) Leque; b) Garrafa; c) Prismática .....	139
Figura 4.8 – Exemplos de regiões nodais CCC, CCT, CTT e TTT.....	141
Figura 4.9 - Exemplos de condições de ancoragem nos tirantes .....	145
Figura 4.10 - Diferentes modelos de escoras e tirantes para a mesma viga-parede .....	146
Figura 4.11 – Modelos padronizados de treliça para utilização em vigas de seção "L" .....	147
Figura 4.12 – Modelos baseados em processos de otimização para vigas de seção "L" .....	148
Figura 4.13 - Interface do CAST (Computer Aided Strut-and-Tie) .....	150
Figura 4.14 – Viga-parede analisada e verificada automaticamente com auxílio do software CAST .....	151
Figura 4.15 – Viga convencional analisada e verificada automaticamente com auxílio do software CAST .....	152
Figura 4.16 – Pilares excêntricos analisados e verificados automaticamente com auxílio do software CAST .....	152
Figura 4.17 – Reforço em fundação dimensionado automaticamente por com auxílio do software CAST apresentado por Guner e Carrière (2016).....	153
Figura 4.18 – Definição das propriedades gerais do software CAST.....	154
Figura 4.19 – Criação e definição das escoras no software CAST.....	155
Figura 4.20 – Criação e definição das regiões nodais no software CAST.....	156
Figura 4.21 – Criação e definição dos tirantes no software CAST .....	157
Figura 4.22 – Opções para o desenho da “Região D” no software CAST.....	158
Figura 4.23 – Etapas de construção do modelo de treliça no software CAST .....	158

Figura 4.24 – Definição das condições de contorno e análise dos esforços solicitantes no software CAST .....	159
Figura 4.25 – Atribuição dos parâmetros essenciais nas barras do software CAST .....	160
Figura 4.26 – Atribuição do tipo dos nós no software CAST .....	161
Figura 4.27 – Representação dos níveis de tensões no software CAST .....	162
Figura 4.28 – Detalhamento final da viga de seção “L” dimensionada por Marti (1985) .....	163
Figura 4.29 – a) Transferência da força aplicada na aba lateral; b) Modelo em elevação do espraçamento das cargas concentradas .....	164
Figura 4.30 - Fluxo de cisalhamento devido a introdução da força F.....	165
Figura 4.31 - Regiões resistentes a torção e aos esforços cortantes e flexão .....	166
Figura 4.32 - Modelo de treliça para transferência das forças aos apoios .....	167
Figura 4.33 - Modelo de treliça adotado para borda vertical da viga .....	168
Figura 4.34 - Resistência necessária para armadura transversal.....	169
Figura 5.1 – Seções transversais adotadas para o estudo de caso.....	171
Figura 5.2 – Planta de formas .....	172
Figura 5.3 – Corte AA.....	173
Figura 5.4 – Corte BB .....	173
Figura 5.5 – Diagramas de esforços internos de cálculo.....	176
Figura 5.6 – Modelo de treliça para transferência da força aplicada na aba lateral.....	177
Figura 5.7 – Largura de distribuição das armaduras transversais.....	178
Figura 5.8 – Configuração dos parâmetros de resistência das escoras .....	179
Figura 5.9 – Configuração dos parâmetros de resistência das regiões nodais.....	179
Figura 5.10 – Construção do modelo de treliça.....	180
Figura 5.11 – Definição das condições de contorno .....	181
Figura 5.12 – Obtenção dos esforços solicitantes no modelo de treliça para aba lateral.....	181
Figura 5.13 – Configuração dos parâmetros de resistência dos tirantes .....	182
Figura 5.14 – Verificação dos níveis de tensões nas escoras e tirantes da aba lateral.....	183
Figura 5.15 – Verificação dos níveis de tensões nas regiões nodais da aba lateral .....	184
Figura 5.16 – Modelo de equilíbrio da seção transversal.....	185
Figura 5.17 – Diagrama de resistência à torção para os estribos fechados .....	187
Figura 5.18 – Nomenclaturas dos nós e barras do modelo de treliça em elevação .....	187
Figura 5.19 – Esforços solicitantes do modelo em elevação – 1ª iteração.....	188
Figura 5.20 – Esforços solicitantes do modelo em elevação – 2ª iteração.....	189

Figura 5.21 – Parâmetros de resistência atribuídos ao modelo de treliça em elevação .....	191
Figura 5.22 – Verificação dos níveis de tensões nas escoras e tirantes do modelo de treliça em elevação .....	191
Figura 5.23 – Diagrama de resistências necessárias à armadura transversal .....	192
Figura 5.24 – Modelos adotados para o dimensionamento à torção.....	207
Figura 5.25 – Divisão da seção transversal em retângulos .....	220
Figura 5.26 – Resultados obtidos para o conjunto de armaduras da aba lateral em termos da armadura absoluta (cm <sup>2</sup> ).....	226
Figura 5.27 – Resultados obtidos para o conjunto de armaduras da aba lateral em termos da taxa de distribuição (cm <sup>2</sup> /m) .....	228
Figura 5.28 – Resultados obtidos para resistência à punção .....	229
Figura 5.29 – Resumo das relações entre a tensão resistente e a tensão atuante (“ <i>Stress Ratios</i> ”) nas barras da aba lateral .....	230
Figura 5.30 – Resumo das relações entre a tensão resistente e a tensão atuante (“ <i>Stress Ratios</i> ”) nas regiões nodais da aba lateral.....	230
Figura 5.31 – Resultados obtidos para armadura transversal total pelo Método das Bielas e ABNT NBR 6118:2014 + BCA (2001) e BS 8110-1:1997 ou PCA (2013).....	232
Figura 5.32 – Resultados obtidos para armadura transversal total pelo Método das Bielas e ABNT NBR 6118:2014 + Manual do PCI (2010).....	233
Figura 5.33 – Resultados obtidos para armadura transversal total pelo Método das Bielas e por métodos analíticos alternativos.....	234
Figura 5.34 – Resultados obtidos para armadura longitudinal absoluta .....	235
Figura 5.35 – Resultados obtidos para os esforços na região do primeiro e segundo ponto de aplicação da força concentrada.....	236
Figura 5.36 – Resumo das relações entre a tensão resistente e a tensão atuante (“ <i>Stress Ratios</i> ”) nas barras do modelo em elevação .....	237
Figura 5.37 – Resumo das relações entre a tensão resistente e a tensão atuante (“ <i>Stress Ratios</i> ”) nas barras do modelo em elevação .....	238



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedade geométricas da seção transversal A.....	27
Tabela 2 – Propriedades geométricas da seção transversal B .....	27
Tabela 3 – Comparação entre $W_{\text{mín}} / W_z$ para várias geometrias de seção "L" .....	53
Tabela 4 – Comparação entre os resultados obtidos para o conjunto de armaduras da aba lateral em termos da armadura absoluta ( $\text{cm}^2$ ) .....	227
Tabela 5 – Comparação entre os resultados obtidos para o conjunto de armaduras da aba lateral em termos da taxa de distribuição.....	228
Tabela 6 – Comparação entre os resultados obtidos para resistência à punção .....	229
Tabela 7 – Comparação entre os resultados obtidos para armadura transversal total pelo Método das Bielas e ABNT NBR 6118:2014 + BCA (2001) / BS 8110-1:1997 e PCA (2013) .....	232
Tabela 8 – Comparação entre os resultados obtidos para armadura transversal total pelo Método das Bielas e ABNT NBR 6118:2014 + Manual do PCI (2010) .....	233
Tabela 9 – Comparação entre os resultados obtidos para armadura transversal total pelo Método das Bielas e por métodos analíticos alternativos .....	234
Tabela 10 – Comparação entre os resultados obtidos para armadura longitudinal .....	235



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>17</b>
<b>1.1</b>	<b>OBJETIVOS .....</b>	<b>20</b>
<b>1.1.1</b>	<b>Objetivo Geral.....</b>	<b>20</b>
<b>1.1.2</b>	<b>Objetivos Específicos .....</b>	<b>21</b>
<b>1.2</b>	<b>JUSTIFICATIVA .....</b>	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>VIGAS DE SEÇÃO “L” DE CONCRETO PRÉ-MOLDADO .....</b>	<b>23</b>
<b>2.1</b>	<b>TIPOLOGIAS E DIMENSÕES TÍPICAS .....</b>	<b>23</b>
<b>2.2</b>	<b>FORÇAS ATUANTES .....</b>	<b>29</b>
<b>2.2.1</b>	<b>Forças Verticais .....</b>	<b>29</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Forças Horizontais .....</b>	<b>31</b>
<b>2.2.3</b>	<b>Forças por Restrição de Movimentos.....</b>	<b>31</b>
<b>2.3</b>	<b>LIGAÇÕES .....</b>	<b>33</b>
<b>2.3.1</b>	<b>Ligações com as Lajes.....</b>	<b>34</b>
<b>2.3.2</b>	<b>Ligações com os Apoios .....</b>	<b>37</b>
<b>2.3.2.1</b>	<b>Ligação com Chumbadores.....</b>	<b>38</b>
<b>2.3.2.2</b>	<b>Ligação com Chapas de Aço Soldadas .....</b>	<b>47</b>
<b>3</b>	<b>DIMENSIONAMENTO USUAL DA SEÇÃO POR MÉTODOS ANALÍTICOS....</b>	<b>51</b>
<b>3.1</b>	<b>FLEXÃO .....</b>	<b>51</b>
<b>3.2</b>	<b>CISALHAMENTO POR FORÇAS CORTANTES E TORÇÃO .....</b>	<b>55</b>
<b>3.2.1</b>	<b>Método Analítico Proposto por Collins e Mitchell (1980) .....</b>	<b>59</b>
<b>3.2.1.1</b>	<b>Conceituação .....</b>	<b>59</b>
<b>3.2.1.2</b>	<b>Etapas de Dimensionamento .....</b>	<b>64</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Método Analítico Proposto por Zia e Hsu (2004) .....</b>	<b>75</b>
<b>3.2.2.1</b>	<b>Conceituação .....</b>	<b>75</b>
<b>3.2.2.2</b>	<b>Etapas de Dimensionamento .....</b>	<b>77</b>
<b>3.2.3</b>	<b>Método Analítico Proposto por Lucier et al. (2011b) .....</b>	<b>85</b>
<b>3.2.3.1</b>	<b>Conceituação .....</b>	<b>85</b>
<b>3.2.3.2</b>	<b>Etapas de Dimensionamento .....</b>	<b>88</b>
<b>3.2.4</b>	<b>Método Analítico Recomendado pela ABNT NBR 6118:2014 .....</b>	<b>91</b>

3.2.4.1	Conceituação .....	91
3.2.4.2	Dimensionamento à Força Cortante (Modelo de Cálculo I e Modelo de Cálculo II) ..	92
3.2.4.3	Dimensionamento à Torção .....	98
3.3	ABAS LATERAIS .....	104
<b>3.3.1</b>	<b>Método Analítico Proposto pelo Manual do BCA (2001) / BS 8110-1:1997.....</b>	<b>110</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Método Analítico Proposto pelo Manual do PCI (2010).....</b>	<b>113</b>
<b>3.3.3</b>	<b>Método Analítico Proposto pelas Notas do PCA (2013) .....</b>	<b>118</b>
<b>3.3.4</b>	<b>Método Analítico Proposto por Nafadi et al. (2018a) para Resistência à Punção</b>	<b>126</b>
<b>4</b>	<b>MÉTODO DAS BIELAS .....</b>	<b>133</b>
4.1	PRINCÍPIOS BÁSICOS .....	139
4.2	PARÂMETROS FUNDAMENTAIS .....	141
<b>4.2.1</b>	<b>Escoras .....</b>	<b>142</b>
<b>4.2.2</b>	<b>Regiões Nodais .....</b>	<b>143</b>
<b>4.2.3</b>	<b>Tirantes .....</b>	<b>143</b>
4.3	PROCESSOS DE OBTENÇÃO DOS MODELOS.....	145
4.4	ANÁLISE E VERIFICAÇÕES .....	149
4.5	SOFTWARE CAST .....	150
<b>4.5.1</b>	<b>Configurações Iniciais.....</b>	<b>154</b>
<b>4.5.2</b>	<b>Construção do Modelo de Treliça .....</b>	<b>157</b>
<b>4.5.3</b>	<b>Definição das Condições de Contorno e Análise dos Esforços Solicitantes.....</b>	<b>159</b>
<b>4.5.4</b>	<b>Atribuição dos Parâmetros e Verificação das Tensões .....</b>	<b>160</b>
4.6	ABORDAGEM FEITA POR MARTI (1985) EM VIGAS DE SEÇÃO “L” .....	162
<b>5</b>	<b>COMPARAÇÕES ENTRE DIVERSAS METODOLOGIAS .....</b>	<b>171</b>
5.1	ESTUDO DE CASO .....	171
5.2	CARGAS E ESFORÇOS INTERNOS ATUANTES .....	174
5.3	DIMENSIONAMENTO PELO MÉTODO DAS BIELAS .....	176
<b>5.3.1</b>	<b>Dimensionamento da Aba Lateral.....</b>	<b>177</b>
<b>5.3.2</b>	<b>Dimensionamento à Torção .....</b>	<b>184</b>
<b>5.3.3</b>	<b>Determinação da Armadura Longitudinal e Transversal .....</b>	<b>187</b>
5.4	DIMENSIONAMENTO POR MÉTODO ANALÍTICOS.....	192
<b>5.4.1</b>	<b>Dimensionamento da Aba Lateral.....</b>	<b>193</b>
5.4.1.1	Manual do BCA (2001) e BS 8110-1:1997 .....	193

5.4.1.2 Manual do PCI (2010) .....	195
5.4.1.3 Notas do PCA (2013) .....	198
5.4.1.4 Verificação da Resistência à Punção – Nafadi et al. (2018a) .....	201
<b>5.4.2 Dimensionamento da Viga em Elevação .....</b>	<b>202</b>
5.4.2.1 Modelo de Viga Convencional – ABNT NBR 6118:2014 .....	202
5.4.2.2 “ <i>Compression Field Theory</i> ” – Collins e Mitchell (1980).....	214
5.4.2.3 Resultados Experimentais – Zia e Hsu (2004).....	220
<b>5.5 RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>226</b>
<b>5.5.1 Aba Lateral .....</b>	<b>226</b>
<b>5.5.2 Modelo em Elevação .....</b>	<b>231</b>
<b>6 CONCLUSÕES.....</b>	<b>239</b>
<b>7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>243</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Os elementos estruturais de concreto pré-moldado, de fábrica ou de canteiro, geralmente são feitos em locais que oferecem melhores condições que o local definitivo de utilização, favorecendo a industrialização e as condições de trabalho em toda a cadeia produtiva. As estruturas de concreto pré-moldado se diferenciam das estruturas de concreto moldadas no local basicamente por situações transitórias e pelas ligações. As situações transitórias compreendem as fases de desmoldagem, transporte, armazenamento e montagem. Já as ligações são responsáveis pelas conexões entre os elementos pré-moldados tornando possível a manutenção da estrutura em sua posição final (EL DEBS, 2017).

Dentre os elementos presentes nas estruturas de concreto pré-moldado estão as vigas de seção “L”, largamente utilizadas no perímetro das edificações, ou seja, nas bordas e fachadas que compõem o edifício. Hariharan et al. (2019) ainda demonstram que a utilização das vigas de seção “L” não está restrita somente ao perímetro das edificações sendo amplamente adotadas para suportar lajes em que o topo da viga não pode se estender além do topo da laje, como é o caso de rampas para veículos em edifícios garagem ou pontos de passagem entre compartimentos.

Segundo Van Acker (2003) as vigas com abas laterais, em forma de “L” ou em forma de “T” invertido, são os tipos mais comum de vigas para pisos em construções pré-moldadas. Segundo o autor, a principal vantagem na sua utilização é a redução da espessura total dos subsistemas de piso. Destaca-se também como vantagem, o fato deste tipo de viga já possuir a lateral externa acabada, não necessitando de formas para concretagem e solidarização com a laje. As vigas de seção “L” também podem ser utilizadas já com a função de peitoril ou como barreira para veículos em edifícios garagem.

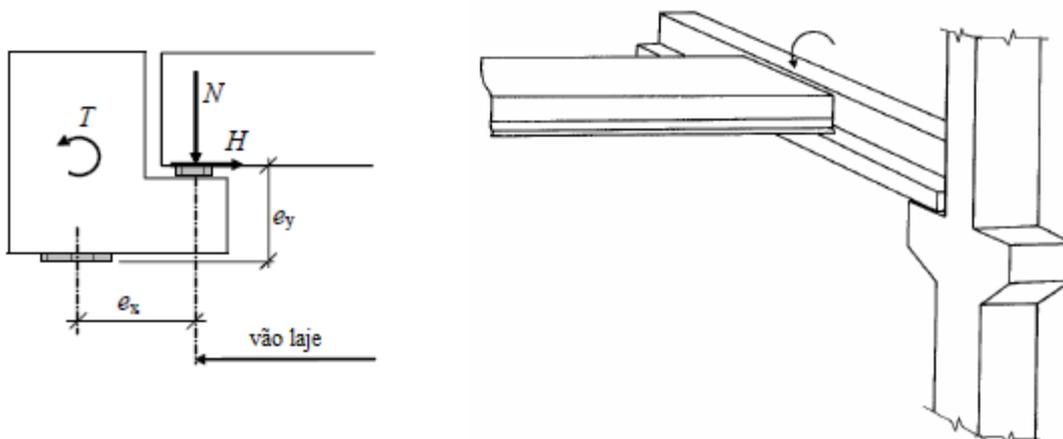
O projeto estrutural das vigas de seção “L” é considerado um dos mais complexos entre os elementos da indústria de pré-moldados, devido a fatores relacionados a assimetria da seção transversal nos dois eixos, a presença de carregamentos excêntricos ao centro de cisalhamento e pelas ligações, que no caso deste tipo de seção transversal, compreende as ligações viga-laje e as ligações viga-pilar (PASTORE, 2015).

Para que o carregamento aplicado na aba lateral seja transmitido para a alma da seção, é necessário que seja feita a transferência do carregamento através de um conjunto de armaduras que promovam uma conexão segura entre a alma e a aba lateral. O carregamento excêntrico

advindo normalmente de lajes alveolares e lajes duplo “T”, faz com que as vigas de seção “L” necessitem ser dimensionadas à flexão e principalmente ao cisalhamento provocado por forças cortantes e momentos torsores atuando de maneira combinada. Além destes requisitos, também são necessárias verificações complementares como a possibilidade de ocorrência de punção na aba lateral, flexão longitudinal da aba e a ocorrência de flexão fora do plano nas extremidades. Essa série de fatores e requisitos mostra que o dimensionamento de vigas de seção “L” de concreto pré-moldado não é uma tarefa trivial, o que pode desencorajar o seu uso.

A Figura 1.1 apresenta uma viga de borda de seção “L” com as cargas aplicadas na aba lateral da seção transversal. As excentricidades verticais e horizontais devido ao ponto de aplicação das cargas são responsáveis pelo surgimento de uma torção de equilíbrio ( $T$ ) que necessariamente deve ser resistida pela seção da viga em algum momento da montagem ou até mesmo na posição final, quando a ligação entre a viga e laje seja flexibilizada. O momento torsor ( $T$ ) atuante na viga de seção “L” também deve ser restringido pelas ligações com os pilares para que as vigas se mantenham estáveis, evitando-se possíveis situações de tombamento.

**Figura 1.1 - Viga de borda de seção “L” sujeita a torção**



Fonte: Adaptado de FIB (2008)

Conforme pode ser visto em Marti (1985), a utilização do Método das Bielas pode ser uma boa alternativa para a análise e dimensionamento completo de vigas de seção “L”, uma vez que, a presença de descontinuidades geométricas provocadas pela presença da aba lateral e descontinuidades estáticas provocadas pela aplicação de cargas concentradas advindas de lajes duplo “T” por exemplo, fazem com que a resolução do problema através da utilização de modelos de treliça seja uma maneira bastante racional para tratar o assunto.

De acordo com Souza (2004), o Método das Bielas teve sua origem no século XX quando Ritter e Mörsh introduziram a inspirada “Analogia de Treliça”. Esta analogia tem sido utilizada com sucesso no dimensionamento de vigas de concreto armado ao momento torsor e a força cortante e é sem dúvida uma das ideias mais brilhantes criadas dentro do concreto estrutural. A generalização da analogia de treliça proposta por Ritter e Mörsh convencionou-se denominar Método das Bielas.

O Método das Bielas é baseado no Teorema do Limite Inferior da Teoria da Plasticidade, isto é, a capacidade de carga esperada de uma estrutura será igual ou inferior a carga de ruína real o que o torna uma solução segura para o dimensionamento de elementos de concreto. Basicamente, a essência do método consiste na substituição da estrutura real de concreto fissurada por uma estrutura de treliça idealizada equivalente, através dos chamados Modelos de Escoras e Tirantes (*Strut-and-Tie Models*). Estes modelos representam de maneira discreta os campos principais de tensões em que as escoras são formadas por barras comprimidas que representam os campos principais de compressão e os tirantes formados por barras tracionadas que representam os campos principais de tração. As interconexões que promovem a ligação entre as escoras e tirantes são denominadas regiões nodais (EL-METWALLY E CHEN, 2017).

Para que o dimensionamento pelo Método das Bielas tenha validade e o comportamento da viga pré-moldada se mantenha fiel às condições de equilíbrio adotadas na resolução do modelo de treliça equivalente, é necessário ainda que as ligações viga-pilar sejam dimensionadas corretamente e resistam a todos os esforços solicitantes.

Segundo Elliott (2017), existem diversas maneiras satisfatórias de se promover as ligações entre os elementos, como por exemplo ligações soldadas, aparafusadas ou grauteadas. Todavia, independente da maneira como serão feitas as ligações, é importante que o método utilizado seja simples o suficiente para que não haja dúvidas no momento da execução.

Os esforços de torção atuantes nas vigas de seção “L” devem ser restringidos pelas ligações nos apoios para que as vigas se mantenham estáveis, evitando-se possíveis situações de tombamento. A restrição à torção nos apoios é estabelecida através da obtenção de momentos torsores contrários aos momentos solicitantes, adotando-se para tanto, forças de reação excêntricas ao eixo do apoio e/ou binários de forças resistentes capazes de combater os momentos torsores solicitantes.

O dimensionamento de elementos de concreto utilizando o Método das Bielas tem se tornado uma tendência mundial principalmente pelo respaldo que as normas e códigos internacionais tem apresentado em suas últimas revisões, como por exemplo as considerações

feitas pelo código FIB (CEB-FIP) *Model Code* (2010), o boletim técnico 61 FIB (CEB-FIP) *Design Examples for Strut-and-Tie Models* (2013), as diversas possibilidades de utilização apresentadas pela norma canadense CSA 23.3:2014 e a recente revisão da norma americana ACI 318:2019 que apresentou doze novas alterações com relação à utilização do Método das Bielas. De acordo com Moehle (2019) as alterações aprovadas tornarão o método ainda mais versátil além de aumentar a segurança e a capacidade de utilização.

Seguindo a tendência dos principais documentos normativos internacionais, a última revisão da norma brasileira que trata dos procedimentos para o projeto de estruturas de concreto ABNT NBR 6118:2014 passou a apresentar pela primeira vez, ainda que de maneira discreta, procedimentos mais genéricos para aplicação do Método das Bielas, abrindo um leque para novas possibilidades de dimensionamento de elementos estruturais com comportamento mais complexos, como é o caso das vigas de seção “L”.

Assim sendo, este trabalho busca apresentar estratégias e diretrizes para o dimensionamento de vigas de seção “L” de concreto pré-moldado utilizando o Método das Bielas. Será apresentado um estudo de caso capaz de contemplar o dimensionamento completo de uma viga de seção “L” segundo as recomendações genéricas do item 22.3 da ABNT NBR 6118:2014. O estudo de caso será resolvido de forma automatizada através da utilização do software CAST. Essa análise se completa por meio da comparação entre os resultados obtidos pelo Método das Bielas com resultados obtidos através do método convencional, apresentado na ABNT NBR 6118:2014, além de resultados obtidos por métodos analíticos alternativos presentes na literatura internacional e recomendados pelo CSA 23.3:2014 e pelo ACI 318:2019. Vale ressaltar que o método alternativo recomendado pelo ACI 318:2019 é extensamente utilizado com sucesso pela indústria do concreto pré-moldado e foi calibrado com base em 394 ensaios experimentais e também validado experimentalmente por Klein (1986), Lucier (2011a) e Hariharan (2019).

## **1.1 OBJETIVOS**

### **1.1.1 Objetivo Geral**

O presente trabalho tem como objetivo geral aplicar o Método das Bielas, segundo as recomendações da ABNT NBR 6118:2014, para análise e dimensionamento de vigas de seção

“L” de concreto pré-moldado comparando os resultados obtidos com diferentes métodos analíticos.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Descrever as características e o comportamento estrutural de vigas de seção “L” e suas ligações;
- Aplicar o Método das Bielas de forma automatizada através da utilização do software CAST para a análise e dimensionamento completo de vigas de seção “L” segundo os parâmetros estabelecidos pela ABNT NBR 6118:2014;
- Comparar os resultados obtidos com os modelos de cálculo convencionais apresentados pela ABNT NBR 6118:2014 para o dimensionamento à flexão e ao cisalhamento devido a forças cortantes e torção;
- Comparar os resultados obtidos com métodos analíticos alternativos propostos por Collins e Mitchell (1980) e Zia e Hsu (2004), recomendados pela norma canadense CSA A23.3:2014 e pela norma americana ACI 318:2019, respectivamente, para o dimensionamento ao cisalhamento devido a forças cortantes e torção;
- Comparar os resultados obtidos para o dimensionamento da aba lateral com os métodos analíticos recomendados pelo manual de dimensionamento do BCA (2001) / BS 8110-1:1997, manual de dimensionamento do PCI (2010) e Notas do PCA (2013)

## 1.2 JUSTIFICATIVA

As vigas de seção “L” estão entre os elementos mais utilizados pela indústria do concreto pré-moldado, como pode ser visto em Van Acker (2003) e El Debs (2017). A complexidade na análise e dimensionamento destes elementos e as diferentes abordagens existentes na literatura internacional, tanto para o dimensionamento da aba lateral quanto para o dimensionamento da seção ao cisalhamento devido a forças cortantes e torção faz com que sejam necessários estudos que contribuam para a utilização segura deste modelo de seção transversal.

Apesar da complexidade na análise e no dimensionamento das vigas de seção “L” devido a fatores já mencionados, as normas brasileiras de estruturas de concreto e estruturas de

concreto pré-moldado, ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 9062:2017, diferentemente das normas e manuais de dimensionamento internacionais, não tratam e nem recomendam processos, verificações ou métodos alternativos específicos para o dimensionamento deste tipo de seção transversal. O projetista fica, portanto, limitado à utilização dos métodos analíticos convencionais para o dimensionamento da seção transversal à flexão e ao cisalhamento devido a forças cortantes e torção e acaba tendo que optar por algum modelo de dimensionamento da aba lateral que pode não refletir o comportamento real dessa região descontínua.

Nesse contexto, surge a possibilidade da utilização do Método das Bielas que é demonstrado por Marti (1985) como uma boa alternativa para o dimensionamento completo de vigas de seção “L”, pois abrange todas as etapas do processo de cálculo. Além disso, a utilização do método é vista como uma forma racional de abordar o problema pois permite ao projetista um maior domínio sobre o caminhamento das tensões, e também a possibilidade de tratar um problema que é essencialmente tridimensional em modelos planos equivalentes.

A norma canadense que aborda o dimensionamento de estruturas de concreto, CSA A23.3:2014, aponta que o Método das Bielas deve ser utilizado no dimensionamento ao cisalhamento por forças cortantes e torção em regiões onde há descontinuidades e pode ser utilizado ainda como um método alternativo para regiões sem descontinuidades, ficando evidente a potência e o reconhecimento que o método possui internacionalmente.

Um outro fator que justifica a realização deste trabalho é o surgimento de ferramentas computacionais para análise e verificação de elementos de concreto através do Método das Bielas, que tem viabilizado ainda mais o uso do método, visto que, todo o processo de obtenção dos esforços e verificações dos elementos e regiões nodais é feito de maneira automatizada.

Sendo assim, é oportuno um estudo que contemple a aplicação do Método das Bielas na análise e dimensionamento de vigas de seção “L”, principalmente com o objetivo de se apresentar uma solução alternativa para o dimensionamento à flexão e ao cisalhamento por forças cortantes e torção que seja capaz de atender às recomendações da ABNT NBR 6118:2014. Este fato, aliado à possibilidade de se avaliar a viabilidade e a segurança da utilização do Método das Bielas através da comparação com outros métodos analíticos reconhecidos e extensamente utilizados com sucesso reforçam ainda mais a justificativa para realização desta pesquisa.

## 2 VIGAS DE SEÇÃO “L” DE CONCRETO PRÉ-MOLDADO

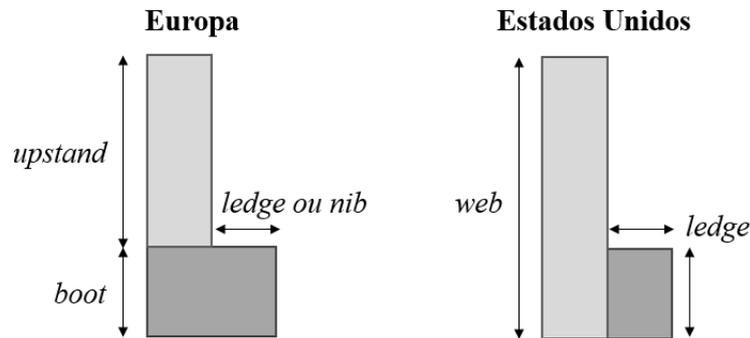
### 2.1 TIPOLOGIAS E DIMENSÕES TÍPICAS

As vigas pré-moldadas de seção “L”, também conhecidas como “*Ledger beams*”, “*L-shaped beams*” ou ainda “*Spandrel beams*” são elementos externos, localizados geralmente no perímetro das edificações e que se caracterizam principalmente pela excentricidade dos carregamentos provenientes das lajes. Pelo fato das ações advindas das lajes não coincidirem com o eixo da seção transversal, haverá o surgimento de um momento torsor de equilíbrio que necessariamente deverá ser computado no dimensionamento e restringido pelos apoios, caso a ligação da viga com a laje seja flexibilizada.

Segundo Elliott e Jolly (2013), caso a ligação viga-laje seja monolítica e a rigidez lateral da viga seja suficiente para evitar deflexões horizontais excessivas, nem sempre as vigas de seção “L” necessitarão de armaduras resistentes à torção. Entretanto, é importante salientar que a torção só poderá ser desprezada após a conclusão da ligação entre a laje e a viga, especialmente se a carga do piso for grande, como é o caso de vigas que apoiam lajes duplo “T” com grandes vãos. Desse modo, se esses elementos não forem escorados até que a ligação esteja completa, mesmo existindo uma ligação rígida entre a laje e a viga, em algum instante a torção deverá ser computada no cálculo das vigas de seção “L”.

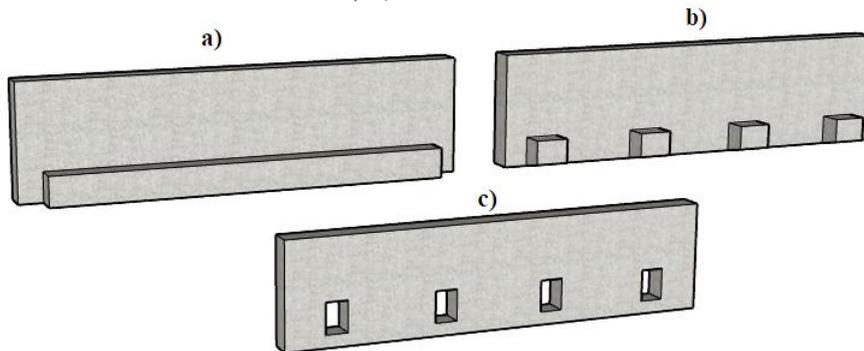
As diversas combinações possíveis relacionadas ao tipo de apoio para laje e as dimensões das partes que compõem as vigas de seção “L” de concreto pré-moldado fazem com que este tipo de seção se adeque a necessidade do projetista e proporcione uma gama de diferentes modelos e soluções estruturais para um determinado problema.

As vigas de seção “L” são compostas pela união de elementos com formato retangular. A divisão e a nomenclatura destes elementos podem variar de acordo com a localidade de utilização. Na Europa, por exemplo, a literatura normalmente se refere a região retangular inferior que compreende a região da aba lateral pelo nome de “*boot*” e a região da borda em si como “*ledge*” ou “*nib*”. O retângulo superior, que compreende o peitoril da seção, é tratado como “*upstand*”. Já nos Estados Unidos a literatura aborda a nomenclatura da aba lateral somente como “*ledge*”, não existindo essa região chamada de “*boot*” pelos europeus. O restante da seção é tratado como a alma da seção transversal e recebe a nomenclatura “*web*”. A Figura 2.1 ilustra a nomenclatura adotada pela literatura europeia e norte americana.

**Figura 2.1 - Nomenclatura das regiões da viga de seção "L"**

Fonte: Autor (2020)

Em relação aos tipos de abas laterais que apoiam as lajes nas vigas de seção "L", observa-se na literatura três soluções diferentes. A primeira solução é composta por abas laterais contínuas e apresenta-se como a solução mais versátil pois é capaz de apoiar tanto lajes alveolares quanto lajes duplo "T" (Figura 2.2a). A segunda solução é feita por consolos individuais engastados na base da viga (Figura 2.2b). Esta solução segundo Mercan (2011) é utilizada para vigas com vãos mais longos, da ordem de 15 a 18 metros e estão restritas ao uso de lajes duplo "T". A terceira solução é através de aberturas na alma da seção, com o objetivo de diminuir a excentricidade de aplicação da carga. Esta solução também está restrita ao uso de lajes duplo "T" (Figura 2.2c).

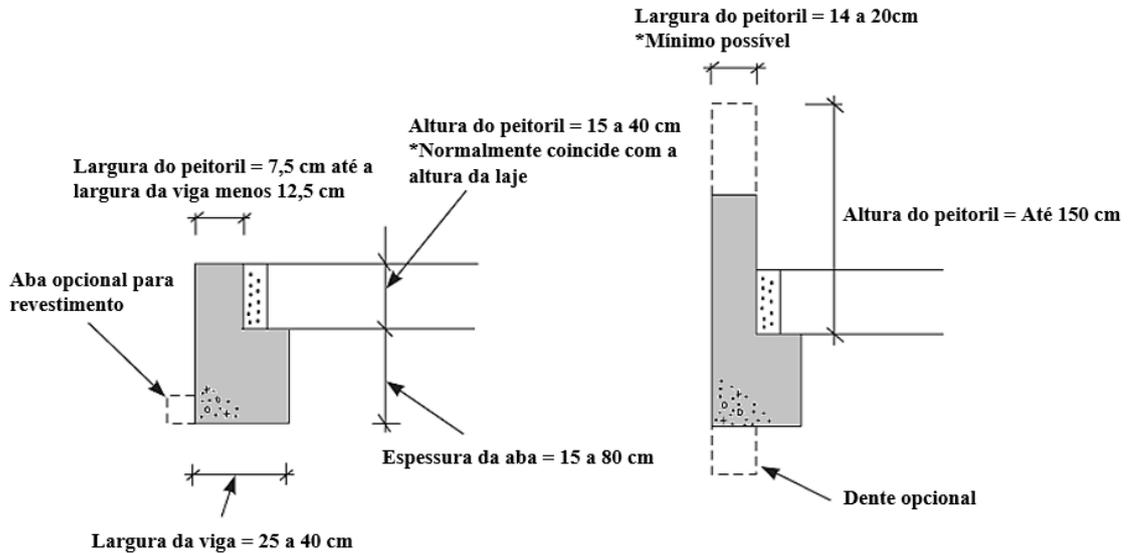
**Figura 2.2 - Tipologias de vigas de seção "L": a) Abas laterais contínuas; b) Consolos individuais; c) Aberturas na alma.**

Fonte: Adaptado de Mercan (2011)

Em relação às dimensões da seção transversal, Elliott (2017) diferencia as vigas de seção "L" pela geometria e pela condição de ligação com a laje baseando-se principalmente na altura e largura do peitoril (Figura 2.3). As vigas com peitoril baixo, normalmente igual a altura da laje, são projetadas dessa forma para tenham a possibilidade de serem ligadas monoliticamente às lajes alveolares, através do preenchimento de alvéolos intermediários com concretagem *in*

*situ*. Já as vigas com peitoril alto e delgado (“*slender L-shaped spandrel beams*”), normalmente apoiam lajes duplo “T” e não possuem ligações monolíticas com a laje, sendo frequentemente utilizadas no perímetro de edifícios garagem por servirem como barreira para os veículos.

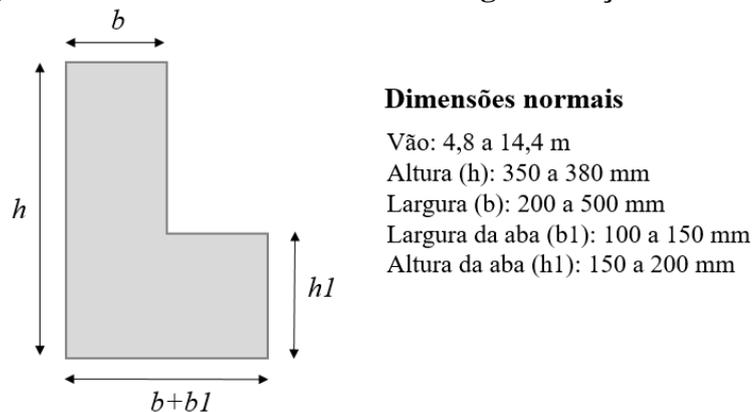
**Figura 2.3 - Recomendações de Elliot (2017) para as dimensões de vigas de seção “L”**



Fonte: Adaptado de Elliott (2017)

Segundo Van Acker (2003), as dimensões das vigas de seção “L” normalmente variam entre os valores apresentados na Figura 2.4. Ainda de acordo com o autor, as vigas de seção “L” e seção “T” invertido são capazes de acomodar mudanças de nível no piso através da construção de abas laterais. Nos casos em que a diferença de nível exceda aproximadamente 750 mm, a solução pode ser tomada empregando-se duas vigas de seção “L” com os lados retos faceando (uma de costas para outra) e separadas por uma pequena folga entre si.

**Figura 2.4 - Dimensões normais das vigas de seção "L"**



**Dimensões normais**

Vão: 4,8 a 14,4 m  
 Altura (h): 350 a 380 mm  
 Largura (b): 200 a 500 mm  
 Largura da aba ( $b_1$ ): 100 a 150 mm  
 Altura da aba ( $h_1$ ): 150 a 200 mm

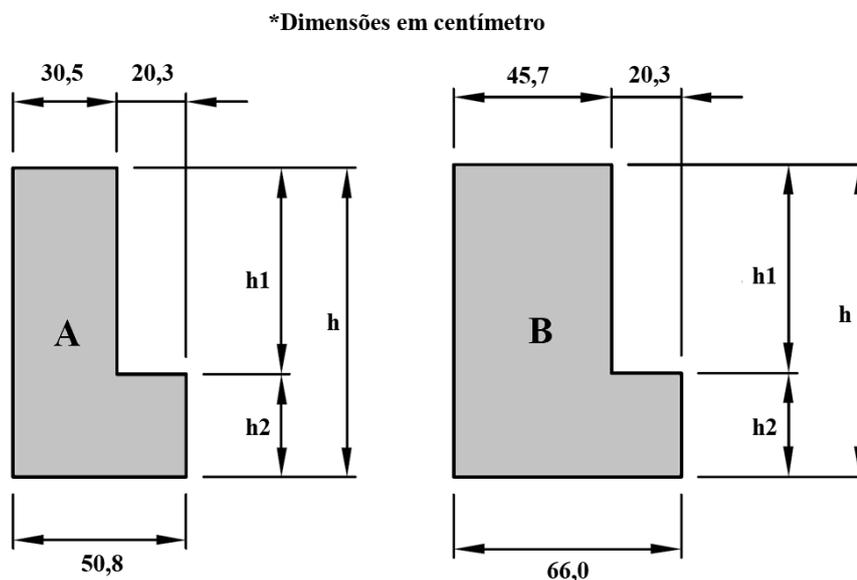
Fonte: Adaptado de Van Acker (2003)

A sétima edição do Manual de Dimensionamento do PCI – *Precast / Prestressed Concrete Institute* (2010) apresenta em seu texto duas tabelas com diversas seções transversais “L” protendidas pré-definidas. De acordo com o manual, as seções apresentadas nas tabelas são as mais utilizadas pela indústria, podendo haver uma ligeira variação entre os fabricantes. As variações são usualmente pequenas e podem, segundo o manual, ser usadas como parâmetro para o pré-dimensionamento da seção.

As tabelas abordam para cada seção transversal, as propriedades geométricas, as propriedades do concreto e do aço, o número de cordoalhas utilizadas na protensão, a distância do centro de gravidade das cordoalhas à fibra inferior, a capacidade resistente da seção (carregamento linear em função do vão livre) e as deformações estimadas para a fase de içamento e ao longo do tempo.

São apresentados um total de 22 seções transversais que variam em termos da altura da alma ( $h$ ) e da relação entre a altura do peitoril ( $h_1$ ) e a altura da aba lateral ( $h_2$ ). Todas as outras dimensões se mantêm fixas, conforme ilustra a Figura 2.5.

**Figura 2.5 - Modelos de vigas de seção "L" abordadas pelo PCI (2010)**



Fonte: Adaptado do manual de dimensionamento do PCI (2010)

As Tabelas 1 e 2 apresentam as propriedades geométricas das seções transversais A e B respectivamente. Além das dimensões indicadas na Figura 2.5, são apresentados para cada seção transversal os seguintes parâmetros:  $A$  = Área;  $I$  = Momento de Inércia;  $Y_b$  = Distância do centro de gravidade à fibra mais distante na base da seção;  $S_b$  = Módulo de flexão com relação à fibra mais distante na base da seção;  $S_t$  = Módulo de flexão com relação à fibra mais

distante no topo da seção; Pp = Peso próprio da seção transversal. O concreto adotado para o cálculo do peso próprio da seção é de peso normal com densidade igual a 150 lb/ft ou aproximadamente 24 kN/m<sup>3</sup>.

Os vãos considerados para determinação da capacidade resistente e das deformações variam de 4,88 a 15,25 metros. A capacidade resistente e as deformações estimadas para cada seção podem ser vistas no Capítulo 3 do Manual do PCI (2010) e não serão apresentadas aqui por brevidade.

**Tabela 1 - Propriedade geométricas da seção transversal A**

Designação	h (cm)	h1 (cm)	h2 (cm)	A (cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	Yb (cm)	Sb (cm <sup>3</sup> )	St (cm <sup>3</sup> )	Pp (kN/m)
20LB20	50,8	30,5	20,3	1961,3	422891	22,2	19058	14781	4,63
20LB24	61,0	30,5	30,5	2477,4	731235	26,7	27416	21320	5,84
20LB28	71,1	40,6	30,5	2787,1	1160578	31,0	37395	28956	6,57
20LB32	81,3	50,8	30,5	3096,8	1731523	35,6	48686	37871	7,30
20LB36	91,4	61,0	30,5	3406,4	2460719	40,2	61238	48014	8,03
20LB40	101,6	61,0	40,6	3922,6	3383212	44,4	76249	59125	9,24
20LB44	111,8	71,1	40,6	4232,2	4499753	48,9	91931	71644	9,97
20LB48	121,9	81,3	40,6	4541,9	5832776	53,6	108892	85344	10,70
20LB52	132,1	91,4	40,6	4851,6	7398597	58,3	126983	100240	11,43
20LB56	142,2	101,6	40,6	5161,3	9213491	63,0	146271	116266	12,16
20LB60	152,4	111,8	40,6	5471,0	11293691	67,8	166656	133440	12,89

Fonte: Adaptado do manual de dimensionamento do PCI (2010)

**Tabela 2 - Propriedades geométricas da seção transversal B**

Designação	h (cm)	h1 (cm)	h2 (cm)	A (cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	Yb (cm)	Sb (cm <sup>3</sup> )	St (cm <sup>3</sup> )	Pp (kN/m)
26LB20	50,8	30,5	20,3	2735,5	595128	23,1	25777	21483	6,45
26LB24	61,0	30,5	30,5	3406,4	1028758	27,7	37117	30939	8,03
26LB28	71,1	40,6	30,5	3871,0	1633334	32,3	50554	42082	9,12
26LB32	81,3	50,8	30,5	4335,5	2436327	37,0	65827	55028	10,22
26LB36	91,4	61,0	30,5	4800,0	3462047	41,8	82853	69727	11,31
26LB40	101,6	61,0	40,6	5471,0	4760897	46,2	53881	3998	12,89
26LB44	111,8	71,1	40,6	5935,5	6331046	50,9	9603	104074	13,98
26LB48	121,9	81,3	40,6	6400,0	8206377	55,7	147254	123985	15,08
26LB52	132,1	91,4	40,6	6864,5	10411030	9,7	171999	145501	16,17
26LB56	142,2	101,6	40,6	7329,0	12969188	65,4	198283	168787	17,26
26LB60	152,4	111,8	40,6	7793,5	15904952	70,3	226305	193679	18,36

Fonte: Adaptado do manual de dimensionamento do PCI (2010)

Analisando as tabelas de pré-dimensionamento fornecidas pelo PCI (2010), percebe-se que a relação entre a altura e a espessura da alma ( $h/b_w$ ) variam entre valores que vão de 1,66 a 5,04 na Tabela 1 e entre valores que vão de 1,11 a 3,33 na Tabela 2. Essa relação é importante pois é tida pelo ACI 318:2019 como um balizador para que sejam permitidos o dimensionamento de seções de concreto à torção através de métodos analíticos alternativos ao modelo tradicional de treliça espacial. Esses métodos alternativos são recomendados pelo ACI 318:2019 para o dimensionamento principalmente de vigas de seção “L” pelo sólido amparo experimental que estes métodos possuem.

Segundo Raths (1984) as dimensões da seção transversal das vigas de peitoril alto destinadas normalmente a edifícios garagem devem respeitar as seguintes características:

- A alma da seção deve ter uma espessura maior ou igual 25,4 cm (10 in.) e nunca menor que 20,3 cm (8 in.);
- A projeção horizontal da aba lateral não deve ser inferior a 15,2 cm (6 in.);
- A altura da aba lateral não deve ser inferior a 25,4 cm (10 in.) e para vigas que suportem cargas concentradas elevadas, a recomendação é para que a altura da aba lateral seja maior ou igual a 35,6 cm (14 in.);
- As dimensões da seção transversal final a ser utilizada, deve ser definida de modo que não haja congestionamento no arranjo das armaduras assegurando que a viga seja executável em canteiro.

Recente pesquisa feita por Pastore (2015) aponta recomendações de projeto para as dimensões de vigas de seção “L” de peitoril alto e delgado. Os valores recomendados são baseados em valores típicos utilizados pelos mercados americano e europeu:

- Vão livre (distância entre apoios): 6 a 20 metros;
- Espessura da alma: 15 a 30 cm, podendo variar conforme as exigências de cada caso;
- Largura da aba lateral (projetada para fora da face da alma): 15 a 20 cm;
- Altura total da viga: 100 a 250 cm;
- Altura da aba lateral: 20 a 60 cm.

É evidente o grande número de possibilidade existentes para determinação da seção transversal das vigas de seção “L” de concreto pré-moldado. A determinação da melhor seção a ser utilizada no projeto final dependerá essencialmente da utilização prevista para a estrutura

e dos níveis de carregamentos considerados. Vale ressaltar que as dimensões deverão atender ainda todas as situações transitórias previstas no processo de produção e montagem, além das exigências de durabilidade e resistência contra a ação do fogo previstos por norma.

## 2.2 FORÇAS ATUANTES

De acordo com Raths (1984) as forças a serem consideradas na análise e dimensionamento das vigas de seção “L” são predominantemente forças devido a cargas gravitacionais permanentes e acidentais (viga e laje), forças devido à variação no volume dos elementos, forças resultantes do efeito de pórtico e forças provocadas pelo impacto de veículos (excepcionais), caso específico de vigas destinadas a edifícios garagem.

As forças atuantes serão tratadas neste trabalho considerando que a estrutura de concreto pré-moldado esteja na posição final de utilização, muito embora seja necessário considerar também as forças atuantes nas fases transitórias, pois em determinados casos, o dimensionamento para as situações transitórias pode prevalecer frente a estrutura na posição final.

### 2.2.1 Forças Verticais

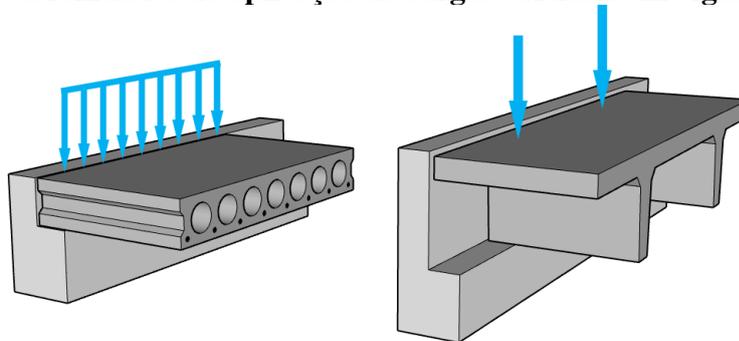
As forças verticais atuantes nas vigas de seção “L” geralmente são provenientes de cargas de natureza gravitacional, sendo compostas por parcelas relativas às cargas permanentes e parcelas relativas às cargas acidentais. O processo de obtenção das cargas permanentes e acidentais é semelhante a qualquer outro processo de obtenção, variando somente o modo como as cargas são aplicadas nas vigas de seção “L”.

As cargas permanentes são compostas normalmente pelo peso próprio da viga, peso próprio das lajes e peso próprio do capeamento de concreto, quando houver. Há também a possibilidade de atuação de outras cargas gravitacionais permanentes que por ventura estejam inseridas no sistema, como elementos construtivos fixos e cargas de instalações permanentes. As cargas acidentais devem respeitar os valores mínimos preconizados pela ABNT NBR 6120:2019, variando conforme a utilização destinada para a estrutura.

As forças verticais podem atuar de forma linearmente distribuídas, quando as vigas são destinadas ao apoio de lajes alveolares, ou de forma concentrada, quando são destinadas ao apoio de lajes duplo “T” por exemplo, conforme ilustra a Figura 2.6. Em ambos os casos, as

forças verticais são aplicadas excentricamente ao centro de cisalhamento da seção transversal e produzirão uma situação combinada de momentos fletores, torsões e forças cortantes no elemento.

**Figura 2.6 – Possibilidades de aplicação de cargas verticais em vigas de seção "L"**

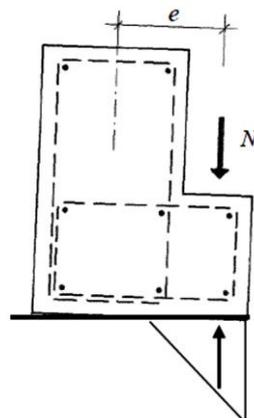


Fonte: Autor (2020)

Outros pontos de surgimento de forças verticais são nas zonas de apoio das vigas. As forças gravitacionais sempre produzirão reações nos apoios com sentido oposto ao de aplicação das cargas gravitacionais. Estes valores de reação são usados no dimensionamento do consolo e dos aparelhos de apoio responsáveis por transmitir os esforços da viga ao pilar.

Segundo Raths (1984), a análise do posicionamento das forças verticais nos apoios é muito importante. Para os casos em que a excentricidade entre a reação de apoio e o eixo da viga for maior que a excentricidade entre as cargas aplicadas, não são necessárias ligações para resistir ao momento torsor solicitante e manter a viga em equilíbrio (Figura 2.7). Nestas situações, o momento produzido pela reação de apoio será superior ao momento torsor solicitante gerado pela aplicação do carregamento excêntrico, logo a viga se manterá estável.

**Figura 2.7 - Reação vertical responsável pelo equilíbrio da viga**



Fonte: FIB (2008)

Segundo Van Acker (2003), sob o ponto de vista executivo, a condição apresentada na (Figura 2.7) não é a melhor solução uma vez que para executar esse tipo de apoio é necessário fazer recortes nos elementos de laje ao redor de todos os pilares de modo a compensar o posicionamento da viga sobre o apoio.

### **2.2.2 Forças Horizontais**

Segundo Raths (1984), caso as vigas de seção “L” sejam destinadas a edifícios garagem, deve-se necessariamente prever a ação de forças horizontais provocadas pela colisão de veículos, uma vez que o peitoril das vigas funcionará como barreira de proteção contra possíveis acidentes.

As forças horizontais resultantes desta ação poderão ser aplicadas em qualquer ponto do comprimento longitudinal da viga. Mesmo as vigas ou barreiras que não sejam dimensionadas para suportar carregamentos verticais estarão sujeitas a aplicação acidental destas forças horizontais.

A ABNT NBR 6120:2019 apresenta no item 6.6 orientações para estruturas de edificações sujeitas ao tráfego de veículos. Para o projeto de garagens em especial, os elementos estruturais do pavimento devem ser verificados para atuação isolada de cargas concentradas definidas de acordo com a categoria dos veículos, conforme ilustra a Tabela 13 da referida norma. As forças horizontais são apresentadas nas colunas 6 e 7 e para determinação das combinações de cálculo estas deverão ser consideradas como excepcionais conforme recomendações da ABNT NBR 8681:2004. Alternativamente, podem ser previstas barreiras que resistam aos mesmos valores de forças horizontais.

### **2.2.3 Forças por Restrição de Movimentos**

De acordo com Raths (1984) também devem ser computados na análise das vigas de seção “L” as forças oriundas da restrição de movimentos. Essas forças podem surgir por restrições à variação volumétrica do elemento ou pelo efeito de pórtico.

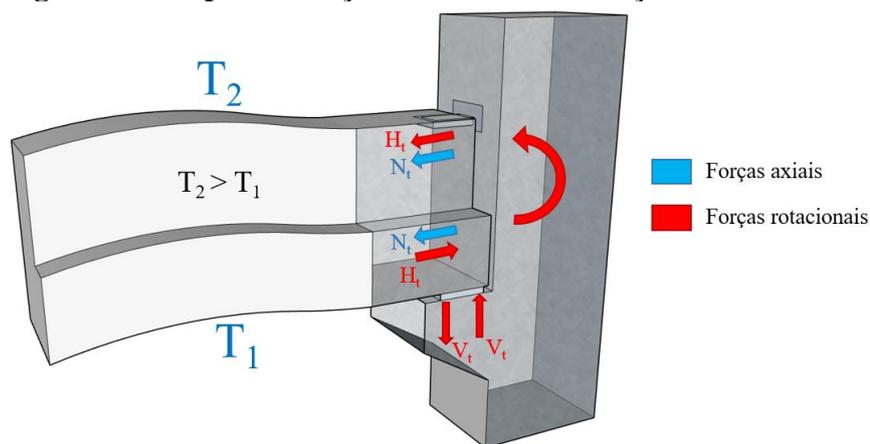
As forças oriundas das restrições à variação volumétrica são provocadas pelo impedimento dos deslocamentos no elemento. Estes deslocamentos são causados pelos efeitos de retração, fluência e principalmente por mudanças de temperatura, uma vez que as vigas de

seção “L”, por serem elementos utilizados nas bordas da edificação, ficam constantemente expostas a irregularidade climáticas.

Segundo Raths (1984) as forças por variação volumétrica podem ser axiais ou rotacionais (Figura 2.8). As forças axiais geralmente produzem tensões cuja intensidade depende da magnitude da rigidez na ligação que restringe tal variação. Ligações soldadas no topo e na base, por exemplo, podem produzir forças axiais elevadas quando comparadas com ligações flexibilizadas pelo uso de almofadas de apoio. Além disso, as forças axiais devido a variação volumétrica podem ser preponderantes no dimensionamento das ligações com os apoios.

As forças rotacionais normalmente são produzidas pela exposição solar. Nestas situações, a diferença de temperatura entre a base e o topo da viga podem gerar momentos fletores positivos na extremidade da viga. Este momento é oriundo de uma combinação de binários verticais e horizontais provocados pela restrição aos deslocamentos na ligação. De maneira geral, estes binários podem ser desconsiderados pois, na realidade, diversos fatores fazem com que os binários tenham uma intensidade pequena. Dentre estes fatores pode-se destacar: as pequenas deformações presentes na ligação e que reduzem a restrição a rotação; as restrições à expansão da viga reduzem o binário de forças horizontais; as restrições ao efeito de retração e fluência produzem rotações contrárias às rotações provocadas pela diferença de temperatura.

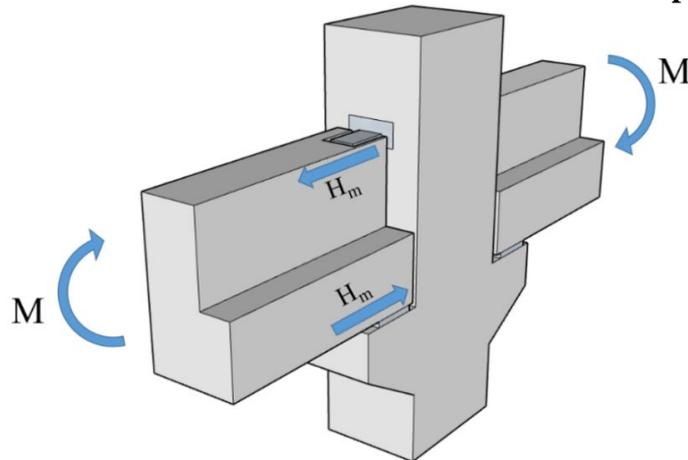
**Figura 2.8 - Tipos de forças oriundas de variações volumétricas**



Fonte: Adaptado de Raths (1984)

As vigas de seção “L”, embora não seja uma situação comum, podem servir como elementos que compõem pórticos resistentes às ações laterais conforme ilustra a Figura 2.9.

**Figura 2.9 - Binário horizontal resultante do efeito de pórtico**



Fonte: Adaptado de Raths (1984)

Nestes casos, a rigidez das ligações nas extremidades do elemento é usada para o desenvolvimento de binários horizontais que podem variar em termos de magnitude e direção a depender da configuração deformada do pórtico, deslocamento e tipo da ação lateral.

### 2.3 LIGAÇÕES

A principal função das ligações é a de fazer a interligação de forma racional entre os elementos de concreto pré-moldado para compor um sistema estrutural capaz de resistir a todos os esforços solicitantes. Ligações típicas e padronizadas são apresentadas em manuais e catálogos de fabricantes, todavia, o projeto de ligações não é apenas uma questão de escolher um tipo de ligação apropriado, mas sim uma questão de tratar a ligação como um todo, incluindo as juntas, materiais para preenchimento, detalhamento das interfaces e das zonas de extremidades (VAN ACKER, 2003).

De acordo com El Debs (2017), as ligações são as partes mais importantes no projeto das estruturas de concreto pré-moldado. Elas são de fundamental importância para a produção da estrutura, para o comportamento e ainda para a manutenção da estrutura finalizada.

O comportamento das vigas de seção “L” é governado tanto pelas ligações entre laje e a viga como pelas ligações entre a viga e os apoios. O nível de rigidez obtido entre a ligação das lajes com as vigas definirá o nível de torção a ser transmitido para as vigas, bem como a capacidade resistente necessária às ligações com os apoios.

Como forma de compreensão geral do comportamento das vigas de seção “L” de concreto pré-moldado, serão apresentados os principais conceitos a respeito das ligações entre a viga e a laje e a viga e os apoios.

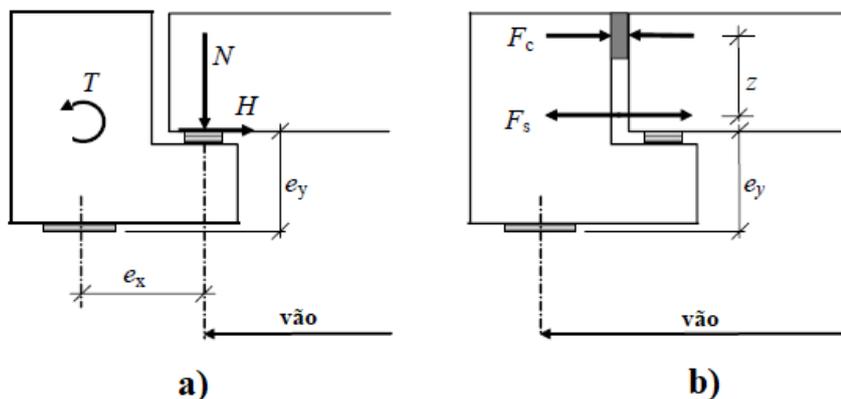
### 2.3.1 Ligações com as Lajes

De acordo com o Manual da FIB (2008), existem duas abordagens fundamentais para considerar a ligação entre as lajes e as vigas de seção “L”. Em ambos os casos o objetivo é evitar um comportamento complexo, aplicando condições simplificadas de suporte.

A primeira abordagem é aquela em que a laje é simplesmente apoiada nas vigas. Nestas situações, a torção resultante do carregamento excêntrico deve ser resistida pela viga e levada até os apoios que também devem ser resistentes à torção. Esta é uma abordagem mais simples e será o foco deste trabalho. Neste caso nenhuma armadura em especial é necessária na ligação entre a laje e a viga (Figura 2.10a).

Na segunda abordagem (Figura 2.10b) a laje é ligada à viga por meio de armadura complementar, logo, a viga é considerada como uma parte integrante da laje. Isto significa que o vão efetivo da laje será maior que na situação anterior e o mecanismo resistente à carga excêntrica deve ser promovido pela ligação entre a viga e a laje. Nestas situações não há necessidade que as ligações entre a viga e os apoios sejam resistentes à torção, entretanto, vale ressaltar que nas fases transitórias, quando a ligação ainda não está finalizada, é necessário adotar dispositivos complementares que impeçam possíveis situações de tombamento da viga, seja pela adoção de ligações temporárias ou por meio da utilização de escoramento.

**Figura 2.10 - Abordagens para ligação entre laje e viga de seção "L". a) laje simplesmente apoiada na viga; b) laje ligada à viga por meio de mecanismos complementares**

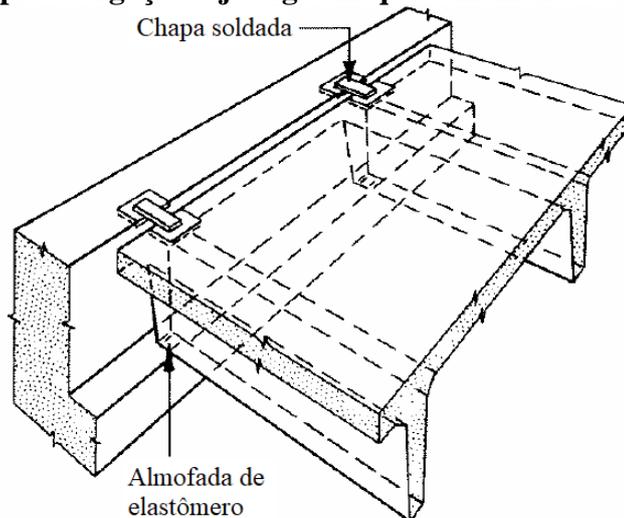


Fonte: Adaptado de FIB (2008)

O manual de ligações para estruturas pré-moldadas da FIB (2008) destaca que nos casos em que a laje é simplesmente apoiada na aba lateral da viga, a viga fica em situação livre para rotacionar em torno do seu eixo, ou seja, isto significa que o problema do dimensionamento da ligação viga-pilar à torção pode ser resolvido através de um cálculo simples de torção de equilíbrio, uma vez que o conjunto é estaticamente determinado. Caso a rotação da viga seja parcialmente restringida, como apresentado na segunda abordagem, o problema se torna mais complexo, sendo necessário uma análise mais avançada. Este problema é estaticamente indeterminado uma vez que o momento torsor atuante dependerá da rigidez de interação entre a laje e a viga.

Um exemplo típico de ligação viga-laje em que ocorre a primeira situação mostrada na Figura 2.10 são os casos em que as lajes duplo “T” se apoiam nas vigas de seção “L” e são conectadas com as vigas simplesmente através de soldagem na parte superior conforme ilustra a Figura 2.11.

**Figura 2.11 - Exemplo de ligação laje-viga em que o momento torsor não é restringido**



Fonte: Adaptado de FIB (2008)

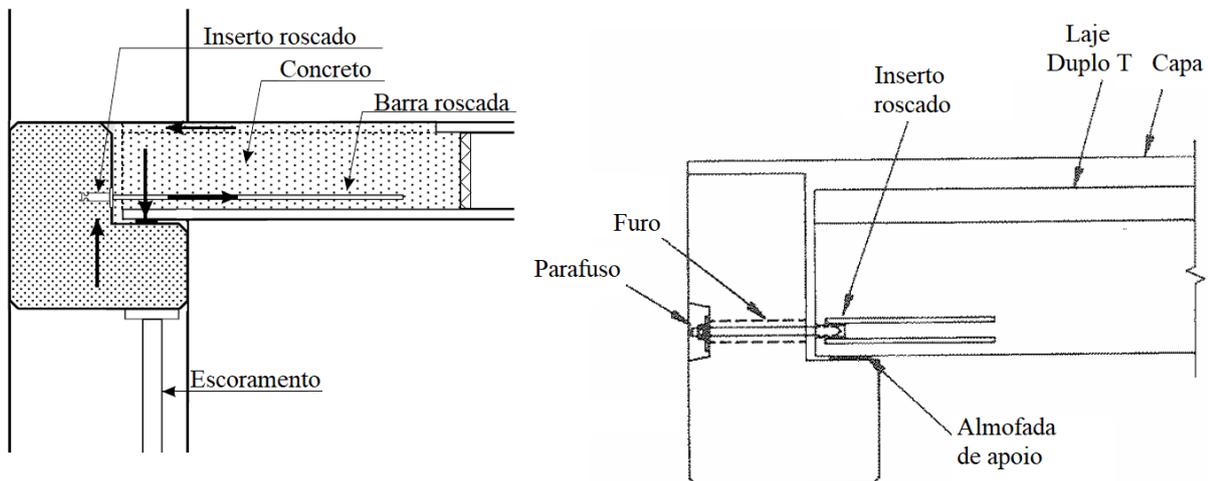
Um estudo experimental e numérico realizado por Klein (1986), mostra que nessas situações, a ligação viga-laje não é capaz de restringir substancialmente o momento torsor provocado pelo carregamento excêntrico, entretanto, a conexão é capaz de restringir parte da deformação lateral da viga.

Klein (1986) também ressalta que, inicialmente, antes das ligações entre as lajes duplo “T” com o topo das vigas de seção “L” estarem finalizadas, a torção pode ser computada como o produto entre a carga vertical aplicada na aba lateral e a excentricidade entre a carga e a linha

central da alma da seção. Depois que as ligações estiverem finalizadas, a torção provocada pela carga vertical pode ser neutralizada por um binário de forças horizontais devido ao atrito entre a laje duplo “T” e o aparelho de apoio e a ligação entre a laje duplo “T” e o topo da viga. Entretanto, grande parte dos projetistas acreditam que seja inapropriado contar com o aparelho de apoio para essa função.

Para as ligações viga-laje que apresentam rigidez na conexão, o Manual da FIB (2008) apresenta modelos aplicáveis em lajes alveolares e lajes duplo “T”, conforme ilustra a Figura 2.12. A rigidez na ligação é promovida pela conexão da parte inferior e superior entre a laje e a viga, que deve ser dimensionada para resistir a tração e a compressão necessária ao binário resistente.

**Figura 2.12 - Ligações viga-laje capazes de restringir a torção (alveolar e duplo “T”)**



Fonte: Adaptado de FIB (2008)

Nos casos em que a ligação seja realizada entre a viga de seção “L” e laje alveolar, é necessário que se faça a ancoragem dos tirantes na alma da viga através de dispositivos adequados de ancoragem. A ancoragem na laje alveolar é feita através do posicionamento de tirantes no interior dos alvéolos para posterior concretagem e solidarização com a viga.

Um programa experimental conduzido por Elliott, Davies e Adlparvar (2013) apontou que existem dois fatores que contribuem para eliminação momentos torsores nas vigas para os casos de ligação monolítica com as lajes alveolares. O primeiro fator são as reações horizontais promovidas pelas lajes que são capazes de gerar forças suficientes para sustentação da viga. O segundo fator é a diminuição na excentricidade da força devido à concretagem *in loco*. Esta

característica da ligação faz com que as forças de cisalhamento sejam transportadas para além da extremidade da laje alveolar.

Para as lajes duplo “T”, o Manual da FIB (2008) indica que a conexão pode ser realizada na parte inferior da nervura através de insertos metálicos roscados para que sejam aparafusados posteriormente. É necessário também que nas fases transitórias à finalização da ligação, sejam criados dispositivos que suportem a torção de equilíbrio nas vigas. Esses dispositivos podem ser ligações viga-pilar provisórias ou escoramento. Este requisito é reforçado pela ABNT NBR 9062:2017, no item 11.1 e), que recomenda que sejam previstos dispositivos de segurança ou escoramento contra a torção nas vigas em situações de montagem, para evitar seu girou e tombamento, entretanto, não apresenta quais são esses dispositivos e nem como dimensioná-los.

### **2.3.2 Ligações com os Apoios**

As vigas de seção “L” que possuem ligações flexibilizadas com as lajes estão submetidas à flexão, ao cisalhamento por cortante e principalmente ao cisalhamento por um momento torsor que necessariamente deve ser resistido pelos apoios para que a estabilidade da viga seja garantida. A intensidade desse momento torsor gerado pela aplicação do carregamento na aba lateral da viga é o que difere o comportamento deste tipo de ligação quando comparada às vigas de seção retangular convencional por exemplo.

Com relação aos tipos de transferência de forças nas ligações, o Manual da FIB (2008) faz menção à torção da seguinte forma:

A capacidade resistente a torção é necessária nas ligações com os apoios de vigas simplesmente apoiadas e carregadas excêntrica em relação ao centro de cisalhamento. Pode-se tomar como exemplo as vigas de seção “L” usadas em pavimentos pré-moldados.

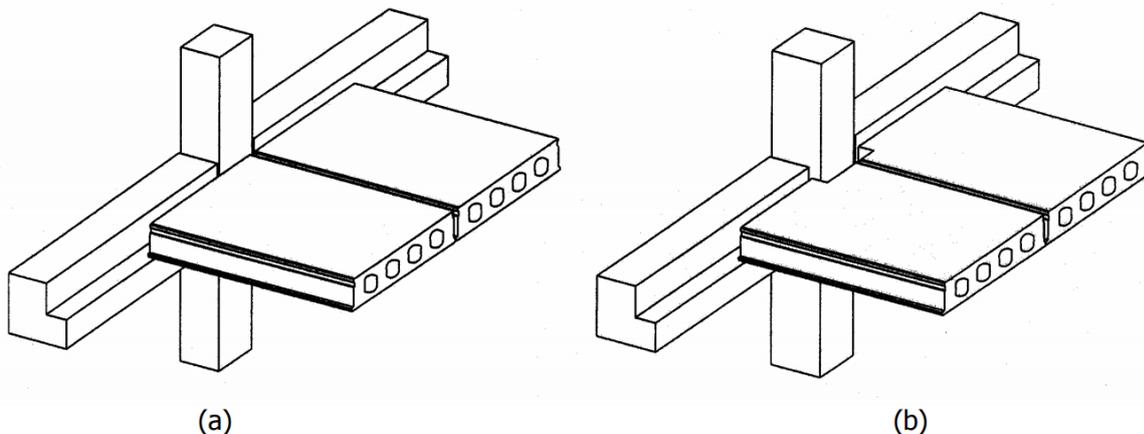
Segundo Van Acker (2003) de maneira semelhante aos momentos fletores, a torção pode ser transferida aos apoios pela ação de um binário de tração e compressão. Entre as maneiras possíveis para a obtenção deste binário estão as ligações por meio de chumbadores e chapas de aço soldadas.

Uma outra possibilidade para a ligação com os apoios é através de insertos metálicos roscados posicionados na alma da seção. Este modelo de ligação, resistente à torção, introduz

um binário de reações horizontais nos apoios. A utilização dos insertos metálicos se mostrou eficiente tanto para vigas de seção “L” compactas como para vigas de seção “L” com peitoril alto e delgado como pode ser visto em Hariharan (2019).

Com relação ao posicionamento das vigas sobre o consolo, Van Acker (2003) apresenta dois modelos para as vigas de seção “L” destinadas ao apoio de pisos. O primeiro é quando a largura da alma das vigas tem a mesma largura dos pilares (Figura 2.13a) e o outro quando as vigas possuem a largura da alma menor que a largura do pilar (Figura 2.13b).

**Figura 2.13 - Soluções variantes para a largura das vigas para apoio de piso**



Fonte: Van Acker (2003)

O primeiro caso, segundo Van Acker (2003), é o mais recomendado pois não há a necessidade de se fazer recortes nos elementos de laje ao redor dos pilares para compensar o recesso causado pela largura menor da viga. Neste caso, as lajes simplesmente fazem as vigas e o pilar junto aos seus apoios.

Como alternativas ao dimensionamento das ligações de vigas de seção “L” com os apoios, serão tratados neste trabalho as ligações com chumbadores e com chapas de aço soldadas por serem tipologias bastante difundidas no Brasil.

### 2.3.2.1 Ligação com Chumbadores

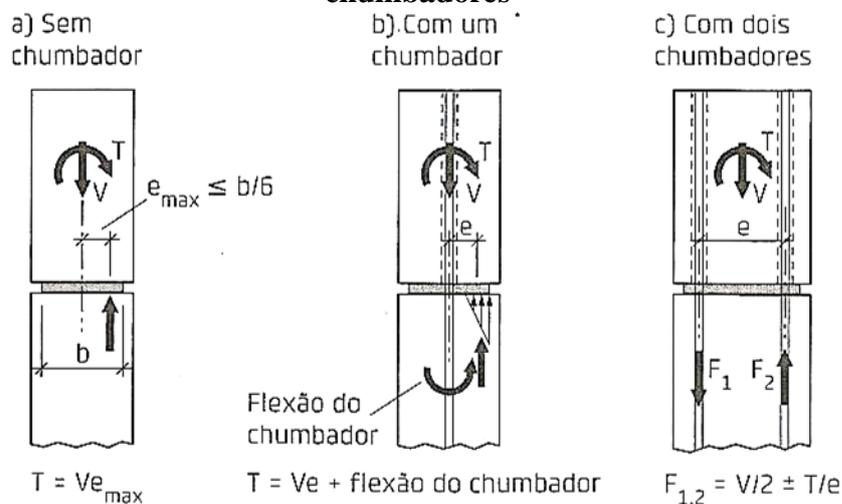
De acordo com El Debs (2017), a ligação viga-pilar por meio de almofadas de apoio e chumbadores é de uso intensivo nas estruturas de concreto pré-moldado no Brasil e no exterior, principalmente pela simplicidade de execução. O comportamento das ligações com chumbadores pode ser entendido baseando-se na análise separada dos seguintes tipos de ação:

variação do comprimento da viga, transmissão de forças horizontais aplicadas nos pilares, momento fletor e momento torsor.

Ainda conforme El Debs (2017), adotando-se a opção da ligação viga-pilar por meio de chumbadores, a transmissão do momento torsor em virtude dos efeitos que tendem a girar a extremidade da viga junto ao apoio pode ser realizada de três maneiras:

- Apenas pela almofada de apoio, quando a torção tem pequenas magnitudes e pode ser equilibrada pelo produto da reação de apoio com o deslocamento lateral dessa reação (Figura 2.14a);
- Através da utilização de apenas um chumbador, que promove também uma pequena capacidade de transmissão de momento torsor ao binário de forças verticais gerado pela flexão do chumbador e da resultante das tensões na almofada de apoio (Figura 2.14b);
- A terceira forma é através do uso de dois chumbadores que absorvem o momento torsor pela ação do binário de forças verticais no chumbador (Figura 2.14c).

**Figura 2.14 - Tipologias de ligações viga-pilar resistentes à torção com e sem chumbadores**



Fonte: El Debs (2017)

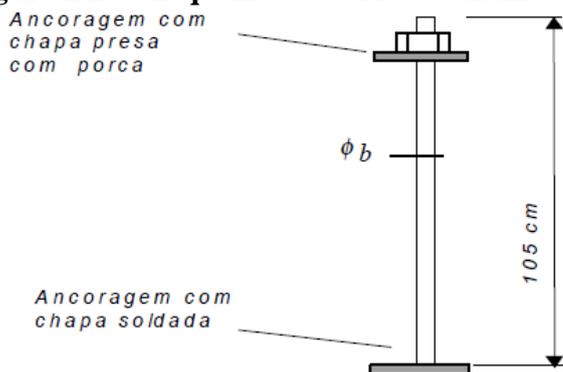
Ferreira (1999), com o objetivo de avaliar, em situação de serviço, a torção na ligação viga-pilar com almofada de elastômero e chumbadores, aplicou forças descentralizadas em três protótipos de viga de seção retangular através de dois atuadores.

Os três protótipos ensaiados foram vigas retangulares de 30x50 cm variando-se os diâmetros das barras dos chumbadores e as dimensões das almofadas de elastômero. No Protótipo A foram utilizados dois chumbadores com diâmetro de 16 mm e almofada de

150x300x5 mm. Nos Protótipos B e C foram utilizados chumbadores com diâmetro de 25 mm e almofadas de 250x300x10 e 200x300x15 respectivamente.

As ancoragens dos chumbadores foram feitas por meio de chapa soldada na parte inferior e chapa presa com porca na parte superior conforme ilustra a Figura 2.15 . Os nichos foram preenchidos com graute adensável com resistência característica de 30,0 MPa.

**Figura 2.15 - Esquema da barra do chumbador**



Fonte: Ferreira (1999)

O binário que produziu a torção na ligação foi obtido através da fixação do atuador superior, como um ponto de apoio, e o acionamento do atuador inferior descentralizados em relação ao eixo vertical da viga, conforme ilustra a Figura 2.16.

**Figura 2.16 - Disposição dos atuadores para aplicação da ação de torção na ligação**

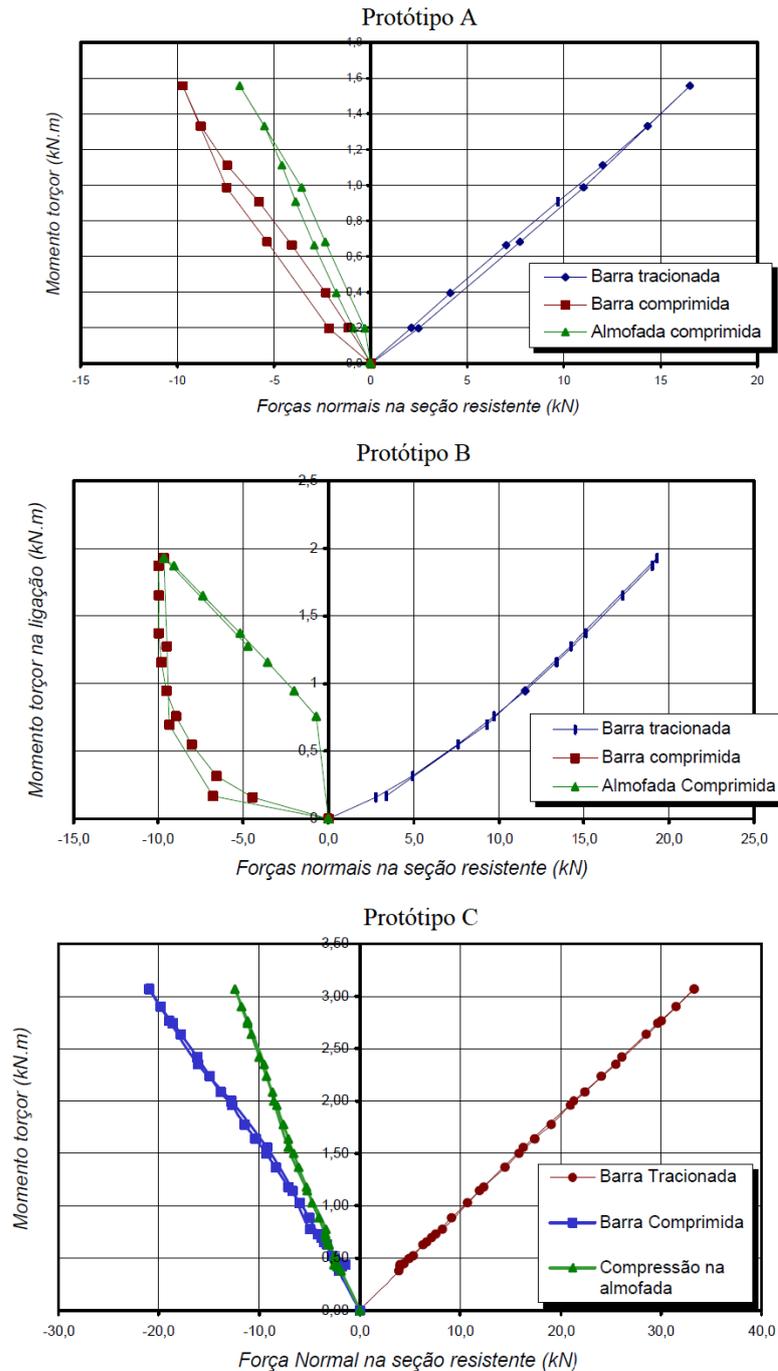


Fonte: Ferreira (1999)

Os resultados mostraram que o mecanismo resistente à torção na ligação foi promovido pela ação do binário composto por uma força de tração, aplicada em uma das barras do

chumbador, e uma força de compressão, com uma componente aplicada na outra barra do chumbador e outra componente aplicada em um trecho da almofada de elastômetro, conforme apresentam os gráficos na Figura 2.17. O somatório entre as forças normais na seção resistente para as barras tracionadas, barras comprimidas e almofada comprimida sempre será nulo, uma vez que o binário vertical é único responsável pela estabilização da viga.

**Figura 2.17 - Componentes normais na seção resistente à torção na ligação**



Fonte: Ferreira (1999)

Pode-se concluir também, através dos estudos de Ferreira (1999), que a variável de maior influência na deformabilidade da ligação foi a espessura das almofadas. As almofadas mais espessas foram as que apresentaram as maiores deformabilidades podendo-se concluir que as almofadas com maior espessura apresentaram uma resistência menor às deformações por compressão.

O software comercial de dimensionamento Eberick, AltoQI (2019), em seu módulo de estruturas de concreto pré-moldado, apresenta uma série de critérios para a análise e dimensionamento de ligações submetidas à torção por meio de chumbadores e aparelhos de apoio simples de elastômero. As etapas de dimensionamento serão apresentadas conforme os procedimentos apresentados nos artigos de suporte do software e serão apresentadas como um norte para o dimensionamento deste tipo de ligação. Algumas etapas apresentadas aqui foram adaptadas para ficarem em consonância com a atual revisão da ABNT NBR 9062:2017.

Inicialmente, são verificados os afastamentos necessários para os chumbadores e para o aparelho de apoio. A ABNT NBR 9062:2017 prevê que sejam respeitados afastamentos mínimos entre os pinos e entre os pinos e as bordas do consolo, conforme recomendações presentes no item 7.2.2.3. A norma também prevê, no item 7.3.3, que sejam respeitados afastamentos entre as bordas do consolo e as bordas do aparelho de apoio.

Após as verificações referentes aos afastamentos, são feitas verificações referentes aos limites de tensões no aparelho de apoio. Os aparelhos de apoio simples de elastômero são muito utilizados em edifícios de concreto pré-moldado e devem ter as tensões de compressão e cisalhamento inferiores aos limites recomendados nos itens 7.2.1.6.19 e 7.2.1.6.25 da ABNT NBR 9062:2017, respectivamente.

De acordo com El Debs (2017), a verificação da tensão por cisalhamento pode ser dispensada quando há existência de pinos de ancoragem. Portanto, a única verificação a ser feita é relativa às tensões de compressão que dependem somente da reação de apoio vertical na viga e das dimensões em planta do aparelho de apoio. A ABNT NBR 9062:2017 prevê que para aparelhos de apoios simples a tensão limite seja inferior a 7 MPa.

Na próxima etapa são feitas verificações relativas aos limites de deformações no aparelho de apoio. Devem ser verificadas as deformações provenientes da compressão e do cisalhamento. Essas verificações são necessárias para que as deformações excessivas nos aparelhos de apoio não prejudiquem os mecanismos de transferências de esforços adotados na análise estrutural. O item 7.2.1.6.20 da ABNT NBR 9062:2017 limita as deformações por compressão em 15% da altura do aparelho de apoio. Já as deformações por cisalhamento, que

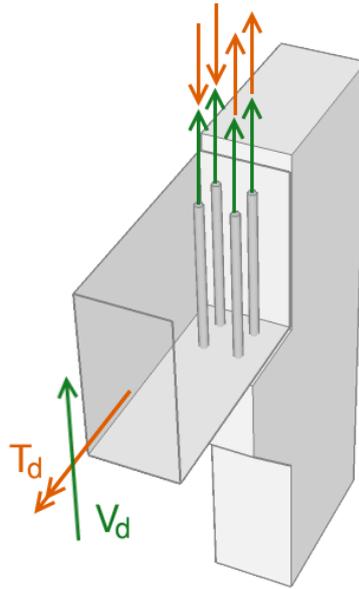
tendem a distorcer lateralmente o aparelho de apoio, são limitadas em 50% da altura do aparelho de apoio, conforme o item 7.2.1.6.21 da mesma norma.

Realizadas as verificações referentes às deformações no aparelho de apoio, deve-se verificar os limites de deslocamento do aparelho de apoio. Tal verificação consiste, basicamente, em comparar o esforço horizontal solicitante com a força de atrito desenvolvida na interface entre o consolo e o aparelho de apoio. Essa força depende do coeficiente de atrito e da força normal solicitante no aparelho de apoio. O item 7.2.1.6.22 da ABNT NBR 9062:2017, prevê que essa verificação seja feita isoladamente, considerando em um primeiro momento somente as forças permanentes e posteriormente a carga total. Nesta etapa também são verificadas a condição de não levantamento da borda menos comprimida do aparelho de apoio simples, que consiste em comparar as tangentes das rotações impostas pelas cargas permanentes e pelas cargas acidentais com limites previstos no item 7.2.1.6.23 da ABNT NBR 9062:2017.

Finalizadas todas as verificações no aparelho de apoio, o próximo passo é a realização de verificações para que seja garantido o comprimento de ancoragem básico dos chumbadores, tanto no consolo como na viga. A verificação parte, inicialmente, da obtenção da resistência de aderência de cálculo, conforme expressão presente no item 9.3.2.1 da ABNT NBR 6118:2014, a depender da resistência a tração do concreto e do tipo de barra utilizada para o chumbador. Logo após, é calculado efetivamente o comprimento de ancoragem básico através da expressão apresentada no item 9.4.2.4 da ABNT NBR 6118:2014. A expressão garante que o chumbador esteja solicitado até o escoamento e as tensões de contato não ultrapassem a resistência de aderência calculada anteriormente. Finalmente, o comprimento de ancoragem básico calculado é comparado como o comprimento de ancoragem disponível, na viga ou no consolo, a ser determinado a partir do comprimento total do elemento descontados os cobrimentos necessários, de acordo com a classe de agressividade ambiental que a estrutura está inserida.

A determinação da área de aço necessária para os chumbadores é feita por meio de uma expressão que se baseia na aplicação dos esforços combinados de tração e torção sobre o conjunto de pinos. A reação vertical  $V_d$  provoca uma reação de tração uniforme em todos os pinos, enquanto o esforço de torção  $T_d$ , provocado pela aplicação das cargas na aba lateral da viga de seção “L”, provocará um binário de esforços, onde parte dos chumbadores estarão comprimidos e parte tracionados. A Figura 2.18 apresenta o panorama de forças verticais solicitantes nos chumbadores.

**Figura 2.18 - Esforços verticais na ligação viga-pilar por chumbadores**



Fonte: AltoQi (2019)

De posse dos esforços solicitantes, calcula-se a área de aço necessária para combater os esforços  $V_d$  e  $T_d$  através da seguinte expressão:

$$A_s = \frac{V_d}{f_{yd}} + \frac{2 \cdot T_d}{f_{yd} \cdot e_x} \quad [2.1]$$

Em que:

$e_x$ : distância entre os eixos dos chumbadores, na direção da base da viga.

Quando o comprimento de ancoragem disponível não for suficiente para ancorar os chumbadores, uma alternativa é aumentar a área de aço dos chumbadores, o que gera um aumento na região de contato da armadura. Desta forma, é possível diminuir o comprimento de ancoragem necessário. O coeficiente responsável por fazer essa majoração é dado por:

$$f_a = \frac{l_b}{l_{b,disp}} \geq 1,0 \quad [2.2]$$

Calculado o coeficiente  $f_a$ , é possível determinar uma área de aço mínima que atenda aos esforços solicitante e ao comprimento de ancoragem necessário. A área mínima é obtida pela seguinte expressão:

$$A_{s,mín} = A_s \cdot f_a \quad [2.3]$$

Como o número e os diâmetros dos chumbadores a serem utilizados já são conhecidos previamente, é possível calcular a área de aço efetiva no consolo e comparar com a área de aço mínima calculada anteriormente. A expressão para área de aço efetiva a ser utilizada será:

$$A_{s,ef} = \frac{\pi}{4} \cdot N_c \cdot \varnothing^2 \geq A_{s,mín} \quad [2.4]$$

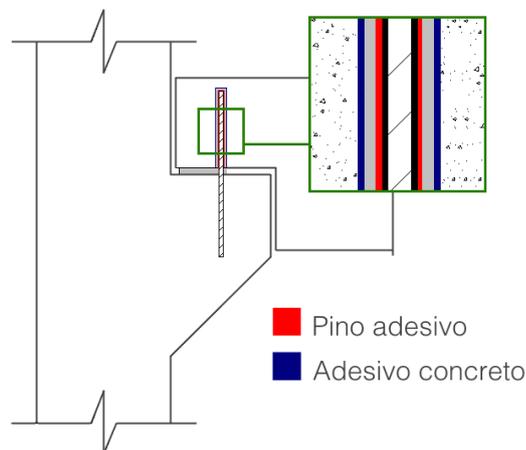
Em que:

$N_c$ : número de chumbadores utilizados;

$\varnothing$ : diâmetro dos chumbadores.

Definido as quantidades e diâmetros dos chumbadores, o próximo passo é a verificação das tensões nas interfaces de contato entre a barra e o adesivo e entre o adesivo e o concreto (Figura 2.19). Deve-se garantir que a interface entre a barra e o concreto seja capaz de resistir as tensões solicitantes não prejudicando a ancoragem dos pinos. A verificação é realizada a partir das áreas de contato entre os elementos.

**Figura 2.19 - Interfaces de ligação entre a barra e o concreto**



Fonte: AltoQi (2019)

A tensão atuante na interface entre o pino e o adesivo será calculada pela relação entre o esforço atuante no pino e a área de contato entre o pino e o adesivo, que pode ser definida como a circunferência do pino multiplicado pelo comprimento final de ancoragem. Para a área de contato entre o adesivo e o concreto, a circunferência adotada é a soma entre o diâmetro do pino e as folgas no furo.

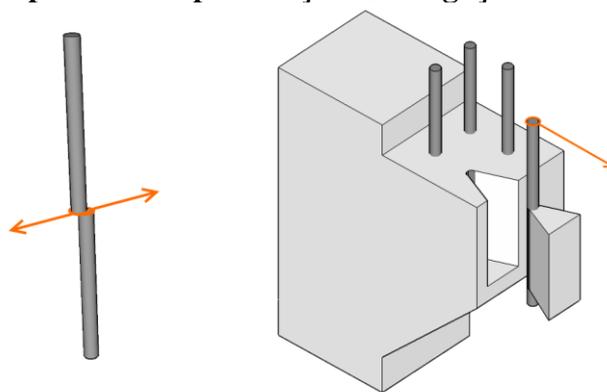
Com base na definição das áreas de contato, são calculadas duas tensões nas interfaces de contato que deverão ser comparadas com as tensões de adesão resistentes a depender do tipo de adesivo a ser utilizado na ligação.

A última etapa do procedimento consiste na verificação relativa ao cisalhamento dos pinos. As vigas podem estar submetidas a um esforço axial de tração  $H_d$  que tende a cisalhar a seção dos pinos na interface entre a viga e o consolo. De acordo com o item 7.3.9 da ABNT NBR 9062:2017, permite-se, na ausência de impedimento ao movimento horizontal, estimar a força horizontal  $H_d$  através da reação de apoio  $V_{sd}$  conforme os valores seguir:

- $H_d = 0,8 \cdot V_{sd}$ , para juntas a seco;
- $H_d = 0,5 \cdot V_{sd}$ , para elemento assentado com argamassa;
- $H_d = 0,16 \cdot V_{sd}$ , para aparelhos de apoio de elastômero;
- $H_d = 0,08 \cdot V_{sd}$ , para aparelhos de apoio revestidos de plástico (PTFE);
- $H_d = 0,25 \cdot V_{sd}$ , para aparelhos realizados entre chapas metálicas não soldadas;
- $H_d = 0,4 \cdot V_{sd}$ , para apoios realizados entre concreto e chapas metálicas.

A aplicação da força  $H_d$  poderá causar tanto um efeito de cisalhamento na seção do pino como uma possível ruptura da seção de concreto que cobre o pino conforme a ilustra a Figura 2.20.

**Figura 2.20 - Efeitos provocados pela força  $H_d$  na ligação com chumbadores**



Fonte: AltoQi (2019)

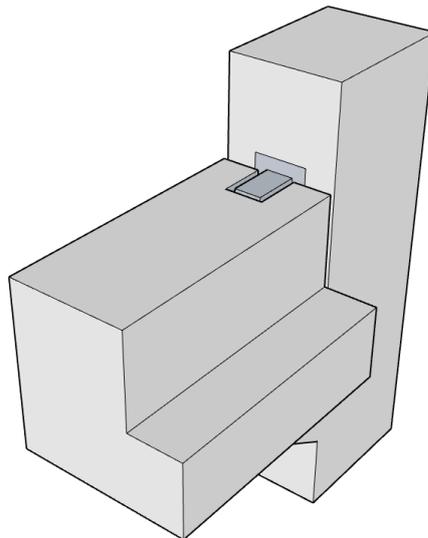
A resistência dos pinos ao cisalhamento é definida por uma expressão que leva em conta o diâmetro do chumbador, a resistência a compressão do concreto e a tensão de escoamento da armadura. Já a expressão que estima a resistência contra a ruptura da borda do consolo depende

somente da resistência a tração do concreto e da distância da face do pino até a borda externa do consolo. A força  $H_d$  deverá ser inferior ao menor entre estes dois valores de resistência.

### 2.3.2.2 Ligação com Chapas de Aço Soldadas

As ligações com os apoios por meio de chapas de aço soldadas são apontadas pelo Manual da FIB (2008) como umas das formas de se criar um mecanismo resistente à torção. O mecanismo resistente neste tipo de ligação, ao contrário das ligações com chumbadores, é através de um binário de forças horizontais. A força horizontal causada pelo momento torsor é resistida pela interface entre a placa de aço soldada ao pilar e a “bandeja” soldada no topo da viga, conforme ilustra a Figura 2.21.

**Figura 2.21 - Ligação viga-pilar com chapa de aço soldada**

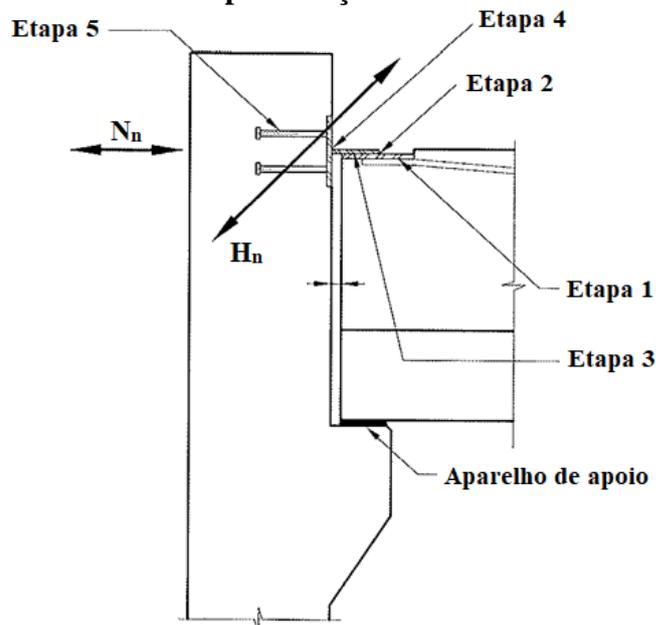


Fonte: Adaptado de FIB (2008)

O manual específico para ligações em estruturas pré-moldadas do PCI (2008) apresenta uma metodologia para o cálculo de ligações com os apoios por meio de chapas de aço soldadas semelhante ao ilustrado na Figura 2.21. O modelo com chapas de aço soldadas apresentado pelo manual, é utilizado para promover a ligação de uma viga de seção “T” invertido. Uma vez que o mecanismo de aplicação dos carregamentos são os mesmos tanto nas vigas de seção “T” invertido quanto nas vigas de seção “L”, a metodologia pode ser extrapolada e será apresentada aqui como uma alternativa às ligações com os apoios resistentes à torção em vigas de seção “L”.

De maneira resumida, a metodologia apresentada pelo PCI (2008) é composta por cinco etapas conforme ilustra a Figura 2.22. Em todas as etapas são obtidas capacidades resistentes às forças  $N_n$  e  $H_n$ . A menor destas resistências, independente da etapa em que foi obtida, serão consideradas as resistências de cálculo da ligação. Todos os elementos que compõem a ligação têm dimensões e resistências pré-determinadas para facilitar o tabelamento e a padronização da ligação.

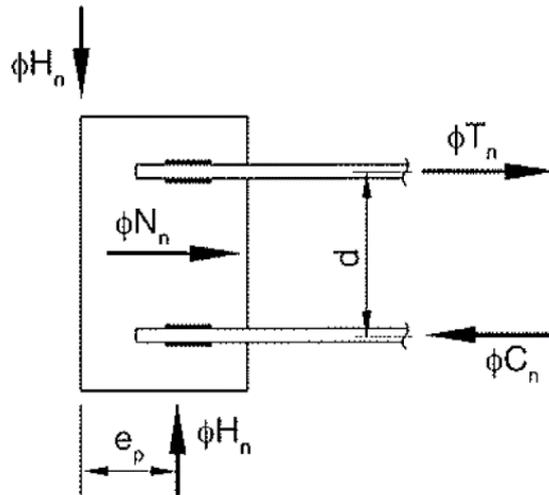
**Figura 2.22 - Etapas para verificação da capacidade resistente da ligação viga-pilar com chapas de aço soldadas**



Fonte: Adaptado de PCI (2008)

Na Etapa 1 são feitas verificações referentes a resistência das barras soldadas que promovem a ancoragem da chapa embutida no topo da viga. A partir da definição do diâmetro das barras a serem utilizadas, determina-se a capacidade resistente a tração e ao cisalhamento das barras. O cálculo da resistência à tração é feito de forma direta, através do diâmetro das barras e da resistência a tração do aço. Para resistência ao cisalhamento, considera-se que as barras promoverão um binário de forças ( $T_n$  e  $C_n$ ) que deve se contrapor ao binário gerado pela ação e reação de  $H_n$  no centro do filete de solda entre a barra e a chapa (Figura 2.23).

**Figura 2.23 - Mecanismo resistente ao cisalhamento das barras que ancoram a chapa embutida no topo da viga**



Fonte: Adaptado de PCI (2008)

Na Etapa 2, as verificações são relativas a resistência do filete de solda que promove a ligação entre a chapa embutida na viga e a chapa de ligação com o pilar. O primeiro passo é a verificação da resistência à força solicitante  $N_n$ , que dependerá da espessura e do comprimento do filete de solda e da resistência à tração do metal da solda. A resistência ao cisalhamento é calculada através de uma expressão que leva em conta a resistência a tração do metal da solda e de propriedades geométricas relacionadas ao formato em planta da solda, que neste caso deve ser feita em forma de “U”, contornando as três bordas que não estão em contato com a face do pilar.

A Etapa 3 consiste na verificação da resistência da chapa de ligação com o pilar. Inicialmente define-se a espessura e as dimensões em planta, devendo-se adotar uma chapa que tenha dimensões em planta inferiores a chapa embutida no topo da viga. Após a definição da espessura e das dimensões em planta, obtém-se a resistência à tração e as resistências ao cisalhamento.

Na Etapa 4 verifica-se a capacidade resistente do filete de solda que promove a ligação entre o pilar e a chapa de ligação com a viga. Como nesta situação o filete é constituído apenas por uma linha, a capacidade resistente à tração e ao cisalhamento podem ser consideradas iguais e só dependem da dimensão da perna do filete, do comprimento da linha de solda e da resistência à tração do metal da solda.

Na Etapa 5, última etapa do procedimento de cálculo recomendado pelo manual de ligações para estruturas pré-moldadas do PCI (2008), são feitas verificações da capacidade

resistente da chapa embutida no pilar. Nesta etapa devem ser consideradas as resistências a tração e ao cisalhamento tanto dos pinos de ancoragem como da chapa de aço.

As resistências de cálculo das soldas podem ser obtidas de acordo com as prescrições da norma de projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto ABNT NBR 8800:2008.

### 3 DIMENSIONAMENTO USUAL DA SEÇÃO POR MÉTODOS ANALÍTICOS

Como visto anteriormente, a diferença entre as estruturas pré-moldadas e as estruturas moldadas in loco são as situações transitórias e as ligações. Logo, é necessário que se faça a distinção entre as solicitações de acordo com a fase em que será realizado o dimensionamento da seção.

O presente trabalho concentra-se no comportamento e dimensionamento de vigas de seção “L” de concreto pré-moldado no estado-limite último considerando que estejam na posição definitiva de utilização. Não será, portanto, discutido o comportamento e o dimensionamento nas situações transitórias, que compreende as fases de desmoldagem, transporte, armazenamento e montagem. Vale ressaltar que em casos particulares, o dimensionamento do elemento para as situações transitórias pode ser preponderante em relação aos critérios de dimensionamento apresentados neste trabalho.

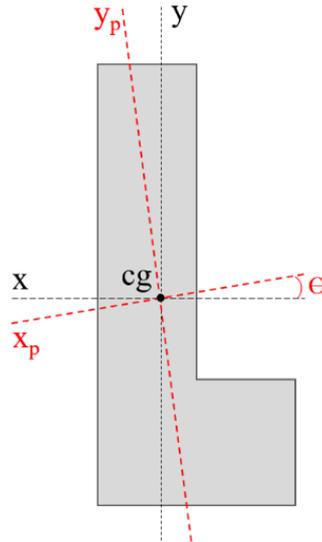
#### 3.1 FLEXÃO

O dimensionamento a flexão das vigas de seção “L” geralmente não se diferencia das outras vigas de concreto armado ou concreto protendido. Todavia, o formato assimétrico da seção transversal, em ambas as direções, faz com que a análise da flexão das vigas de seção “L”, em determinados casos, tenha que levar em conta os eixos principais de inércia, que ficarão levemente rotacionados conforme ilustra a Figura 3.1.

De acordo com Klein (1986), dependendo das características da seção transversal e das condições de restrição à rotação desenvolvidas na ligação com as lajes, a influência da rotação dos eixos deverá ser levada em conta no dimensionamento da seção, principalmente para as vigas protendidas e de pequena altura. Para as vigas de peitoril alto, a influência da rotação pode ser desconsiderada.

O cálculo da orientação dos eixos principais de inércia e dos momentos principais de inércia é relativamente simples e facilmente programável, pois, a seção pode ser dividida em retângulos, logo, não há necessidade de utilizar integrações para obtenção das propriedades geométricas citadas.

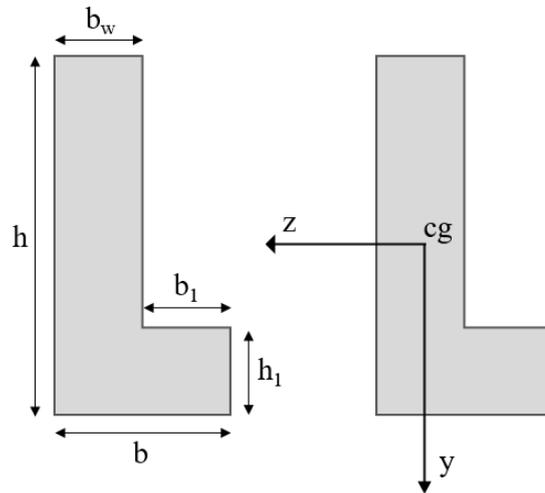
**Figura 3.1 - Eixos principais de inércia em vigas de seção "L"**



Fonte: Adaptado de Klein (1985)

Pastore (2015) construiu uma tabela com diferentes configurações de seção transversal afim de avaliar se a análise de flexão segundo os eixos principais pode ser desconsiderada em vigas de peitoril alto, conforme exposto anteriormente. Os parâmetros geométricos das seções transversais analisadas são apresentados na Figura 3.2.

**Figura 3.2 – Parâmetros geométricos para comparação entre os módulos de resistência**



Fonte: Adaptado de Pastore (2015)

Para a referida avaliação, foram comparados os valores do módulo de resistência mínimo ( $W_{\text{mín}}$ ) da seção com o módulo de resistência segundo o eixo horizontal da viga ( $W_z$ ). A Tabela 3 mostra os resultados obtidos em 24 combinações diferentes de seção transversal.

**Tabela 3 - Comparação entre  $W_{\min} / W_z$  para várias geometrias de seção "L"**

Caso	$b_w$ (cm)	$h$ (cm)	$b_1$ (cm)	$h_1$ (cm)	$h/b$	$\theta$ (graus)	$W_{\min} / W_z$
1	20	60	15	20	1,7	13	90%
2	20	60	15	40	1,7	12	91%
3	20	60	20	20	1,5	18	85%
4	20	60	20	40	1,5	18	87%
5	20	120	15	20	3,4	4	98%
6	20	120	15	40	3,4	5	97%
7	20	120	20	20	3,0	6	97%
8	20	120	20	40	3,0	7	96%
9	20	180	15	20	5,1	2	99%
10	20	180	15	40	5,1	3	99%
11	20	180	20	20	4,5	3	99%
12	20	180	20	40	4,5	4	98%
13	30	60	15	20	1,3	16	85%
14	30	60	15	40	1,3	17	86%
15	30	60	20	20	1,2	22	81%
16	30	60	20	40	1,2	27	81%
17	30	120	15	20	2,7	4	97%
18	30	120	15	40	2,7	6	97%
19	30	120	20	20	2,4	5	96%
20	30	120	20	40	2,4	8	95%
21	30	180	15	20	4,0	2	99%
22	30	180	15	40	4,0	3	99%
23	30	180	20	20	3,6	3	99%
24	30	180	20	40	3,6	4	98%

Fonte: Pastore (2015)

A partir dos resultados apresentados na Tabela 3 pode-se observar que determinadas seções transversais apresentaram a relação entre os módulos de resistência próximos de 100%. Para estas situações conclui-se que a diferença entre os módulos de resistência torna-se desprezível, logo, a consideração dos eixos principais de inércia do dimensionamento da seção à flexão pode ser desconsiderada, corroborando com Klein (1986).

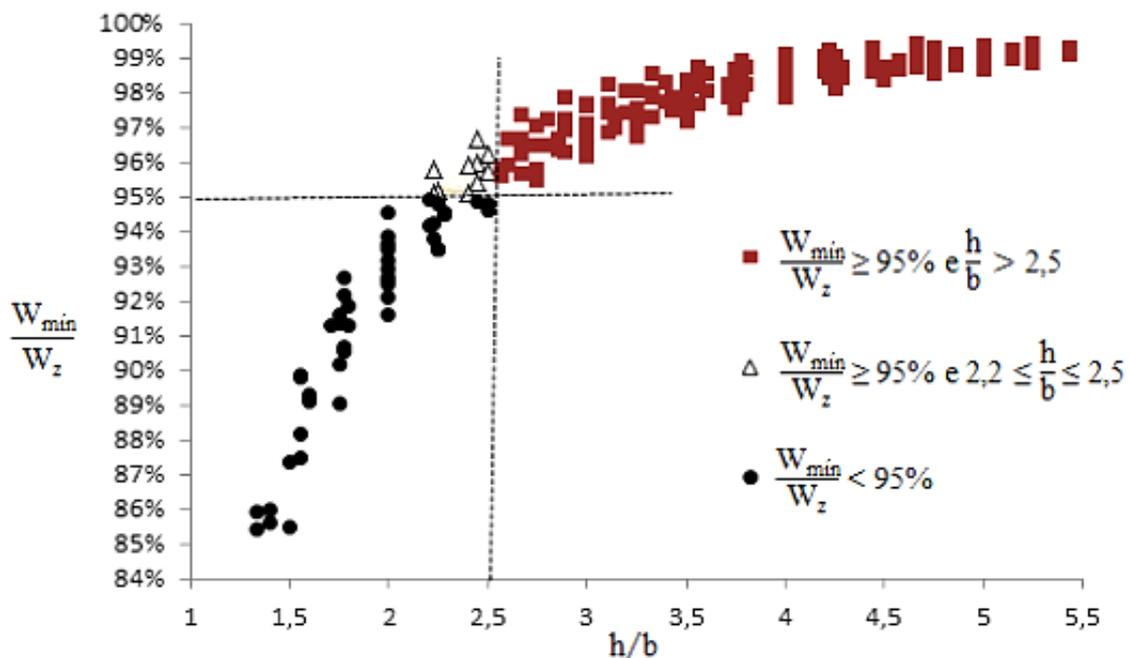
Observa-se também que a relação entre os módulos de resistência ( $W_{\min} / W_z$ ) e o giro  $\theta$  são inversamente proporcionais, o que era de se esperar, uma vez que quanto menores os valores de rotação da seção transversal, mais próximos da posição inicial a peça ficará. Deste modo, as propriedades geométricas da seção se manterão inertes fazendo com que a relação entre os módulos de resistência tenha valores próximos a 100%.

É possível observar ainda que conforme a altura  $h$  aumenta, menores são os valores do ângulo  $\theta$  para uma mesma dimensão da aba lateral. Esse fato se deve a tendência da seção em se comportar como uma seção retangular, visto que o aumento na altura do peitoril provoca uma diminuição na assimetria da peça. Deste modo, para vigas com altura  $h$  elevada, as dimensões da aba lateral passam a ter uma menor influência no cálculo do produto de inércia.

Para as vigas mais baixas, aumentos de 5 cm nos valores de  $b_w$  e  $b_l$  para uma mesma dimensão de alma, são responsáveis por reduções da ordem de 5% na relação entre os módulos de resistência da seção, fato que se deve a tendência da viga em se tornar assimétrica. Já aumentos de 10 cm no valor  $h_1$ , favoráveis à simetria da seção, são responsáveis por aumentos pequenos, da ordem de 2%, no valor da relação entre os módulos de resistência. Para as vigas mais altas as variações de  $b_w$ ,  $b_l$  e  $h_1$  não causam grandes diferenças nos valores de  $W_{\min}$  e  $W_z$ .

De acordo com Pastore (2015), considerando uma tolerância de 5% no valor real do módulo de resistência, é possível concluir que a análise a flexão segundo os eixos principais poderia ser dispensada para vigas de seção “L” com relação  $h/b$  maior que 2,5. A afirmação se dá a partir da extrapolação da tabela anterior para uma análise com 184 seções que variaram em  $h$  de 60 a 210 cm. Algumas relações  $h/b$  entre 2,2 e 2,5 também tiveram resultados superiores a 95%, entretanto esses casos devem ser avaliados individualmente. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 3.3.

**Figura 3.3 - Relação entre os dimensionais  $h/b$  e  $W_{\min}/W_z$  para seções “L”**



Fonte: Pastore (2015)

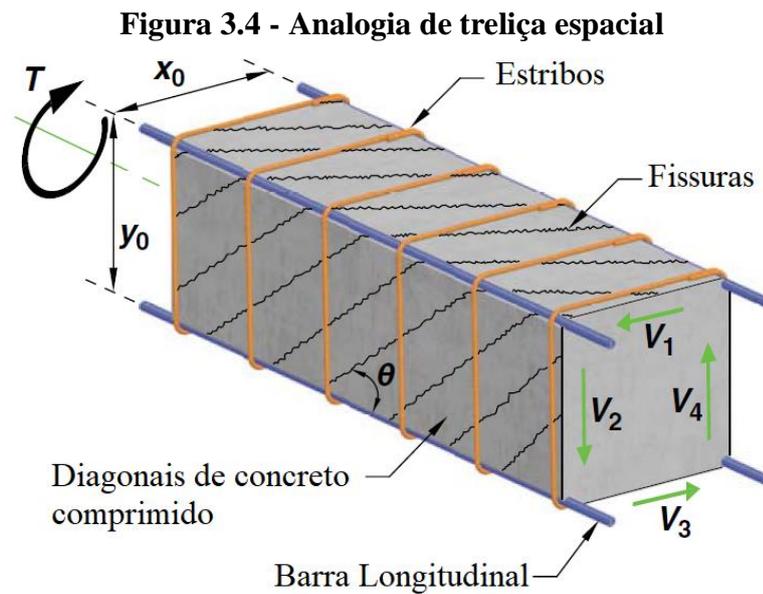
### 3.2 CISALHAMENTO POR FORÇAS CORTANTES E TORÇÃO

Conforme exposto anteriormente, as vigas de seção “L” são elementos que apresentam uma série de complexidades em sua análise e dimensionamento, dentre elas, o formato assimétrico da seção transversal nos dois eixos e a presença de carregamentos excêntricos ao centro de cisalhamento. Ambas as características citadas são responsáveis pelo surgimento de tensões de cisalhamento causadas por forças cortantes e principalmente por momentos torsores.

Segundo Pastore (2015), o comportamento e o dimensionamento ao cisalhamento devido às forças cortantes, assim como na flexão, seguem os mesmos princípios utilizados em vigas de seções convencionais de concreto armado ou concreto protendido. Dessa forma, admite-se a utilização de diversas teorias e modelos que busquem capturar o comportamento de natureza complexa que as vigas de concreto apresentam quando submetidas a forças cortantes, ou ainda, quando combinadas com momentos torsores, como é o caso das vigas de seção “L”. A ABNT NBR 6118:2014 admite dois modelos de cálculo que se baseiam na analogia de treliça proposta por Ritter e Morsch, a mesma que deu origem ao Método das Bielas.

Já o comportamento e o dimensionamento ao cisalhamento por torção, por sua vez, são sinônimos de controvérsias entre pesquisadores, principalmente pelo padrão de fissuração e pelos mecanismos de ruptura que se tem observado em ensaios experimentais com vigas de seção de “L” de peitoril alto e delgado. Maiores explicações a respeito dessas controvérsias podem ser vistas em Logan (2007).

Tanto a norma brasileira ABNT NBR 6118:2014 como a norma americana ACI 318:2019 recomendam, como principal teoria para o dimensionamento à torção de vigas de concreto, um modelo analítico que também se baseia na treliça proposta por Ritter e Morsch, mas diferente do dimensionamento ao cisalhamento somente por forças cortantes em que a treliça é plana, no caso da torção, o modelo é constituído por uma treliça espacial (Figura 3.4). Este modelo de dimensionamento é definido a partir de um elemento vazado de seção correspondente ao elemento estrutural a ser dimensionado e deve ser constituído por um arranjo de armaduras compostas por barras longitudinais e estribos verticais.



A ABNT NBR 6118:2014, deixa evidente essa condição no item 17.5.1.2 apontando que sempre que a torção for necessária ao equilíbrio do elemento estrutural, como é o caso das vigas de seção “L” estudadas neste trabalho, deve existir armadura destinada a resistir aos esforços de tração oriundos da torção. A norma prevê que essa armadura seja constituída por estribos verticais periféricos normais ao eixo do elemento estrutural e barras longitudinais distribuídas ao longo do perímetro da seção resistente.

O ACI 318:2019, além do dimensionamento baseado no modelo clássico de treliça espacial, também recomenda nos itens 9.5.4.6 e 9.5.4.7 outros dois métodos analíticos alternativos que têm sido utilizados especialmente para o dimensionamento à torção de vigas de seção “L” de concreto pré-moldado.

O primeiro método recomendado é apresentado com detalhes em Zia e Hsu (2004) e pode ser utilizado para o dimensionamento a torção de seções sólidas com relação entre a altura e a largura da seção ( $b_w/h$ ) igual ou superior a 3. Segundo a norma americana, este método tem sido utilizado extensamente com sucesso para o dimensionamento de vigas de seção “L” de concreto pré-moldado com estribos fechados. O método também é recomendado pelo manual de dimensionamento do PCI (2010) e já teve seu procedimento validado experimentalmente por Klein (1986), Lucier et al. (2011a) e Hariharan et al. (2019).

Esse método teve a sua primeira versão publicada por Zia e McGee (1974) e ganhou notoriedade na indústria do concreto pré-moldado principalmente pela popularização dos elementos protendidos por pré-tração, passando a ser recomendado pelo manual de

dimensionamento do “*Precast / Prestressed Concrete Institute*” (PCI) a partir da segunda edição, em 1978. Nos anos seguintes, a metodologia passou por duas adaptações. A primeira, feita por Zia e Hsu (1978), basicamente adequou a metodologia inicial para que ficasse equivalente a revisão do ACI-318 feita em 1977, que passou a usar expressões em termos de forças e momentos e não mais em termos de tensões. A segunda adaptação, feita por Zia e Hsu (2004), atualmente recomendada pelo ACI 319:2019, também segue essencialmente a metodologia inicial, mas com algumas modificações e refinamentos.

O segundo método recomendado pelo ACI 318:2019 pode ser visto com detalhes em Lucier et al. (2011b) e deve ser utilizado somente em vigas de concreto pré-moldado com relação entre a altura e a largura da seção ( $b_w/h$ ) igual ou superior a 4,5. Este método foi desenvolvido a partir de análises realizadas em pesquisas experimentais conduzidas por Klein (1986), Lucier et al. (2007, 2011a) e análises numéricas feitas por Hassan (2007) que mostram que vigas com peitoril alto e delgado, com as ligações junto aos apoios feitas por meio de conectores horizontais posicionados na alma da seção, apresentaram mecanismos de ruptura diferentes daqueles apontados pelas teorias clássicas baseadas em modelos de treliça espacial.

Sendo assim, Lucier et al. (2011b) propôs um método analítico para o dimensionamento de vigas de seção “L” de peitoril alto e delgado baseado em um extenso programa experimental conduzido por Lucier et al. (2011a). O objetivo do método foi validar a utilização de armaduras com arranjos abertos em substituição aos arranjos com estribos fechados comumente utilizados para resistir à componente vertical de tração no modelo de treliça espacial. Segundo os autores, apesar de se constatar uma resistência inferior do arranjo aberto quando comparado com estribos fechados, a capacidade resistente é suficientemente conservadora e a fabricação da armadura proposta economizou 30% em aço e 50% em tempo de trabalho. Hariharan et al. (2019) comprovou experimentalmente a eficiência do método também em vigas compactas de seção “L”.

A norma canadense CSA A23.3:2014 faz uma distinção relativa às regiões onde ocorrem o cisalhamento devido a forças cortantes e torção, recomendando modelos diferentes para cada região. Segundo a norma, nas regiões de flexão, onde é razoável considerar a ocorrência da hipótese de Bernoulli, ou seja, as seções planas permanecem planas após as deformações, deve ser utilizado um modelo semelhante ao recomendado pela norma brasileira e pela norma americana, baseado em um modelo de treliça espacial. A norma ainda aponta que nessas regiões também podem ser utilizados modelos de escoras e tirantes para o dimensionamento ao cisalhamento por esforços cortante e por torção, ou seja, pode ser aplicado

o Método das Bielas. Ainda de acordo com a norma canadense, nas regiões próximas a descontinuidades onde há distúrbios na distribuição das tensões e deformações, isto é, regiões em que não se aplica a teoria de flexão, deve ser utilizado somente modelos de escoras e tirantes para o dimensionamento ao cisalhamento. Sendo assim, fica evidente que, conforme as recomendações da CSA A23.3:2014, o Método das Bielas é uma ferramenta extremamente versátil que pode ser utilizada no dimensionamento ao cisalhamento por forças cortantes e por torção em qualquer região da viga.

Um diferencial da norma canadense em relação a norma brasileira e a norma americana é que além da recomendação do Método das Bielas, a norma canadense também recomenda a utilização de outros métodos alternativos para a determinação da resistência ao cisalhamento somente por forças cortantes ou por forças cortantes combinadas com torção. O texto aponta que a resistência pode ser determinada através da utilização de métodos que satisfaçam as condições aplicáveis de equilíbrio e de compatibilidade de deformações, usando relações apropriadas para tensão-deformação da armadura e para diagonal de concreto fissurado.

Um método clássico reconhecido pela literatura e que atende aos requisitos exigidos pela norma canadense CSA A23.3:2014 é a Teoria dos Campos de Compressão ou “*Compression Field Theory*” (CFT) apresentado com detalhes em Mitchell e Collins (1980). Pesquisas que exploram o comportamento específico de vigas de seção “L” de concreto pré-moldado como Raths (1984), Klein (1986), Cleland e Baber (1986), Logan (2007), Lucier et al. (2011a) e Hariharan et al. (2019) ressaltam o CFT como um método alternativo para o dimensionamento ao cisalhamento por forças cortantes e por torção em vigas de seção “L”, através da utilização de estribos fechados e armadura longitudinal.

Afim de se expor um panorama geral dos modelos que utilizam estribos fechados e armadura longitudinal para o dimensionamento ao cisalhamento por forças cortantes e torção em vigas de seção “L” de concreto pré-moldado, serão apresentados a seguir os principais conceitos e as etapas de dimensionamento adotadas pelos métodos analíticos alternativos propostos por Collins e Mitchell (1980) e Zia e Hsu (2004). Também serão apresentados os procedimentos que atualmente são adotados pela ABNT NBR 6118:2014. Estes métodos serão abordados com detalhes para que os seus resultados possam ser comparados com os resultados obtidos pela utilização do Método das Bielas, que pela estratégia apresentada por Marti (1985), também prevê a utilização de estribos fechados e armadura longitudinal.

O modelo proposto por Lucier et al. (2011b) será apresentado de maneira mais genérica pois não é o foco deste trabalho tratar do dimensionamento de vigas de seção “L” com arranjos

abertos de armadura, visto que, a ABNT NBR 6118:2014 aponta no item 18.3.4 que os estribos para torção devem ser fechados em todo o seu contorno, envolvendo as barras longitudinais das armaduras longitudinais de tração, e com as extremidades adequadamente ancoradas por meio de ganchos em ângulo de 45°.

Maiores detalhes a respeito da aplicação do método proposto por Lucier et al. (2011b) além de um exemplo completo de dimensionamento podem ser vistos em Pastore (2015).

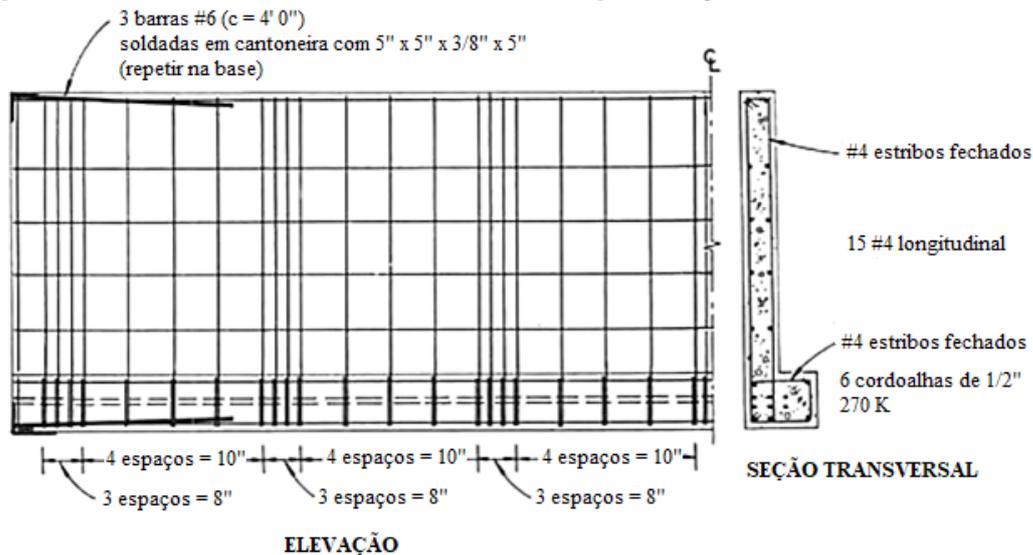
### **3.2.1 Método Analítico Proposto por Collins e Mitchell (1980)**

#### 3.2.1.1 Conceituação

O método analítico proposto por Collins e Mitchell (1980) é baseado na Teoria dos Campos de Compressão ou “*Compression Field Theory*” (CFT). Esta teoria foi desenvolvida pelos pesquisadores motivados pela busca por procedimentos que caracterizassem de maneira racional o comportamento ao cisalhamento de vigas de concreto armado e protendido. Os procedimentos recomendados pelo ACI para o dimensionamento ao cisalhamento por cortante e torção, até então, consistiam de um arranjo complexo de equações empíricas e restritas que não representavam de maneira generalizada os efeitos do cisalhamento em vigas de concreto. O reconhecimento da efetividade do método foi tanto que o CFT passou a ser recomendado já na terceira edição do manual de dimensionamento do “*Precast / Prestressed Concrete Institute*”, em 1985.

Apesar de já existirem teorias mais recentes derivadas do CFT, como o “*Modified Compression Field Theory*” (MCFT) proposto por Vecchio e Collins (1986) e o “*Disturbed Stress Field Model*” proposto por Vecchio (2000) como uma extensão do MCFT, o CFT será apresentado neste trabalho pois diversas pesquisas destinadas especificamente ao estudo de vigas de seção “L” ressaltam o CFT como um método clássico alternativo para o dimensionamento ao cisalhamento por forças cortantes e por torção neste tipo de seção transversal. Essa recomendação se dá principalmente pelo fato de Collins e Mitchell (1980) terem apresentado o desenvolvimento de um exemplo numérico completo que contempla o passo a passo para o dimensionamento e detalhamento de uma viga de seção “L” através do CFT, conforme ilustra a Figura 3.5.

**Figura 3.5 - Detalhamento da armadura de viga de seção "L" utilizando o CFT**



Fonte: Adaptado de Collins e Mitchell (1980)

De acordo com Collins e Mitchell (1980), o CFT é uma extensão do modelo tradicional de treliça adotado para a análise do cisalhamento por forças cortantes e torção em vigas de concreto armado e protendido. Nesta teoria, além das considerações em relação as condições de equilíbrio da treliça, também são adotadas condições de compatibilidade geométrica e principalmente consideração das relações entre tensões e deformações no concreto. Desse modo, assim como na “Teoria de Bernoulli” utilizada na análise da flexão da viga, o CFT é capaz de prever não somente uma provável carga de ruptura da viga, mas também uma resposta mais bem definida do comportamento da viga em termos da compatibilidade entre tensões e deformações.

A teoria assume, basicamente, que após a fissuração o concreto não é capaz de absorver tensões de tração e o cisalhamento é transportado por um campo de compressão diagonal, resultando na seguinte expressão:

$$\tan^2\theta = \frac{\epsilon_l + \epsilon_d}{\epsilon_t + \epsilon_d} \quad [3.1]$$

Em que:

$\theta$ : ângulo da diagonal comprimida;

$\epsilon_l$ : deformação por tração na armadura longitudinal;

$\epsilon_t$ : deformação por tração na armadura transversal;

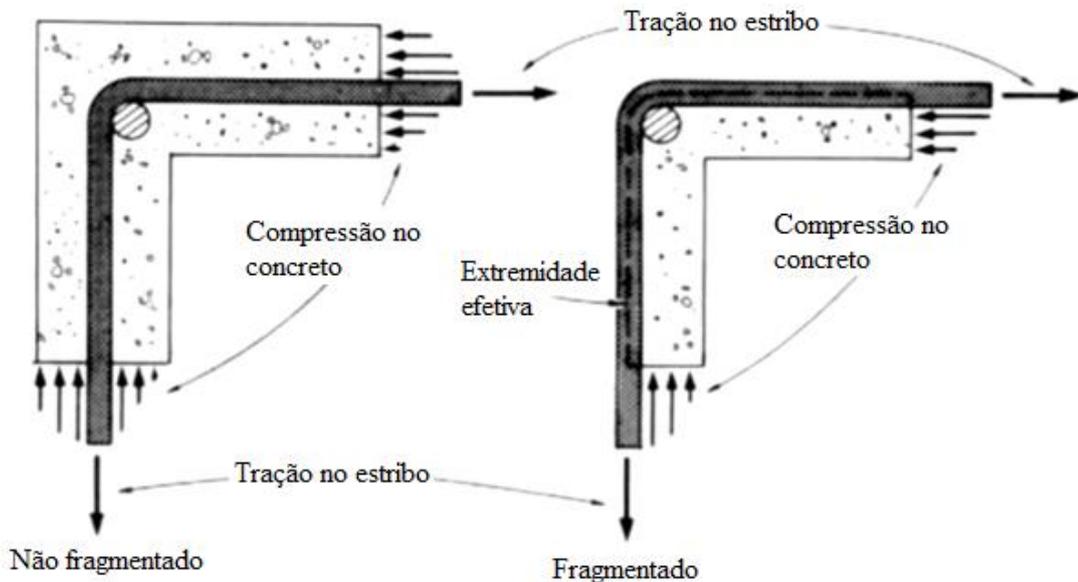
$\epsilon_d$ : deformação da diagonal comprimida.

Uma vez que as deformações por tração na armadura longitudinal e transversal podem ser obtidas por meio do equilíbrio de forças utilizando o modelo tradicional de treliça e as deformações da diagonal comprimida podem ser obtidas através das leis constitutivas do concreto, o CFT permite avaliar se o ângulo adotado inicialmente no modelo de treliça está correto ou não. Caso não esteja correto, uma nova estimativa para o ângulo  $\theta$  pode ser feita e o procedimento repetido novamente. Desse modo, através da compatibilidade entre deformações, o CFT é capaz de prever o ângulo de inclinação da diagonal comprimida.

As considerações em relação aos parâmetros geométricos feitas pelo CFT na análise da torção são semelhantes ao modelo clássico de treliça espacial, onde considera-se que somente parte da seção transversal é efetiva para desenvolver as tensões diagonais de compressão. Para que seja definida essa região resistente, é necessário o entendimento quanto os mecanismos de ruptura da seção.

Segundo Collins e Mitchell (1980), a partir do equilíbrio de forças que se desenvolve nos cantos de uma viga submetida a torção, percebe-se que a compressão no concreto tende a empurrar para fora da viga a região de cobrimento da armadura (Figura 3.6), logo, assume-se a total fragmentação do concreto nesta região e adota-se como extremidades efetivas da seção transversal a linha que coincide com o eixo dos ramos dos estribos.

**Figura 3.6 - Fragmentação do concreto na região de cobrimento das armaduras**



Fonte: Adaptado de Collins e Mitchell (1980)

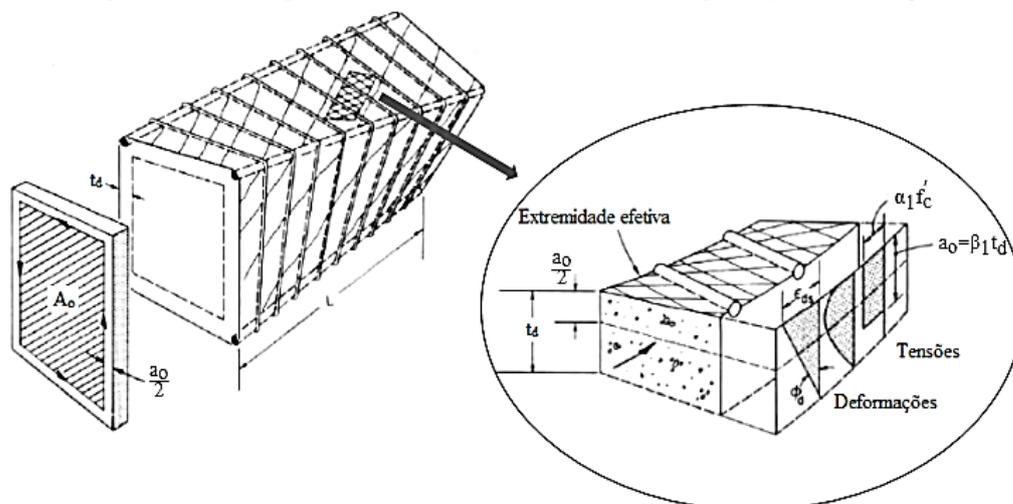
Analisando a deformada de uma viga submetida a torção, é possível perceber que as paredes laterais da viga não permanecem planas. A curvatura dessas paredes, faz com que as deformações por compressão nas diagonais ( $\epsilon_{ds}$ ) sejam máximas na extremidade efetiva da viga e diminuam linearmente até uma distância em que as deformações serão nulas e se iniciarão deformações por tração. Portanto, assim como na flexão, existirá uma região comprimida e uma outra região tracionada, na qual assume-se que o concreto não resiste a tração.

Conforme o exposto, e considerando a fragmentação do concreto na região de cobrimento da armadura, adota-se então como seção transversal de concreto resistente as tensões de compressão provocadas pela torção, apenas uma região tubular com uma espessura  $t_d$ . Essa espessura é equivalente a profundidade da linha neutra na análise de flexão e se localiza a partir da extremidade efetiva, ou seja, interna ao eixo que coincide com o centro do estribo.

Assim como na flexão, a variação das tensões de compressão que ocorrerá ao longo da espessura desta região tubular pode ser substituída por uma região comprimida retangular equivalente. O valor da distribuição uniforme de tensões será igual a um fator  $\alpha_1$  multiplicado pela resistência a compressão do concreto. Já o valor da altura  $a_o$  desta região retangular será igual a um fator  $\beta_1$  multiplicado pela espessura  $t_d$ . Ambos os fatores de multiplicação, dependerão do formato da curva tensão-deformação apresentada pelo concreto.

A partir da obtenção da altura  $a_o$ , considera-se que a trajetória do fluxo de cisalhamento por torção ocorrerá a uma distância  $a_o/2$  a partir da linha que coincide com o centro do estribo. A Figura 3.7 ilustra toda a explicação a respeito de como é obtida a seção vazada adotada como seção de concreto resistente à torção.

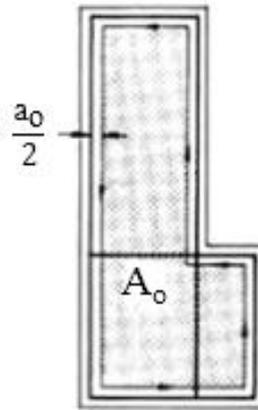
**Figura 3.7 - Região tubular efetiva em uma viga sujeita a torção**



Fonte: Adaptado de Collins e Mitchell (1980)

Conhecida a posição da trajetória do fluxo de cisalhamento por torção, é possível obter os parâmetros geométricos relativos a área da seção interna à trajetória do fluxo de cisalhamento ( $A_o$ ) e ao perímetro da trajetória do fluxo de cisalhamento ( $p_o$ ). Ambos os parâmetros são necessários para obtenção das relações geométricas que governam a resistência a torção das diagonais comprimidas. A Figura 3.8 apresenta a área interna à trajetória do fluxo de cisalhamento aplicada a uma viga de seção “L”.

**Figura 3.8 - Área interna à trajetória do fluxo de cisalhamento por torção**

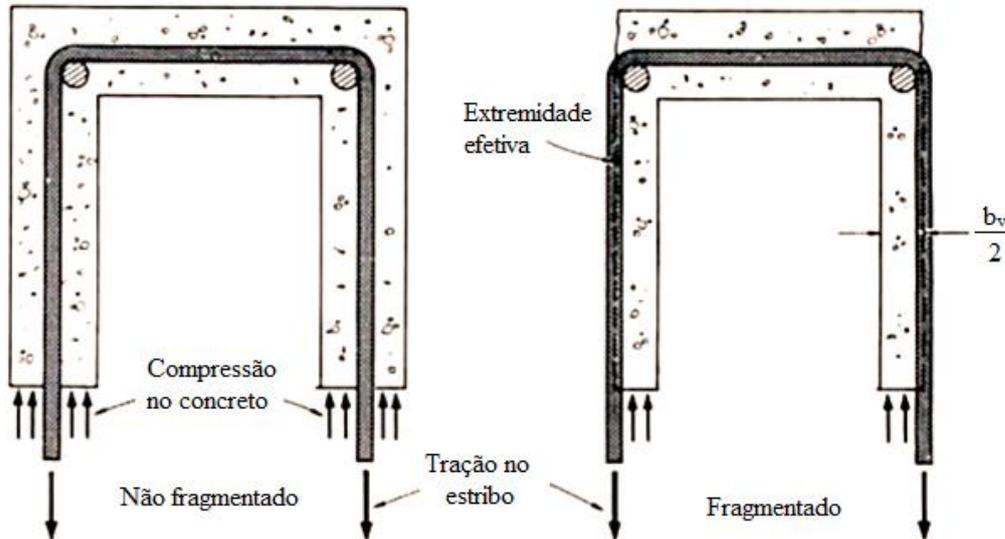


Fonte: Adaptado de Collins e Mitchell (1980)

A aplicação do CFT para obtenção do comportamento torção-giro da viga é feita a partir da escolha de diversos valores para a máxima deformação da diagonal comprimida ( $\epsilon_{ds}$ ). A partir da escolha destes valores, poderá ser obtido o valor máximo de torção resistente pela viga, bem como o giro correspondente a esse valor. Para determinação da resistência última a torção da viga, não é necessário descrever o comportamento torção-giro completo da viga, de modo que, assim como na flexão, assume-se um valor máximo recomendado por norma para a deformação no concreto e adota-se valores para os fatores  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  também de acordo com prescrições normativas.

Aplicando o CFT no dimensionamento ao cisalhamento por forças cortantes, é necessário que sejam feitas algumas considerações complementares. Assim como no comportamento da seção à torção, a região de cobertura da armadura pode estar sujeita a fragmentação sob esforços de alta magnitude. Logo, também se assume que a extremidade efetiva da seção coincidirá com o eixo dos ramos dos estribos conforme ilustra a Figura 3.9.

**Figura 3.9 - Fragmentação do cobrimento do concreto devido ao cisalhamento por forças cortantes**



Fonte: Adaptado de Collins e Mitchell (1980)

No cálculo da tensão na diagonal comprimida ( $f_d$ ), considera-se que a magnitude do fluxo de cisalhamento por forças cortantes seja constante ao longo da altura da seção resistente ao cisalhamento ( $d_v$ ), que no CFT, será a distância entre o eixo das barras longitudinais que ancoram os estribos. Sendo assim, tem-se que a máxima tensão na diagonal comprimida ocorrerá na região de espessura mínima da seção ( $b_v$ ). Para as vigas de seção “L” essa espessura será igual a espessura da alma, sendo desconsiderado a presença das abas laterais. Nestes casos, a aba lateral somente prevenirá o cobrimento das armaduras longitudinais contra a fragmentação do concreto.

Determinada a origem dos parâmetros geométricos responsáveis pela obtenção da seção de concreto resistente às forças cortantes e à torção, parte-se para a aplicação do CFT em vigas de seção “L” de concreto pré-moldado armado ou protendido. A proposta feita por Collins e Mitchell (1980), contempla os efeitos da flexão e do cisalhamento por forças cortantes e por torção de maneira combinada e será apresentada a seguir segundo as etapas especificadas pelos autores.

### 3.2.1.2 Etapas de Dimensionamento

Na Etapa 1 devem ser determinados os carregamentos de cálculo, que compreendem o peso próprio da viga, o peso próprio das lajes, peso do capeamento de concreto, quando houver,

e as cargas acidentais previstas para utilização da laje. Quaisquer cargas permanentes complementares também deverão ser especificadas e inseridas nas combinações de cálculo. Nesta etapa inicial, também devem ser traçados os diagramas de esforços internos para que sejam determinados os momentos fletores, os esforços cortantes e os momentos torsões que atuarão ao longo do comprimento da viga. Vale ressaltar, que vigas de concreto pré-moldado permitem a consideração de valores baixos de rigidez na ligação viga-pilar, logo, considerando que as vigas sejam simplesmente apoiadas, os diagramas de esforços solicitantes podem ser traçados manualmente com facilidade.

Na Etapa 2 devem ser feitas verificações com relação à armadura mínima necessária para viga. O objetivo desta verificação é garantir o comportamento dúctil do elemento. Esta etapa é tida como uma etapa inicial pois, segundo a versão do ACI de 1977, a armadura mínima estaria verificada caso o dimensionamento da viga fosse feito majorando todos os esforços de cálculo em 1/3 ou caso os esforços solicitantes fossem pelo menos 1,2 vezes superiores aos esforços que provocam fissuração na peça.

Para elementos submetidos aos efeitos de flexão e cisalhamento por forças cortantes e por torção combinados, como é o caso das vigas de seção “L”, os esforços de fissuração ( $T_{cr}$ ,  $V_{cr}$  e  $M_{cr}$ ) podem ser obtidos através da seguinte aproximação:

$$\left(\frac{T_{cr}}{T_{ocr}}\right)^2 + \left(\frac{V_{cr}}{V_{ocr}}\right)^2 + \left(\frac{M_{cr}}{M_{ocr}}\right)^2 = 1 \quad [3.2]$$

Em que:

$T_{cr}$ ;  $V_{cr}$ ;  $M_{cr}$ : esforços de fissuração para torção, força cortante e momento fletor combinados;

$T_{ocr}$ ;  $V_{ocr}$ ;  $M_{ocr}$ : esforços de fissuração para torção, força cortante e momento fletor obtidos de forma isolada.

A Equação [3.2] pode ser resolvida de maneira iterativa ou de maneira analítica, através de algumas simplificações. Essas simplificações são feitas considerando que as relações entre as cargas de fissuração  $T_{cr}/V_{cr}$  e  $M_{cr}/V_{cr}$  podem ser assumidas como sendo iguais às relações entre as solicitações de cálculo  $T_{d,máx}/V_{d,máx}$  e  $M_{d,máx}/V_{d,máx}$  respectivamente, com a última não sendo inferior à altura útil da viga ( $d$ ).

As cargas de fissuração devido aos esforços aplicados isoladamente na viga podem ser obtidas através das Equações [3.3], [3.4] e [3.5].

$$T_{ocr} = \frac{A_c^2}{p_c} \cdot 0,33 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \sqrt{1 + \frac{f_{pc}}{0,33 \cdot f_{ck}}} \quad [3.3]$$

$$V_{ocr} = b_w \cdot d \cdot 0,33 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \sqrt{1 + \frac{f_{pc}}{0,33 \cdot f_{ck}}} \quad [3.4]$$

$$M_{ocr} = \frac{I}{y_t} (0,6 \cdot \sqrt{f_{ck}} + f_{pe}) \quad [3.5]$$

Em que:

$A_c$ : área da seção transversal;

$p_c$ : perímetro da seção transversal;

$f_{ck}$ : resistência característica à compressão do concreto, em MPa;

$f_{pc}$ : tensão de compressão devido à protensão do centroide da seção;

$b_w$ : largura da base (sem considerar a fragmentação);

$d$ : altura útil da seção;

$I/y_t$ : módulo resistente da seção em relação à fibra mais tracionada;

$f_{pe}$ : tensão de compressão devido à protensão na fibra mais tracionada.

A Etapa 3 tem o objetivo de verificar o esmagamento do concreto próximo aos apoios, de maneira a validar as dimensões da seção transversal adotada. Para essa verificação, deverá ser escolhido um ângulo para a inclinação das diagonais comprimidas que esteja entre dois limites que levam em consideração uma envoltória das resistências ao cisalhamento por forças cortantes e por torção combinadas. A inequação que fornece estes limites é dada por:

$$10 + 35 \frac{\tau_n/f_{ck}}{(0,42 - 50 \cdot \epsilon_l)} < \theta < 80 - 35 \frac{\tau_n/f_{ck}}{(0,42 - 50 \cdot \epsilon_l)} \quad [3.6]$$

Em que:

$\tau_n$ : tensão de cisalhamento de cálculo;

$\epsilon_l$ : deformação por tração na armadura longitudinal;

$f_{ck}$ : resistência característica à compressão do concreto, em MPa.

A tensão de cisalhamento de cálculo ( $\tau_n$ ) é obtida através de uma combinação entre as tensões de cisalhamento provocada pelas forças cortantes e pela torção por meio da seguinte equação:

$$\tau_n = \frac{V_n}{b_v \cdot d_v} + \frac{T_n \cdot p_h}{A_{oh}^2} \quad [3.7]$$

Sendo:

$V_n = \frac{V_{sd}}{\phi}$ : máxima força cortante solicitante de cálculo;

$T_n = \frac{T_{sd}}{\phi}$ : máximo momento torsor solicitante de cálculo;

$\phi$ : coeficiente majorador das solicitações = 0,85.

$b_v$ : largura efetiva da seção para forças cortantes;

$d_v$ : altura útil da seção para forças cortantes;

$p_h$ : perímetro da seção nos eixos dos estribos;

$A_{oh}$ : área interna ao perímetro  $p_h$ .

Determinados os limites para o ângulo de inclinação das diagonais comprimidas, adota-se um ângulo  $\theta$  para o cálculo das armaduras transversais e longitudinais. Caso não seja possível resolver a inequação com os limites para o ângulo  $\theta$ , significa que a seção transversal deverá ser redimensionada pois não atende à verificação referente ao esmagamento da diagonal comprimida.

Na Etapa 4 são feitas verificações referentes ao controle das fissuras diagonais. Segundo Collins e Mitchell (1980) essa verificação será atendida caso os esforços de fissuração, calculados na Etapa 2, sejam superiores aos esforços solicitantes em serviço. Ainda segundo os autores, uma outra maneira de se fazer a verificação referente ao controle de fissuras diagonais é atendendo simultaneamente às seguintes condições:

- As deformações na armadura transversal sob à ação dos esforços solicitantes em serviço não podem exceder 0,001;
- O espaçamento da armadura transversal não pode ser superior a 30 cm;
- O espaçamento entre as barras longitudinais nas faces fissuradas do elemento não pode ser superior a 30 cm.

Na Etapa 5 é feito o dimensionamento da armadura transversal considerando uma combinação entre as armaduras para forças cortantes e armaduras para torção. Nesta etapa, são adotados estribos perpendiculares fechados para resistir aos efeitos do cisalhamento.

O primeiro passo é definir a distância em relação aos apoios para a obtenção dos esforços solicitantes. Segundo os autores, essa distância é dada por  $d_v/2 \tan \theta$ , em que  $d_v$  é a altura resistente ao cisalhamento por forças cortantes e  $\theta$  é o ângulo de inclinação das diagonais comprimidas, determinado na Etapa 3.

Obtidos os esforços solicitantes através dos diagramas, inicia-se o cálculo da armadura transversal para resistir ao cisalhamento por torção. O primeiro parâmetro a ser determinado é a altura comprimida  $a_o$ . Conforme explicação anterior, essa altura é uma simplificação do diagrama de tensões no concreto e pode ser obtida através da seguinte equação:

$$a_o = \frac{A_{oh}}{p_h} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{T_n \cdot p_h}{0,85 \cdot f_{ck} \cdot A_{oh}^2} \left( \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right)} \right] \quad [3.8]$$

Em que:

$p_h$ : perímetro da seção nos eixos dos estribos;

$A_{oh}$ : área interna ao perímetro  $p_h$ ;

$T_n$ : momento torsor solicitante de cálculo;

$f_{ck}$ : resistência característica à compressão do concreto;

$\theta$ : ângulo de inclinação das diagonais comprimidas.

Após a determinação da altura comprimida  $a_o$ , é possível determinar a área interna ao caminho do fluxo de cisalhamento por torção utilizando a Equação [3.9]:

$$A_o = A_{oh} - \frac{a_o}{2} \cdot p_h \quad [3.9]$$

Obtidos os parâmetros geométricos necessários, o dimensionamento da armadura transversal ao cisalhamento por torção (1 ramo do estribo) é feito pela Equação [3.10].

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_n \cdot \tan \theta}{2 \cdot A_o \cdot f_{yd}} \quad [3.10]$$

Em que:

$f_{yd}$ : resistência à tração de cálculo do aço;

O dimensionamento da armadura transversal ao cisalhamento por forças cortantes é feito considerando os dois ramos do estribo conforme a seguinte equação:

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_n \cdot \tan \theta}{d_v \cdot f_{yd}} \quad [3.11]$$

A armadura final é determinada somando-se a armadura calculada para a torção com a armadura calculada para forças cortantes. Como a armadura calculada para torção foi feita considerando apenas um ramo do estribo é necessário duplicar essa armadura para que o resultado final fique compatibilizado com os dois ramos considerados no dimensionamento da armadura para forças cortantes. Sendo assim, obtém-se a armadura transversal final por meio da seguinte expressão:

$$\frac{A_{v+t}}{s} = \frac{A_v}{s} + 2 \frac{A_t}{s} \quad [3.12]$$

A Etapa 6 compreende o dimensionamento da armadura longitudinal. Segundo os autores, para os casos em que as forças cortantes atuam de maneira combinada com a torção, é necessário adotar uma expressão que leve essa combinação em conta. Isto ocorre devido às tensões de cisalhamento por forças cortantes ocorrerem em direções opostas às tensões de cisalhamento por torção em determinadas regiões da seção transversal. Caso as tensões fossem tratadas separadamente, o dimensionamento seria muito conservador.

A armadura longitudinal total deverá ser dimensionada para resistir aos momentos fletores, às forças axiais, caso existam, e a uma parcela de força axial proveniente somente das tensões de cisalhamento. Essa parcela é dada pela Equação [3.13]:

$$\Delta N_u = \frac{1}{\tan \theta} \sqrt{V_{sd}^2 + \left( \frac{T_{sd} \cdot p_o}{2 \cdot A_o} \right)^2} \quad [3.13]$$

Em que:

$A_o$ : área interna ao caminho do fluxo de cisalhamento por torção (Equação [3.9]);

$p_o$ : perímetro do caminho do fluxo de cisalhamento por torção.

Com:

$$p_o = p_h - 4 \cdot a_o$$

Segundo Collins e Mitchell (1980) para vigas que não estão submetidas a forças axiais externas, pode ser conveniente dimensionar a armadura longitudinal como um acréscimo ao

momento fletor solicitante e não como uma parcela adicional de força axial. Sendo assim, a armadura longitudinal em uma certa seção poderia ser dimensionada para resistir um momento igual a  $M_d \pm 0,5 \cdot d_v \cdot \Delta N_u$ .

Collins e Mitchell (1980) também recomendam que é preciso considerar um momento negativo nas regiões próximas aos apoios, devido à tração gerada pela torção na face interna da viga. Entretanto, Klein (1986) aponta que em seus ensaios experimentais com vigas de seção “L” não houveram evidências reais da necessidade de se considerar esse momento negativo.

A última verificação a ser feita com relação a armadura longitudinal é a ancoragem da armadura em uma zona íntegra de concreto na região dos apoios. Essa verificação é feita com base na altura efetiva resistente ao cisalhamento ( $d_{ve}$ ) nessa região. Essa altura é obtida através da seguinte inequação:

$$\frac{V_n}{b_v \cdot d_{ve}} + \frac{T_n \cdot p_h}{A_{oh}^2} \leq 0,012(\theta - 10)f_{ck} \quad [3.14]$$

A altura efetiva resistente ao cisalhamento ( $d_{ve}$ ) deve ser inferior à altura disponível que é calculada por  $L_b / \tan \theta$ , com  $L_b$  sendo a largura do aparelho de apoio. Caso o ângulo  $\theta$  adotado na Etapa 3 seja superior a  $45^\circ$ , o termo  $(\theta - 10)$  presente na Expressão [3.14] deverá ser substituído por  $(\theta - 80)$ .

A Etapa 7 prevê o dimensionamento da armadura longitudinal complementar posicionada nos cantos dos estribos da aba lateral e a verificação dos espaçamentos necessários para as armaduras transversais para forças cortantes e para torção. O diâmetro necessário para armadura longitudinal complementar é obtido por meio da Equação [3.15]:

$$\phi_{aba} = s \cdot \frac{\tan \theta}{16} \quad [3.15]$$

Em que:

s: espaçamento adotado para a armadura transversal calculada na Etapa 5.

Os espaçamentos máximos permitidos para as armaduras transversais são determinados de tal modo que as diagonais comprimidas não fiquem submetidas a valores altos de tensão entre estribos. De acordo com Collins e Mitchell (1980), uma distribuição com espaçamentos limitados entre estribos promove campos de tensão de compressão mais uniformes, prevenindo a fissuração prematura do concreto. O espaçamento máximo permitido para a armadura

transversal será o menor valor entre o espaçamento calculado para as forças cortantes e o espaçamento calculado para torção conforme as Equações [3.16] e [3.17] respectivamente:

$$s_{m\acute{a}x,v} = \frac{d_v}{3 \tan \theta} \quad [3.16]$$

$$s_{m\acute{a}x,t} = \frac{p_h}{8 \tan \theta} \quad [3.17]$$

Na Etapa 8, última etapa do dimensionamento da viga de seção “L”, os autores apresentam o dimensionamento das armaduras destinadas à transferência das forças aplicadas na aba lateral para a alma da viga. Assume-se que as forças aplicadas pela laje na aba lateral são transferidas à base da alma através de uma escora diagonal comprimida, que terá o ângulo  $\theta_{aba}$  definido por:

$$\theta_{aba} = \tan^{-1} \left( \frac{h_e}{e_c} \right) \quad [3.18]$$

Em que:

$h_e$ : altura entre ramos do estribo horizontal na aba;

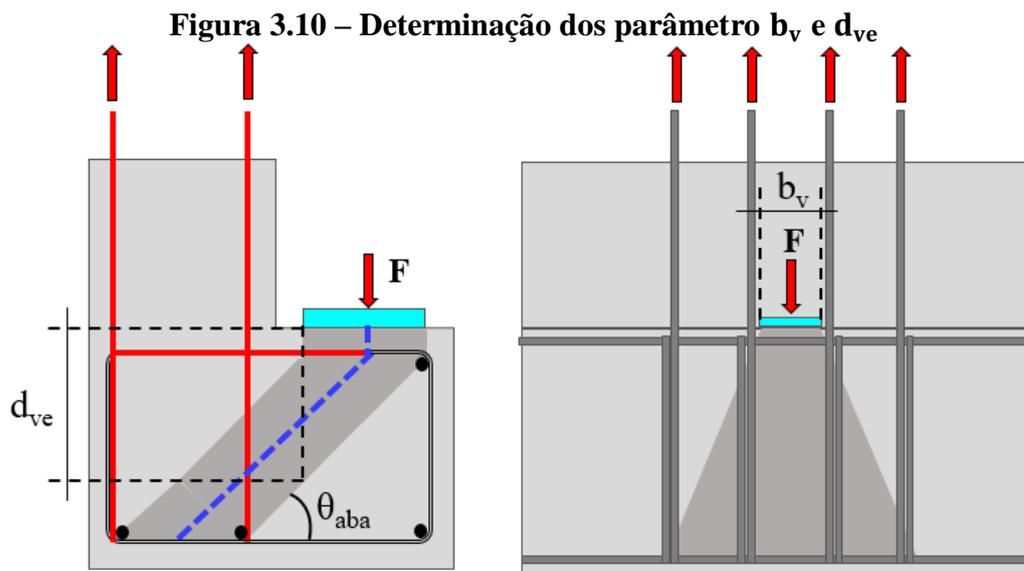
$e_c$ : excentricidade do ponto de aplicação da carga ao centro da alma da viga.

Definido o ângulo  $\theta_{aba}$  faz-se a verificação do esmagamento da escora comprimida. A equação para tal verificação é semelhante à Equação [3.14], todavia, nessa verificação o termo referente à torção não é levado em conta. Logo, a expressão modificada a ser utilizada será:

$$\frac{F_d}{0,85 \cdot b_v \cdot d_{ve}} \leq 0,012(\theta_{aba} - 10)f_{ck} \quad [3.19]$$

Da mesma maneira como foi abordado na Expressão [3.14], caso ângulo  $\theta_{aba}$  seja superior a  $45^\circ$ , o termo  $(\theta_{aba} - 10)$  presente na Expressão [3.19] deverá ser substituído por  $(\theta_{aba} - 80)$ .

Os termos  $b_v$  e  $d_{ve}$  serão obtidos em relação às dimensões da aba lateral, com  $b_v$  sendo igual à largura do apoio da laje na aba lateral, e a altura  $d_{ve}$  igual a altura efetiva resistente ao cisalhamento, conforme ilustra a Figura 3.10.



Fonte: Adaptado de Collins e Mitchell (1980)

Verificado o esmagamento da escora comprimida, o próximo passo é a determinação conjunto de armaduras necessárias para equilibrar a aba lateral. Esse conjunto é formado pelo tirante horizontal que é composto por estribos horizontais que conectam a aba lateral na alma da seção, e um tirante vertical que é composto por estribos que funcionam como armadura de suspensão para as cargas aplicadas na base da seção.

O dimensionamento do tirante horizontal é feito através da seguinte expressão:

$$A_{s,tir} = \frac{F_d \cdot \left( \frac{e_c}{0,9 \cdot (h_e + d_{est})} \right)}{f_{yd}} \quad [3.20]$$

Em que:

$F_d$ : força de cálculo da laje sobre a aba lateral;

$h_e$ : altura entre ramos do estribo horizontal na aba;

$e_c$ : excentricidade do ponto de aplicação da carga ao centro da alma da viga;

$d'$ : distância do eixo do estribo horizontal ao topo da aba;

$f_{yd}$ : resistência à tração de cálculo do aço.

Segundo Collins e Mitchell (1980) o dimensionamento da armadura de suspensão é complementar, devendo ser adicionado à armadura transversal calculada na Etapa 5. Sendo assim, a armadura necessária para suspender a força aplicada na aba lateral é obtida pela Equação [3.21].

$$A_{s,susp} = \frac{F_d \cdot \left( \frac{h - h_{ab}}{h} \right)}{f_{yd}} \quad [3.21]$$

Em que:

$F_d$ : força de cálculo da laje sobre a aba lateral;

$h$ : altura total da viga;

$h_{ab}$ : altura da aba lateral;

$f_{yd}$ : resistência à tração de cálculo do aço.

Embora o método apresentado não esteja no nível de refinamento que as teorias baseadas CFT se encontram atualmente, a aplicação feita por Collins e Mitchell (1980) de maneira específica em uma viga de seção “L” de concreto pré-moldado é tida como uma excelente fonte de conhecimento a respeito do comportamento deste tipo de seção frente ao cisalhamento, além de uma boa alternativa para uma abordagem mais racional a respeito do problema.

De acordo com Sadeghian e Vecchio (2018) os princípios básicos do CFT e do MCFT são os mesmos pois as condições de compatibilidade, equilíbrio e as relações constitutivas do concreto e do aço, em ambas as teorias, são formuladas em termos dos valores médios de tensões e deformações. Todavia, o MCFT apresenta um grau de refinamento maior na sua formulação principalmente devido a consideração de três fatores complementares que não são considerados no CFT. O primeiro fator é o “*compression softening*” que é a redução da resistência à compressão do concreto devido a presença de tensões transversais de tração. O segundo fator é o “*tension stiffening*” que é a consideração da resistência à tração do concreto entre fissuras. O terceiro fator é o “*aggregate interlock*” que é a consideração de um aumento na resistência ao cisalhamento devido ao intertravamento que ocorre entre os agregados.

Já o DSFM, conforme Sadeghian e Vecchio (2018), é uma extensão do MCFT em que foram removidas algumas restrições e foi melhorada a precisão do modelo. A Figura 3.11 ilustra com detalhes as diferenças entre as condições de equilíbrio de tensões, compatibilidades de deformações e as relações constitutivas do aço e do concreto adotados em cada teoria.

Figura 3.11 – Diferenças entre o CFT, o MCFT e o DSFM

	Compression Field Theory (CFT)		Modified Compression Field Theory (MCFT) – Formulação original		Disturbed Stress Field Model (DSFM)		
Equilíbrio	<p>Tensões médias perpendiculares à fissura</p> <p>(a)</p>	<p>Tensões médias paralelas à fissura</p> <p>(b)</p>	<p>Tensões médias paralelas à fissura</p> <p>(c)</p>	<p>Tensões locais ao longo da fissura</p> <p>(d)</p>	<p>Tensões médias perpend. à fissura</p> <p>(e)</p>	<p>Tensões médias paralelas à fissura</p> <p>(f)</p>	<p>Tensões locais ao longo da fissura</p> <p>(g)</p>
	Tensões locais não são consideradas		P/ tensões médias perpendiculares à fissura ver CFT		Diferente do MCFT, não há limite para as tensões de cisalhamento na fissura		
Compatibilidade	<p>Condição das deformações médias</p> <p>(h)</p>		<p>(i)</p>		<p>(j)</p>		
	Deform. por deslizamento não são consideradas		Cond. das deformações médias são similares ao CFT Deform. por deslizamento não são consideradas		Deformações médias    Deform. deslizamento    Deform. Totais		
Relações Constitutivas	<p>Concreto tracionado</p> <p>(k)</p>	<p>Concreto comprimido</p> <p>(l)</p>	<p>Tension stiffening</p> <p>(n)</p>	<p>Compression softening</p> <p>(o)</p>	<p>Tension softening</p> <p>(r)</p>	<p>Tension stiffening</p> <p>(s)</p>	
	<p>Comportamento do aço</p> <p>(m)</p>	<p>Tensões de cisalhamento na fissura</p> <p>(p)</p>	<p>Comportamento do aço</p> <p>(q)</p>	<p>Compression softening</p> <p>(u)</p>	<p>Comportamento do aço</p> <p>(v)</p>		

Fonte: Adaptado de Sadeghian e Vecchio (2018)

### 3.2.2 Método Analítico Proposto por Zia e Hsu (2004)

#### 3.2.2.1 Conceituação

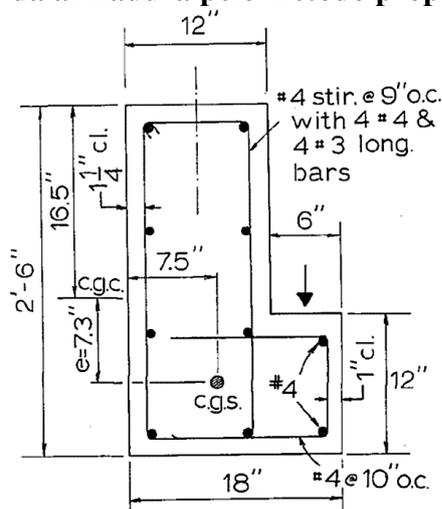
O método proposto por Zia e Hsu (2004) é recomendado atualmente tanto pelo manual de dimensionamento do PCI (2010) quanto pela atual versão do ACI-318:2019 como um método alternativo ao modelo tradicional de treliça espacial para o dimensionamento ao cisalhamento por forças cortantes e por torção. Segundo os autores, o método tem se mostrado confiável, preciso e de fácil utilização.

O método é na verdade uma adaptação da proposta feita por Zia e McGee (1974) com algumas modificações e refinamentos. Sendo assim, para que se entenda a forma como o método é aplicado atualmente, é necessário compreender as considerações feitas pelos autores quando o método foi desenvolvido originalmente.

O método proposto por Zia e McGee (1974), surgiu com o objetivo de estender as recomendações feitas pelo ACI-318:1971 referentes ao dimensionamento a torção em vigas de concreto, visto que, o documento normativo americano abordava somente o dimensionamento a torção de vigas de concreto armado. O procedimento proposto visava possibilitar também o dimensionamento a torção em vigas de concreto protendido.

Assim como Collins e Mitchell (1980), os autores fizeram uma aplicação direta do método em uma viga de seção “L” através de um exemplo numérico completo. Neste exemplo são abordadas, passo a passo, todas as considerações e verificações necessárias para o dimensionamento da viga ao cisalhamento por forças cortantes e por torção combinados e por fim, apresentado o detalhamento final da seção conforme ilustra a Figura 3.12.

**Figura 3.12 - Detalhamento da armadura pelo método proposto por Zia e McGee (1974)**



Fonte: Adaptado de Zia e McGee (1974)

O desenvolvimento da metodologia consistiu, basicamente, na determinação de equações analíticas que previssem a parcela de contribuição do concreto na resistência última do elemento, além da obtenção de um conjunto de armadura transversal e longitudinal que fosse suficiente para atender ao restante da resistência necessária. Também foram desenvolvidas equações complementares para determinação das máximas tensões de cisalhamento admissíveis na viga além de equações para determinação da armadura mínima necessária. Essas verificações complementares tinham o objetivo de evitar a ruptura frágil do concreto antes que ocorresse o escoamento da armadura.

Diferente da metodologia baseada no CFT, o método proposto por Zia e McGee (1974) não considera que a seção resistente seja uma seção vazada equivalente. Neste método, a seção transversal adotada no dimensionamento é composta por um somatório de retângulos que compõem o formato da seção transversal, não sendo descartada nenhuma parte da seção.

As equações empíricas propostas para utilização do método tem uma relação estreita com recomendações do ACI-318:1971 e foram calibradas com base em 394 resultados experimentais disponíveis na literatura. Estes experimentos compreendiam o comportamento de vigas de concreto protendido submetidas à torção, tanto em seções retangulares quanto em seções com abas (“L”, “I” e “T”). Portanto, fica evidente que a ideia principal do método não foi criar uma abordagem racional para o problema, mas sim, oferecer uma alternativa de fácil utilização e que fornecesse uma margem razoável de segurança. Tal segurança foi verificada experimentalmente por Klein (1986), e mais recentemente por Lucier et al. (2011a) e Hariharan et al. (2019) que utilizaram o método para calibrar o resultado de uma nova metodologia prevendo a utilização de estribos abertos.

Ao longo dos anos, o método passou por duas alterações. A primeira alteração foi feita por Zia e Hsu, em 1978, em uma convenção da “*American Society of Civil Engineers*” (ASCE), mas nunca chegou a ser oficialmente publicada. A proposta feita pelos autores continha poucos refinamentos com relação ao método original e visava principalmente adaptar as equações para que fossem expressas em termos de forças e momentos, visto que, até então todo o procedimento era feito em termos de tensões.

Finalmente, Zia e Hsu (2004), com o objetivo de refinar ainda mais o método, propuseram uma segunda alteração na proposta inicial. Segundo o texto do ACI-318:2019, o método pode ser utilizado com uma alternativa ao método tradicional baseado no modelo de treliça espacial para vigas com relação entre a altura e a largura da alma ( $h/b_w$ ) igual ou superior a 3 e estribos fechados. Apesar da norma americana apontar que o método tem sido utilizado

extensamente com sucesso para o dimensionamento de vigas de seção “L” de concreto pré-moldado protendido, o método foi desenvolvido para ser utilizado também em vigas de concreto armado.

De maneira geral, os principais pontos alterados pelos autores em relação aos procedimentos propostos inicialmente foram a adoção de novas equações para determinação da armadura mínima necessária e a revisão da equação para a máxima resistência a torção da viga. Muito embora essas alterações tenham sido feitas, a essência do método ainda se manteve inalterada. O principal objetivo é a determinação das parcelas de contribuição, do concreto e do aço, na composição da resistência a torção final da peça, conforme a Equação [3.22].

$$T_{sd} \leq \phi T_r \quad [3.22]$$

Em que:

$$T_r = T_c + T_{sw} \quad [3.23]$$

Sendo:

$T_{sd}$ : máximo momento torsor solicitante de cálculo;

$T_r$ : resistência a torção característica da viga;

$T_c$ : parcela de resistência promovida pelo concreto;

$T_{sw}$ : parcela de resistência promovida pelo aço;

$\phi$ : coeficiente minorador da resistência.

Assim como na proposta feita por Collins e Mitchell (1980) a metodologia de dimensionamento apresentada por Zia e Hsu (2004) contempla os efeitos do cisalhamento por torção e cortante de maneira combinada e será apresentada a seguir segundo as etapas especificadas pelos autores.

### 3.2.2.2 Etapas de Dimensionamento

Algumas equações apresentadas a seguir estão diferentes das equações originais apresentadas em Zia e Hsu (2004) pois foram todas adaptadas para utilização em MPa. Também foi considerado a utilização de um concreto com peso específico normal, logo, adotou-se em todas as equações o valor de  $\lambda = 1$ .

Na Etapa 1 devem ser determinados os carregamentos de cálculo que, assim como no CFT, são compostos essencialmente pelo peso próprio da viga, peso próprio da laje, peso do capeamento de concreto, quando houver, cargas acidentais previstas para utilização da laje e quaisquer outras cargas que por ventura possam atuar durante a vida útil da estrutura. Também devem ser traçados os diagramas de esforços internos para que sejam determinados os momentos fletores, os esforços cortantes e os momentos torsões que atuarão ao longo do comprimento da viga.

Na Etapa 2 deve ser calculado um parâmetro  $C_t$  que depende exclusivamente das propriedades geométricas da seção. Este parâmetro é calculado a partir da composição de dois retângulos que formam a seção transversal de uma viga de seção “L”. Os retângulos devem ser posicionados dentro da seção conforme as duas opções apresentadas na Figura 3.13, de tal modo que o valor da propriedade torsional  $\sum(x^2 \cdot y)$  seja máximo.

**Figura 3.13 – Divisão da seção transversal em retângulos**



Fonte: Autor (2020)

O parâmetro  $C_t$  é utilizado no cálculo do máximo momento torsor permitido para viga e no cálculo da armadura longitudinal da seção. O cálculo desse parâmetro é feito por meio da seguinte expressão:

$$C_t = \frac{b_w \cdot d}{\sum(x^2 \cdot y)} \quad [3.24]$$

Em que:

$b_w$ : largura da alma;

$d$ : altura útil da viga, calculada pela distância da fibra mais comprimida ao cg da armadura;

$\Sigma(x^2 \cdot y)$ : propriedade torsional na seção (adotado o máximo valor);

Sendo:

x: menor dimensão de um retângulo qualquer que compõe a seção;

y: maior dimensão de um retângulo qualquer que compõe a seção.

A Etapa 3 compreende a determinação do momento torsor mínimo. Caso o momento torsor solicitante seja menor que o momento torsor mínimo, o método prevê que o dimensionamento à torção da viga pode ser desconsiderado. Ou seja, somente a armadura mínima para torção é capaz de atender as solicitações impostas pelos carregamentos. A determinação do momento fletor mínimo é feito através da Equação [3.25].

$$T_{\min} = \emptyset \cdot 0,041 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \gamma \cdot \Sigma(x^2 \cdot y) \quad [3.25]$$

Em que:

$\emptyset$ : coeficiente redutor da resistência;

$f_{ck}$ : resistência característica à compressão do concreto, em MPa;

$\Sigma(x^2 \cdot y)$ : propriedade torsional na seção;

$\gamma$ : fator de cálculo devido ao efeito da protensão.

Com:

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{10 \cdot \sigma}{f_{ck}}}$$

Sendo:

$\sigma = F_p/A_c$ : tensão média de compressão na viga devido às forças de protensão, incluídas as perdas totais de protensão.

Percebe-se pela Equação [3.25] que a utilização da protensão tem um efeito benéfico para seção transversal, aumentando o valor do momento torsor mínimo o qual não é necessário dimensionar a seção à torção.

Na Etapa 4 deve-se verificar o máximo momento torsor suportado pela viga. Nesta etapa, caso o momento torsor solicitante supere o máximo momento torsor suportado, será necessário redimensionar a peça. Esta verificação é necessária para que seja evitada a ruptura

frágil do concreto, ou seja, aquela que ocorre de maneira brusca e não apresenta avisos prévios. A expressão que fornece o valor do máximo momento torsor suportado pela viga é a seguinte:

$$T_{\text{máx}} = \frac{0,028 \cdot C \cdot \gamma \cdot \sqrt{f_{\text{ck}}} \cdot \Sigma(x^2 \cdot y)}{\sqrt{1 + \left(\frac{C \cdot V_{\text{sd}}}{30 \cdot C_t \cdot T_{\text{sd}}}\right)^2}} \quad [3.26]$$

Em que:

$$C = 12 - 10(\sigma/f_{\text{ck}});$$

$\gamma$ : fator de cálculo devido ao efeito da protensão;

$f_{\text{ck}}$ : resistência característica à compressão do concreto, em MPa;

$\Sigma(x^2 \cdot y)$ : propriedade torsional na seção;

$V_{\text{sd}}$ : força cortante de cálculo a uma distância  $h/2$  do apoio;

$T_{\text{sd}}$ : máximo momento torsor solicitante de cálculo;

A Etapa 5 pode ser considerada uma das etapas principais do método proposto por Zia e Hsu (2004) pois são calculadas as parcelas de resistência do concreto frente às forças cortantes ( $V_c$ ) e aos momentos torsores ( $T_c$ ) atuando de maneira combinada. Ambas as parcelas são calculadas por meio de expressões que levam em conta a interação existente entre as forças cortantes e os momentos torsores.

Para se obter as parcelas  $V_c$  e  $T_c$  é necessário, primeiramente, que se conheça as parcelas puras de resistência do concreto  $V_c'$  e  $T_c'$ , ou seja, com as forças cortantes e a torção atuando de maneira isolada. Para o cálculo da parcela de resistência do concreto somente para forças cortantes ( $V_c'$ ), Zia e Hsu (2004) utilizam as recomendações do ACI-318:2002. Neste trabalho o cálculo de  $V_c'$  será reformulado para que atenda às recomendações da última versão da norma americana ACI-318:2019.

As equações que definem a resistência ao cisalhamento por forças cortantes em elementos lineares de concreto armado convencional foram alteradas na atual versão do ACI-318:2019 com o objetivo principal de incluir o efeito da altura da seção (“*size effect*”), além dos efeitos da taxa de armadura longitudinal na resistência ao cisalhamento.

Sendo assim, para as vigas de concreto armado convencional, caso a armadura transversal seja maior ou igual a armadura mínima, o cálculo da parcela de resistência do

concreto somente para forças cortantes ( $V_c'$ ) pode ser feito por meio da seguinte equação simplificada apresentada no item 22.5.5 do ACI 318:2019:

$$V_c' = \left( 0,17 \cdot \sqrt{f_{ck}} + \frac{N_{sd}}{6 \cdot A_c} \right) \cdot b_w \cdot d \leq 0,42 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot b_w \cdot d \quad [3.27]$$

Em que:

$$\frac{N_{sd}}{6 \cdot A_c} \leq 0,05 \cdot f_{ck}$$

$N_{sd}$ : força axial de cálculo [compressão (+), tração (-)];

$A_c$ : área da seção;

$f_{ck}$ : resistência característica à compressão do concreto, em MPa;

$b_w$ : largura da alma da seção;

$d$ : altura útil da seção;

Para determinação do ( $V_c'$ ) em vigas de concreto protendido, também é permitido a utilização de um método aproximado de cálculo sempre que a força de protensão no infinito, consideradas todas as perdas, for maior ou igual a 40% da força resultante de tração na seção no tempo zero, que compreende a soma entre a força de tração na armadura ativa e a força de tração na armadura passiva. O  $V_c'$  a ser utilizado deverá ser o menor valor entre as Equações [3.28], [3.29] e [3.30], não devendo ser inferior a  $0,17 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot b_w \cdot d$ .

$$V_c' = \left( 0,05 \cdot \sqrt{f_{ck}} + 4,8 \cdot \frac{V_{sd} \cdot d_p}{M_{sd}} \right) \cdot b_w \cdot d \quad [3.28]$$

$$V_c' = (0,05 \cdot \sqrt{f_{ck}} + 4,8) \cdot b_w \cdot d \quad [3.29]$$

$$V_c' = 0,42 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot b_w \cdot d \quad [3.30]$$

Em que:

$f_{ck}$ : resistência característica à compressão do concreto, em MPa;

$b_w$ : largura da alma da seção;

$d$ : altura útil da seção;

$V_{sd}$ : força cortante de cálculo na seção considerada;

$M_{sd}$ : momento fletor de cálculo na seção considerada;

$d_p$ : distância do cg da armadura ativa à borda mais comprimida.

Para a determinação da parcela de resistência do concreto somente para torção ( $T_c'$ ), Zia e Hsu (2004) recomendam a utilização da seguinte expressão:

$$T_c' = 0,066 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \Sigma(x^2 \cdot y) \cdot (2,5 \cdot \gamma - 1,5) \quad [3.31]$$

Em que:

$f_{ck}$ : resistência característica à compressão do concreto, em MPa;

$\Sigma(x^2 \cdot y)$ : propriedade torsional na seção;

$\gamma$ : fator de cálculo devido ao efeito da protensão.

Obtidas as parcelas puras de resistência do concreto  $V_c'$  e  $T_c'$ , parte-se para determinação das parcelas de resistência do concreto  $V_c$  e  $T_c$  que contemplam os efeitos combinados das tensões de cisalhamento por forças cortantes e por torção. A determinação destes parâmetros é feita por meio das Equações [3.32] e [3.33].

$$V_c = \frac{V_c'}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_c' \cdot T_{sd}}{T_c' \cdot V_{sd}}\right)^2}} \quad [3.32]$$

$$T_c = \frac{T_c'}{\sqrt{1 + \left(\frac{T_c' \cdot V_{sd}}{V_c' \cdot T_{sd}}\right)^2}} \quad [3.33]$$

A Etapa 6 compreende o cálculo da armadura transversal para torção, que será composta por estribos fechados. Neste procedimento, deve ser dimensionada uma quantidade de armadura que seja suficiente para suportar o valor de  $T_{sw}$ , que é tomado como a diferença entre a resistência última necessária ( $T_r$ ) e a parcela de resistência do concreto ( $T_c$ ) já calculada. Sendo assim, o dimensionamento da armadura transversal ao cisalhamento por torção (1 ramo do estribo) é feito por meio seguinte equação:

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_{sw}}{\alpha_t \cdot x_1 \cdot y_1 \cdot f_{yd}} = \frac{\frac{T_r}{\phi} - T_c}{\alpha_t \cdot x_1 \cdot y_1 \cdot f_{yd}} \quad [3.34]$$

Em que:

$T_{sw}$ : momento torsor a ser resistido somente pelo estribo fechado;

$f_{yd}$ : resistência à tração de cálculo do aço.

$x_1$ : menor dimensão entre eixos do estribo fechado;

$y_1$ : maior dimensão entre eixos do estribo fechado;

$\alpha_t = 0,66 + 0,33(y_1/x_1) \leq 1,5$ ;

$\emptyset$ : coeficiente minorador da resistência = 0,75.

A Etapa 7 é semelhante a Etapa 6, todavia, nesta etapa o cálculo é feito para armadura transversal relativa ao cisalhamento por forças cortantes, que também será composta por estribos fechados. Nessa etapa, também deverá ser dimensionada uma quantidade de armadura que seja suficiente para suportar o valor de  $V_s$ , que é tomado como a diferença entre a resistência última necessária ( $V_r$ ) e a parcela de resistência do concreto ( $V_c$ ) já calculada. Logo, o dimensionamento da armadura transversal ao cisalhamento por forças cortantes (2 ramos do estribo) é feito por meio seguinte equação:

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_{sw}}{d \cdot f_{yd}} = \frac{\frac{V_r}{\emptyset} - V_c}{d \cdot f_{yd}} \quad [3.35]$$

Em que:

$V_{sw}$ : força cortante a ser resistida somente pelo estribo fechado;

d: altura útil da seção;

$f_{yd}$ : resistência à tração de cálculo do aço;

$\emptyset$ : coeficiente minorador da resistência = 0,75.

A Etapa 8 compreende o cálculo da armadura transversal final a ser detalhada na seção, que deverá ser o maior valor entre a armadura transversal calculada e a armadura mínima necessária.

De modo semelhante ao CFT, como a armadura calculada para torção foi feita considerando apenas um ramo do estribo é necessário duplicar essa armadura para que o resultado final fique compatibilizado com os dois ramos considerados no dimensionamento da armadura para forças cortantes. Sendo assim, obtém-se a armadura transversal total do mesmo modo como foi apresentado na Equação [3.12].

A armadura mínima deve ser resistente às tensões de cisalhamento por forças cortantes e por torção prevenindo uma possível ruptura frágil da seção. A equação que prevê a armadura mínima necessária, para os dois ramos do estribo, é a seguinte:

$$\left(\frac{A_{v+t}}{s}\right)_{\min} = 0,34 \left(1 + 12 \frac{\sigma}{f_{ck}}\right) \frac{b_w}{f_{yd}} \leq 1,38 \cdot \frac{b_w}{f_{yd}} \quad [3.36]$$

Em que:

$f_{yd}$ : resistência à tração de cálculo do aço, em MPa.

Os espaçamentos máximos permitidos para os estribos são determinados separadamente para forças cortantes e para torção conforme as recomendações do ACI-318:2019. Para as forças cortantes a norma prevê duas condições. Caso a parcela de força a ser resistida somente pelos estribos fechados ( $V_{sw}$ ) seja menor ou igual a  $0,33 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot b_w \cdot d$ , com o  $f_{ck}$  em MPa, o espaçamento máximo entre estribos para vigas de concreto armado deve ser o menor valor entre  $d/2$  e 24 polegadas (60,96 cm) e para vigas de concreto protendido o menor valor entre  $3h/4$  e 24 polegadas (60,96 cm). A segunda condição é caso a força ( $V_{sw}$ ) seja superior a  $0,33 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot b_w \cdot d$ , com o  $f_{ck}$  em MPa, os espaçamentos máximos devem ser reduzidos pela metade. Logo, para vigas de concreto armado o espaçamento máximo deverá ser o menor valor entre  $d/4$  e 12 polegadas (30,48 cm) e para vigas de concreto protendido o menor valor entre  $3h/8$  e 12 polegadas (30,48 cm). Para torção a norma prevê que o espaçamento máximo para os estribos seja o menor valor entre  $p_h/8$  e 12 polegadas (30,48 cm), com  $p_h$ , assim como no CFT, sendo o perímetro da seção nos eixos dos estribos.

Partindo do pressuposto em que a armadura transversal final será uma composição entre as armaduras para forças cortantes e para torção ( $A_{v+t}$ ), o espaçamento máximo a ser adotado para os estribos fechados deverá ser o menor entre todas as recomendações feitas acima, visando atender tanto aos critérios do cisalhamento por forças cortantes como aos critérios do cisalhamento por torção.

Na Etapa 9 determina-se a armadura longitudinal que é destinada a resistir às componentes horizontais das tensões aplicadas na diagonal. Segundo Zia e Hsu (2004), essa armadura deverá ser distribuída ao longo do perímetro dos estribos fechados e sua quantidade deve ser aproximadamente a mesma quantidade dos estribos para torção calculados na Etapa 6 ou calculada através de uma expressão que leva em conta a força cortante  $V_{sd}$  e o parâmetro  $C_t$

calculado na Etapa 2. Sendo assim, a armadura longitudinal adotada deverá ser a maior entre as seguintes expressões:

$$A_1 = \frac{2 \cdot A_t \cdot (x_1 + y_1)}{s} \quad [3.37]$$

$$A_1 = \left[ \frac{400 \cdot x \cdot s}{f_{yd}} \left( \frac{T_{sd}}{T_{sd} + \frac{V_{sd}}{3 \cdot C_t}} \right) - 2 \cdot A_t \right] \cdot \left( \frac{x_1 + y_1}{s} \right) \quad [3.38]$$

Em que:

$x$ : é a menor dimensão do retângulo adotado para alma da seção;

$f_{yd}$ : resistência à tração de cálculo do aço, em MPa.

Apesar do método ser sido verificado e validado experimentalmente por Klein (1986), e mais recentemente por Lucier et al. (2011a) e Hariharan et al. (2019), de acordo com Logan (2007) e Lucier et al. (2011a) quando o método é utilizado em vigas de seção “L” de peitoril alto e delgado, geralmente resulta em valores muito conservadores e taxas elevadas de aço, provocando um congestionamento das armaduras, principalmente nas regiões próximas aos apoios. Sendo assim, Lucier et al. (2011b) propôs então uma metodologia alternativa, com estribos abertos, específica para o dimensionamento de vigas de seção “L” com peitoril alto e delgado que será apresentada de maneira genérica no tópico a seguir pois não atende aos requisitos do item 18.3.4 da ABNT NBR 6118:2014, que aponta que os estribos devem ser fechados.

### 3.2.3 Método Analítico Proposto por Lucier et al. (2011b)

#### 3.2.3.1 Conceituação

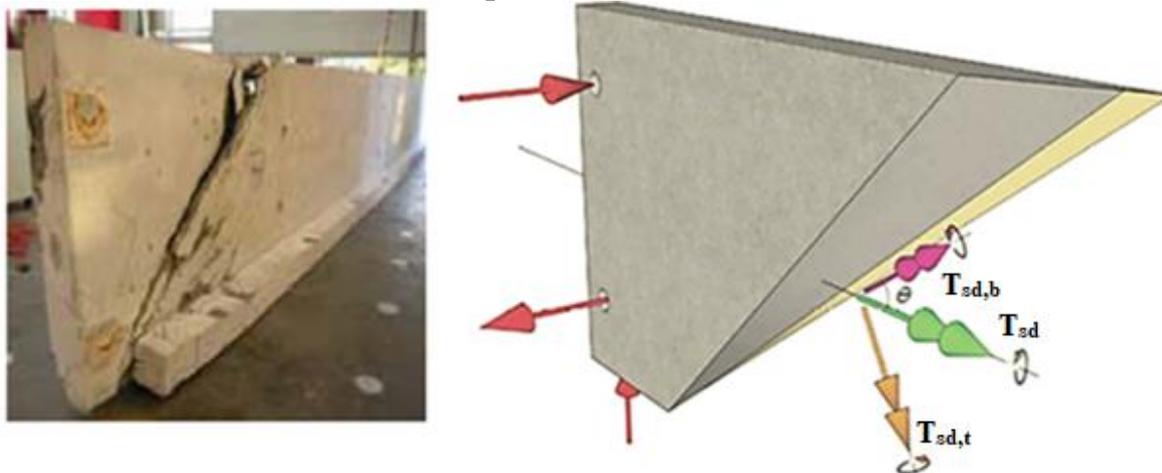
O método proposto por Lucier et al. (2011b) é atualmente recomendado pelo ACI-318:2019 como uma alternativa ao dimensionamento a torção de vigas protendidas de seção “L” com peitoril alto e delgado, com relação entre a altura e a largura da alma ( $h/b_w$ ) igual ou superior a 4,5. A ideia central do método é possibilitar o uso de armaduras abertas na alma, ao invés de utilizar estribos fechados tradicionalmente adotados em todas as outras teorias e

métodos. Segundo os autores, a utilização de armaduras abertas na alma simplifica muito a fabricação e reduz os custos de produção.

A motivação para o desenvolvimento do método surgiu de observações experimentais feitas por Raths (1984), Klein (1986), Logan (2007) e Lucier et al. (2007) a respeito dos mecanismos de ruptura em vigas de seção “L” com peitoril alto e delgado. De acordo com as pesquisas, as vigas de seção “L” que apresentam essas características, normalmente utilizadas em edifícios garagem, não apresentam fragmentação do concreto e fissuração em espiral. O mecanismo de ruptura observado é através de uma fissura crítica diagonal na face interna da viga, próxima ao apoio e com superfície inclinada a 45° com a horizontal.

Diferente do procedimento proposto por Zia e Hsu (2004), onde as equações foram puramente calibradas a partir de resultados de ensaios experimentais obtidos na literatura, este método tem um caráter mais racional envolvido no seu desenvolvimento. Os autores propuseram, com base em análises tridimensionais não-lineares por elementos finitos e no extenso programa experimental conduzido por Lucier et al. (2011a), um modelo resistente baseado no equilíbrio de forças presentes no plano de ruptura diagonal, conforme ilustra a Figura 3.14.

**Figura 3.14 - Modelo analítico proposto com base no mecanismo de ruptura observado experimentalmente**



Fonte: Adaptado de Lucier et al. (2011b)

Apesar da proposta feita por Lucier et al. (2011b) ter um caráter mais racional, os autores limitam a utilização do procedimento de cálculo somente em vigas que possuam as mesmas características daquelas utilizadas no programa experimental, sendo: a) suportadas nos apoios por dois pontos de fixação, formando um binário horizontal resistente à torção; b) simplesmente

apoiadas para as forças verticais; c) carregadas através de abas laterais contínuas ou segmentadas localizadas na base da viga em somente um dos lados; d) compostas por uma relação entre a altura e a largura da alma ( $h/b_w$ ) igual ou maior que 4,6.

De acordo com Lucier et al. (2011b), analisando os panoramas de fissuração das vigas ensaiadas, é possível observar o desenvolvimento de três regiões distintas ao longo do comprimento da viga. A primeira região, definida como região de extremidade, se estende a uma distância, a partir da face do apoio, aproximadamente igual a altura ( $h$ ) da viga. Nessa região, os experimentos mostraram que se desenvolve uma fissura diagonal crítica, na face interna da viga, com um ângulo de aproximadamente  $45^\circ$  com a horizontal. A ruptura observada nessa região indica claramente a presença de uma flexão de placa e o cisalhamento por forças cortantes e por torção. A segunda região, definida como região de transição, se estende a uma distância de aproximadamente duas vezes a altura da viga ( $2h$ ) e apresenta fissuras a aproximadamente  $30^\circ$  com a horizontal. Comparando com a região de extremidade, a região de transição apresenta diminuição nos efeitos provocados pelo cisalhamento e um aumento nos momentos fletores. A terceira e última região observada, definida como região de flexão, é tida como o trecho que vai do fim da região de transição até o eixo central da viga, no meio do vão. Esta região é dominada por fissuras verticais em ambas as faces devido às flexões dentro e fora do plano. Nesta região os momentos fletores prevalecem sobre as forças cortantes e os momentos torsores.

**Figura 3.15 - Divisão das três regiões que compõem a viga, conforme panorama de fissuração apresentado em observações experimentais e numéricas**



Fonte: Adaptado de Lucier et al. (2011b)

De modo geral, o método consiste em verificar se as componentes ortogonais do momento torsor solicitante (Figura 3.14), responsáveis pela flexão da alma fora o plano e pelo

cisalhamento por torção da alma em torno de um eixo perpendicular a fissura diagonal, são inferiores as componentes resistentes da viga, conforme as Equações [3.39] e [3.40].

$$T_{sd} \cdot \cos\theta = T_{sd,b} \leq \phi \cdot T_{r,b} \quad [3.39]$$

$$T_{sd} \cdot \sin\theta = T_{sd,t} \leq \phi \cdot T_{r,t} \quad [3.40]$$

Em que:

$T_{sd}$ : momento torsor solicitante de cálculo;

$T_{sd,b}$ : componente que tende a fletir a alma fora do plano;

$T_{sd,t}$ : componente que tende a cisalhar a viga por torção;

$T_{r,b}$ : resistência da alma a flexão fora do plano;

$T_{r,t}$ : resistência a torção no plano de ruptura diagonal;

$\theta$ : ângulo de inclinação da fissura;

$\phi$ : coeficiente minorador de resistência da seção.

Diferentemente das propostas feitas por Collins e Mitchell (1980) e Zia e Hsu (2004), este método não contempla os efeitos do cisalhamento por torção e cortante de maneira combinada. Segundo Lucier et al. (2011b) o método ignora a influência das tensões de cisalhamento por torção sobre as tensões de cisalhamento por esforços cortantes baseado nos bons resultados obtidos no programa experimental. Sendo assim, o método contempla apenas o dimensionamento a torção e será apresentado a seguir segundo as etapas de dimensionamento especificadas pelos autores.

### 3.2.3.2 Etapas de Dimensionamento

Como visto anteriormente, as etapas do método proposto por Lucier et al. (2011b) será apresentado de maneira mais genérica pois não é o foco deste trabalho tratar do dimensionamento de vigas de seção “L” com arranjos abertos de armadura, visto que, a ABNT NBR 6118:2014 aponta no item 18.3.4 que os estribos para torção devem ser fechados em todo o seu contorno.

Na Etapa 1, de maneira semelhante aos outros métodos, devem ser determinados os carregamentos de cálculo e os diagramas de momentos fletores, momentos torsores e esforços cortantes. A excentricidade para o cálculo da torção deve ser tomada como a distância entre o ponto de aplicação da carga e o centro da alma.

Na Etapa 2 é feita a divisão da viga em três regiões distintas, conforme apresentado na Figura 3.15. A diferença entre o panorama de fissuração observado na região de extremidade e na região de transição é levada em conta no cálculo das armaduras resistentes às componentes do momento torsor solicitante.

A Etapa 3 é necessária para que se faça a verificação da capacidade resistente da seção transversal a componente que tende a cisalhar a viga por torção ( $T_{sd,t}$ ). Esta etapa baseia-se na resistência do concreto no plano de ruptura, considerando que a distribuição de tensões provocada pela componente  $T_{sd,t}$  seja linear e atinja um valor máximo nos extremos do plano de ruptura. Os parâmetros necessários para obtenção da componente resistente ( $T_{r,t}$ ) são: a resistência do concreto, a altura da viga ( $h$ ) e a espessura efetiva da alma ( $b_w$ ). Esta espessura é tomada como sendo a largura da alma, descontados o cobrimento da armadura e o diâmetro da armadura transversal da face interna da viga, que deverá ser estimada para que esse parâmetro possa ser obtido.

A Etapa 4 compreende o dimensionamento da viga à flexão, que pode ser em concreto armado ou concreto protendido. Os autores recomendam a utilização do manual de dimensionamento do PCI para determinação e detalhamento da armadura. Conforme visto anteriormente, o dimensionamento a flexão em vigas de seção “L” não difere dos outros tipos de seção transversal.

Na Etapa 5, é feito o dimensionamento da viga ao cisalhamento por forças cortantes. Os autores recomendam que seja utilizado o manual de dimensionamento do PCI (2010) para as verificações da capacidade resistente do concreto e para o cálculo da armadura transversal necessária. Segundo Lucier et al. (2011b), nesta etapa, a excentricidade das cargas atuantes pode ser ignorada.

A Etapa 6 compreende a primeira parte do dimensionamento à torção, onde é calculada a armadura necessária para resistir à flexão de placa provocada pela componente  $T_{sd,b}$ . O cálculo é feito separadamente para a região de transição e para a região de extremidade, não havendo necessidade de fazer o cálculo para a região de flexão. A armadura calculada deve ser posicionada na transversal, na face interna da alma, região onde atuam as tensões de tração provocadas pela flexão de placa. Os autores organizaram a expressão que fornece a armadura transversal de modo que seja necessário entrar somente com o valor do momento torsor solicitante ( $T_{sd}$ ), sem decompor. Os outros parâmetros necessários são: a resistência do

concreto, a resistência do aço, a altura da viga ( $h$ ), a espessura efetiva da alma ( $b_w$ ) e o ângulo de inclinação da fissura, conforme a região considerada.

Na Etapa 7 determina-se a armadura transversal efetiva a ser colocada na parte interna da alma da viga. Essa armadura deverá ser uma composição entre as armaduras obtidas das Etapas 5 e 6. Todavia, segundo os autores, armaduras adicionais como a armadura de suspensão da carga excêntrica e a armadura contra o impacto de veículos podem governar essa etapa.

A Etapa 8 consiste em uma verificação adicional da capacidade de resistência a flexão de placa no plano 2-2 localizado na região de extremidade a depender da posição do ponto de apoio horizontal, conforme ilustra a Figura 3.15. Este plano de ruptura pode ser mais crítico que o plano 1-1.

A Etapa 9 é uma etapa rápida em que é feito o dimensionamento da armadura transversal necessária na face externa da viga. O método prevê que seja adotado metade da armadura transversal calculada na Etapa 5.

Na Etapa 10 é calculado a armadura longitudinal necessária para resistir a flexão de placa na região de transição e na região de extremidade. Não é necessário considerar a flexão de placa na região de flexão. Os autores também organizaram a expressão que fornece a armadura longitudinal de modo que seja necessário entrar somente com o valor do momento torsor solicitante ( $T_{sd}$ ), sem decompor. Os outros parâmetros necessários são: a resistência do concreto, a resistência do aço, a espessura efetiva da alma ( $b_w$ ) e o ângulo de inclinação da fissura, conforme a região considerada.

A Etapa 12, última etapa do método proposto por Lucier et al. (2011b), é composta pelo detalhamento final da viga. Segundo os autores, devem ser adotadas as recomendações e detalhamentos presentes no manual de dimensionamento do PCI, que compreende o dimensionamento e detalhamento da aba lateral, das ligações com os apoios, da armadura de suspensão da carga excêntrica, dos impactos de veículos, além de armaduras destinadas a efeitos complementares que devam ser considerados. Os autores também recomendam que sejam colocadas barras ou cordoalhas na direção longitudinal posicionadas nos quatro cantos da alma para controlar possível fissuras provocadas pela flexão lateral distante dos apoios.

Hariharan et al. (2019), com o objetivo validar a utilização do método proposto por Lucier et al. (2011b) em vigas compactas de seção “L” ( $h/b_w < 4,5$ ), avaliou o experimentalmente, em escala real, o comportamento de quatro vigas de seção “L” armadas com estribos abertos. Uma das vigas foi dimensionada com estribos fechados, através do

método proposto por Zia e Hsu (2004), para servir como parâmetro de comparação para os resultados das outras três vigas. Os resultados do estudo mostraram a viabilidade de se utilizar estribos abertos como uma alternativa aos estribos fechados também em vigas de seção “L” com seção compacta. Segundo os autores, as quatro vigas mostraram resultados satisfatórios frente a todos os estágios de carregamento, mostrando o potencial do método e a possibilidade de se adotar uma alternativa simplificada de armação não só em vigas de “L” com peitoril alto e delgado. Embora os resultados tenham sido satisfatórios, a viga armada com estribos fechados foi a que apresentou a maior resistência nas regiões de extremidades, de modo que, a ruptura não pode ser observada pois o ensaio teve que ser interrompido para prevenir danos aos equipamentos no laboratório.

### 3.2.4 Método Analítico Recomendado pela ABNT NBR 6118:2014

#### 3.2.4.1 Conceituação

As prescrições da norma brasileira ABNT NBR 6118:2014 para o dimensionamento de elementos lineares de concreto armado ou protendido sujeitos aos efeitos das tensões de cisalhamento, tanto para forças cortantes como para torção, são baseadas em analogias de treliça. Para as forças cortantes, o modelo de treliça é plano, de banzos paralelos, associado a mecanismos resistentes complementares desenvolvidos no interior do elemento estrutural. Para a torção, o modelo de treliça é espacial, definida a partir de um modelo de seção vazada equivalente ao elemento estrutural a ser dimensionado. Para ambos os modelos de treliça, as diagonais comprimidas formadas por elementos de concreto poderão ter inclinações que podem ser arbitradas pelo projeto no intervalo de  $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ .

Conforme as prescrições do item 17.7.2, na combinação de torção com força cortante, o dimensionamento deve prever ângulos de inclinação para as diagonais comprimidas coincidentes para os dois esforços. Pelo fato de ambos os modelos de dimensionamento serem baseados em analogias de treliça, a norma prevê que a resistência das diagonais comprimidas de concreto seja verificada de maneira combinada, devendo satisfazer à seguinte expressão:

$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{sd}}{T_{Rd2}} \leq 1 \quad [3.41]$$

Em que:

$V_{sd}$ : força cortante solicitante de cálculo;

$T_{sd}$ : momento torsor solicitante de cálculo;

$V_{Rd2}$ : força resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto;

$T_{Rd2}$ : limite dado pela resistência das diagonais comprimidas de concreto.

Com relação as armaduras transversais, a norma prevê no item 17.7.2.3 que a armadura transversal total seja calculada pela soma das armaduras calculadas separadamente para  $V_{sd}$  e  $T_{sd}$ , devendo-se respeitar as taxas geométricas mínimas nas duas situações. Um fato importante a ser ressaltado é que no método analítico recomendado pela ABNT NBR 6118:2014, assim como no CFT e no método analítico proposto por Zia e Hsu (2004), é importante que o resultado final fique compatibilizado ou com os dois ramos calculados para a cortante ou com um ramo calculado para torção. Caso seja necessário a utilização de mais ramos para força cortante, é importante ressaltar que para torção, só serão considerados efetivos os ramos próximos à lateral da viga, ou seja, aqueles contidos no interior da parede fictícia da seção vazada equivalente, conforme o item 18.3.4 da ABNT NBR 6118:2014.

Feita a conceituação inicial e as considerações necessárias a respeito do cisalhamento por forças cortantes e por torção combinadas, para que a seção transversal seja dimensionada com segurança, é necessário, portanto, que se apresente separadamente os modelos de cálculo para força cortante e para torção recomendados pela norma brasileira, para que assim seja possível fazer a determinação final tanto da resistência das diagonais comprimidas como da armadura transversal a ser utilizada.

### 3.2.4.2 Dimensionamento à Força Cortante (Modelo de Cálculo I e Modelo de Cálculo II)

Para o cálculo da resistência ao cisalhamento por forças cortantes no estado-limite último, a norma prevê, no item 17.4.2.1, que em uma determinada seção transversal, a resistência do elemento estrutural é considerada satisfatória quando verificadas simultaneamente as seguintes condições:

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} \quad [3.42]$$

$$V_{sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad [3.43]$$

Em que:

$V_{sd}$ : força cortante solicitante de cálculo;

$V_{Rd2}$  : força resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto;

$V_{Rd3}$ : força resistente de cálculo relativa à ruína por tração diagonal;

$V_c$ : parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça;

$V_{sw}$ : parcela de força cortante resistida pela armadura transversal.

De acordo com o item 17.4.1.2.1 da norma brasileira, podem ser feitas reduções na força cortante solicitante de cálculo ( $V_{sd}$ ), nas regiões próximas aos apoios. Para os apoios diretos, casos em que a carga solicitante e a reação de apoio são aplicadas em faces opostas do elemento estrutural, pode-se considerar que no trecho entre o apoio e uma seção situada a  $d/2$  da face do apoio, a força cortante permanece constante e igual à força cortante desta seção. Já a força cortante oriunda de uma carga concentrada aplicada a uma distância  $A$ , menor ou igual a  $2d$  do eixo teórico do apoio, pode ser reduzida multiplicando-se a força cortante por  $A/(2d)$ . Essas reduções, todavia, não se aplicam à verificação da resistência da diagonal comprimida  $V_{Rd2}$ .

Para verificação das forças resistentes  $V_{Rd2}$  e  $V_{Rd3}$ , a norma brasileira prevê a utilização de dois modelos de cálculo, Modelo de Cálculo I e Modelo de Cálculo II. Basicamente, as diferenças entre os dois modelos estão relacionadas ao ângulo  $\theta$  admitido para as diagonais comprimidas e à parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça  $V_c$ .

No Modelo de Cálculo I a ABNT NBR 6118:2014 adota o modelo clássico de treliça proposto por Ritter e Mörsch admitindo-se um ângulo fixo de  $45^\circ$  para a inclinação das diagonais comprimidas em relação ao eixo longitudinal da viga. Neste modelo, também admite-se que a parcela complementar  $V_c$  tenha valor constante, independentemente do valor de  $V_{sd}$ . A verificação da força resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto é feita comparando-se a força cortante solicitante de cálculo ( $V_{sd}$ ) com o  $V_{Rd2}$ , que pode ser obtido por meio da seguinte equação:

$$V_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \quad [3.44]$$

Em que:

$\alpha_{v2} = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$ ,  $f_{ck}$ : resistência característica à compressão do concreto, em MPa;

$f_{cd}$ : resistência de cálculo à compressão do concreto;

$b_w$ : menor largura da seção transversal, compreendida ao longo da altura útil;

$d$ : altura útil da seção transversal.

Feita a verificação com relação à resistência das diagonais comprimidas, parte-se para o dimensionamento da armadura transversal. Sabe-se, pela Expressão [3.43], que a força resistente de cálculo relativa à ruína por tração diagonal ( $V_{Rd3}$ ) deve ser, pelo menos, igual à força cortante solicitante de cálculo ( $V_{sd}$ ), logo admite-se que:

$$V_{Rd3} = V_{sd} = V_c + V_{sw} \quad [3.45]$$

O cálculo da parcela relativa a  $V_c$ , para os casos de flexão simples e flexo-tração, com a linha neutra cortando a seção transversal, é feito igualando-se  $V_c$  com  $V_{c0}$ , com  $V_c$  representando parcela de força cortante resistida por mecanismos complementares ao modelo em treliça. Neste trabalho, como serão dimensionadas vigas de seção “L” submetidas à flexão simples, o valor de  $V_c$  pode ser obtido por:

$$V_c = V_{c0} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \quad [3.46]$$

Em que:

$V_{c0}$ : valor de referência para  $V_c$  no Modelo de Cálculo I;

$f_{ctd}$ : resistência à tração de cálculo do concreto.

Sendo:

$f_{ctd} = 0,15 \cdot f_{ck}^{2/3}$ ,  $f_{ck}$  em MPa e adotando o ponderador de resistência do concreto igual a 1,4.

A parcela de força cortante resistida pela armadura transversal ( $V_{sw}$ ) pode ser calculada como a diferença entre a força cortante solicitante de cálculo ( $V_{sd}$ ) e a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça ( $V_c$ ), ou seja, a armadura transversal contribuirá com o restante de resistência necessária para que a seção suporte as forças cortantes que não puderam ser resistidas somente pelo concreto íntegro entre fissuras. Sendo assim, de acordo com a norma brasileira, o valor de  $V_{sw}$  deverá ser igual a:

$$V_{sd} - V_c = V_{sw} = \left( \frac{A_{v,\alpha}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) \quad [3.47]$$

Em que:

$A_{v,\alpha}$ : área de aço de todos os ramos do estribo;

$\alpha$ : ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, devendo-se obedecer ao intervalo  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ;

s: espaçamento entre elementos da armadura transversal  $A_{v,\alpha}$  (eixo longitudinal);

$f_{ywd}$ : tensão na armadura transversal passiva, limitada ao valor de  $f_{yd}$  no caso de estribos e a 70% desse valor no caso de barras dobradas, não se tomando, para ambos os casos, valores superiores 435 MPa.

Manipulando-se a Equação [3.47] é possível calcular a armadura transversal necessária para suportar a força cortante solicitante de cálculo:

$$\left(\frac{A_{v,\alpha}}{s}\right) = \frac{V_{sw}}{0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)} \quad [3.48]$$

No caso de se utilizar estribos verticais, tomando  $\alpha = 90^\circ$ , o que é usualmente empregado em vigas de concreto por facilidades na execução, a Equação [3.48] se resume a:

$$\left(\frac{A_{v,90}}{s}\right) = \frac{V_{sw}}{0,9 \cdot d \cdot f_{ywd}} \quad [3.49]$$

No Modelo de Cálculo II a ABNT NBR 6118:2014 admite uma liberdade maior para definição da inclinação das diagonais comprimidas, podendo ser adotado livremente valores para  $\theta$  no intervalo de  $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ . Neste modelo, também admite-se que a parcela complementar  $V_c$  sofra uma redução com o aumento de  $V_{sd}$ . Desta forma, inicialmente, a verificação da força resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto ( $V_{Rd2}$ ) sofrerá uma modificação em relação à Equação [3.44] apresentada para o Modelo de Cálculo I, devendo ser calculado da seguinte maneira para o Modelo de Cálculo II:

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \sin^2 \theta \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta) \quad [3.50]$$

Em que:

$\theta$ : ângulo de inclinação das diagonais comprimidas em relação ao eixo longitudinal da viga;

$\alpha$ : ângulo de inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal da viga.

Assim como no Modelo de Cálculo I, sabe-se, pela Expressão [3.43], que a força resistente de cálculo relativa à ruína por tração diagonal ( $V_{Rd3}$ ) deve ser, pelo menos, igual à força cortante solicitante de cálculo ( $V_{sd}$ ), admitindo-se a mesma hipótese adotada na Equação [3.45]. Todavia, no Modelo de Cálculo II, o cálculo da parcela  $V_c$  prevê uma redução na resistência conforme o aumento do  $V_{sd}$ , de modo que, para os casos de flexão simples e flexo-

tração, com a linha neutra cortando a seção transversal, o cálculo é feito igualando-se  $V_c$  com o parâmetro  $V_{c1}$ , que é o valor de referência para  $V_c$  no Modelo de Cálculo II.

A determinação de  $V_{c1}$  é feita de acordo com a seguinte lei de variação:

$$V_{c1} = V_{c0} \text{ quando } V_{sd} \leq V_{c0} \quad [3.51]$$

$$V_{c1} = 0 \text{ quando } V_{sd} = V_{Rd2} \quad [3.52]$$

Quando houver valores intermediários aos apresentados acima, o parâmetro  $V_{c1}$  deverá ser obtido através de interpolação linear. Portanto, fazendo-se as manipulações necessárias, para a faixa intermediária de valores,  $V_{c0} \leq V_{sd} \leq V_{Rd2}$ , o parâmetro  $V_{c1}$  pode ser obtido através da seguinte equação:

$$V_{c1} = V_{c0} \cdot \left( \frac{V_{Rd2} - V_{sd}}{V_{Rd2} - V_{c0}} \right) \quad [3.53]$$

De modo semelhante ao Modelo de Cálculo I, a parcela de força cortante resistida pela armadura transversal ( $V_{sw}$ ) pode ser calculada como a diferença entre a força cortante solicitante de cálculo ( $V_{sd}$ ) e a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça ( $V_c$ ). Entretanto, como no Modelo de Cálculo II a inclinação das diagonais comprimidas pode ser arbitrada livremente, o valor de  $V_{sw}$  deverá ser obtido da seguinte forma:

$$V_{sd} - V_c = V_{sw} = \left( \frac{A_{v,\alpha}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta) \cdot \sen \alpha \quad [3.54]$$

Em que:

$A_{v,\alpha}$ : área de aço de todos os ramos do estribo;

$\theta$ : ângulo de inclinação das diagonais comprimidas em relação ao eixo longitudinal da viga;

$\alpha$ : ângulo de inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal da viga;

$s$ : espaçamento entre elementos da armadura transversal  $A_{v,\alpha}$ , medido segundo o eixo longitudinal do elemento estrutural;

$f_{ywd}$ : tensão na armadura transversal passiva, limitada ao valor de  $f_{yd}$  no caso de estribos e a 70% desse valor no caso de barras dobradas, não se tomando, para ambos os casos, valores superiores 435 MPa.

Manipulando-se a Equação [3.54] é possível calcular a armadura transversal de todos os ramos necessários para suportar a força cortante solicitante de cálculo:

$$\left(\frac{A_{v,\alpha}}{s}\right) = \frac{V_{sw}}{0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta) \cdot \sen \alpha} \quad [3.55]$$

No caso de se utilizar estribos verticais, tomando  $\alpha = 90^\circ$ , o que é usualmente empregado em vigas de concreto por facilidades na execução, a Equação [3.55] se resume a:

$$\left(\frac{A_{v,90}}{s}\right) = \frac{V_{sw}}{0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot \cotg \theta} \quad [3.56]$$

Por fim, a norma brasileira prevê que todos os elementos lineares submetidos a força cortante, com exceção dos casos indicados em 17.4.1.1.2 (tratados como lajes e pilares), devem conter armadura transversal mínima constituída por estribos, com a seguinte taxa geométrica:

$$\rho_{sw,\alpha} = \frac{(A_{v,\alpha})_{\min}}{b_w \cdot s \cdot \sen \alpha} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \quad [3.57]$$

Em que:

$(A_{v,\alpha})_{\min}$ : área de aço mínima de todos os ramos do estribo;

$b_w$ : largura média da alma, medida ao longo da altura útil da seção;

$f_{ctm}$ : resistência média à tração do concreto;

$f_{ywk}$ : resistência característica ao escoamento do aço da armadura transversal.

Sendo:

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}, \quad f_{ck} \text{ em MPa.}$$

Manipulando-se a Equação [3.57] é possível obter a armadura transversal mínima necessária para as forças cortantes:

$$\frac{(A_{v,\alpha})_{\min}}{s} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \cdot b_w \cdot \sen \alpha \quad [3.58]$$

O diâmetro das barras que constituem os estribos deve ser maior ou igual a 5 mm, sem exceder 10% da largura da alma da viga, todavia, caso os estribos sejam constituídos por barras lisas, seu diâmetro não poderá ser superior a 12 mm.

A norma brasileira também recomenda que o espaçamento mínimo entre estribos, medidos segundo o eixo longitudinal do elemento, deve ser suficiente para permitir a passagem do vibrador, garantindo um bom adensamento do concreto. Já o espaçamento máximo deverá atender às seguintes condições:

$$s_{\text{máx}} = 0,6 \cdot d \leq 300\text{mm}, \text{ quando } V_{\text{sd}} \leq 0,67 \cdot V_{\text{Rd2}} \quad [3.59]$$

$$s_{\text{máx}} = 0,3 \cdot d \leq 200\text{mm}, \text{ quando } V_{\text{sd}} > 0,67 \cdot V_{\text{Rd2}} \quad [3.60]$$

Em relação aos espaçamentos entre ramos sucessivos da armadura constituída por estribos, a norma brasileira prevê que não poderão ser excedidos os seguintes valores:

$$s_{\text{t,máx}} = d \leq 800\text{mm}, \text{ quando } V_{\text{sd}} \leq 0,2 \cdot V_{\text{Rd2}} \quad [3.61]$$

$$s_{\text{t,máx}} = 0,6 \cdot d \leq 350\text{mm}, \text{ quando } V_{\text{sd}} > 0,2 \cdot V_{\text{Rd2}} \quad [3.62]$$

### 3.2.4.3 Dimensionamento à Torção

Para o cálculo da resistência ao cisalhamento por torção pura no estado-limite último, a norma brasileira prevê, no item 17.5.1.3, que em uma determinada seção transversal, a resistência do elemento estrutural será considerada satisfatória quando verificadas simultaneamente as seguintes condições:

$$T_{\text{sd}} \leq T_{\text{Rd2}} \quad [3.63]$$

$$T_{\text{sd}} \leq T_{\text{Rd3}} \quad [3.64]$$

$$T_{\text{sd}} \leq T_{\text{Rd4}} \quad [3.65]$$

Em que:

$T_{\text{sd}}$ : momento torsor solicitante de cálculo;

$T_{\text{Rd2}}$ : limite dado pela resistência das diagonais comprimidas de concreto;

$T_{\text{Rd3}}$ : limite definido pela parcela resistida pelos estribos, normais ao eixo longitudinal;

$T_{\text{Rd4}}$ : limite definido pela parcela resistida pelas barras longitudinais, paralelas ao eixo longitudinal.

Como as condições afixadas pela norma brasileira pressupõem um modelo definido a partir de um elemento de seção vazada equivalente ao elemento estrutural a ser dimensionado,

a primeira etapa para o dimensionamento analítico é justamente a definição da geometria dessa seção resistente.

Para as seções poligonais convexas cheias, a norma prevê que a seção vazada equivalente seja definida a partir da seção cheia, com espessura da parede equivalente dada pelo parâmetro  $h_e$ . Este parâmetro deverá ser um valor arbitrado no seguinte intervalo:

$$2 \cdot c_1 \leq h_e \leq \frac{A}{u} \quad [3.66]$$

Em que:

A: área da seção cheia;

u: perímetro da seção cheia;

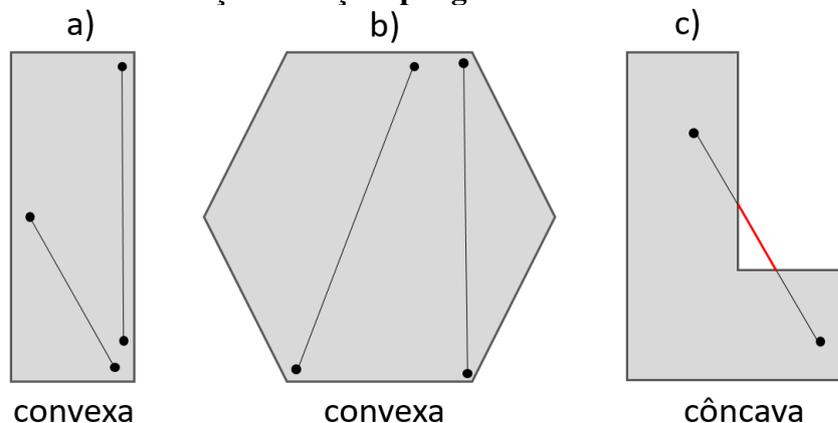
$c_1$ : distância entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face lateral do elemento estrutural.

Caso  $A/u$  seja menor que  $2 \cdot c_1$  o intervalo será indeterminado, logo, para essas situações, a norma permite adotar o seguinte valor para  $h_e$ :

$$h_e = \frac{A}{u} \leq b_w - 2 \cdot c_1 \quad [3.67]$$

As seções poligonais convexas cheias podem ser definidas de maneira simplificada como aquelas em que todos os pontos de um segmento de reta qualquer, cujas extremidades do segmento pertençam à seção, estão localizados dentro da seção. A Figura 3.16a e Figura 3.16b ilustram a definição das seções poligonais cheias convexas.

**Figura 3.16 – Definição de seções poligonais cheias convexas e côncavas**



Fonte: Autor (2020)

Quando, em um segmento de reta qualquer, houverem pontos localizados fora da seção transversal, o polígono cheio é classificado como côncavo (Figura 3.16c). Para as seções poligonais cheias não convexas, como é o caso das vigas de seção “L”, a norma prevê, no item 17.5.1.4.2, a possibilidade de se fazer o cálculo considerando que a seção transversal seja composta por retângulos. Nesse modelo de dimensionamento, o momento torsor solicitante total deve ser distribuído entre os retângulos conforme a rigidez elástica linear de cada retângulo. Dessa forma, cada retângulo deverá ser verificado isoladamente com a mesma seção vazada equivalente utilizada para calcular as seções poligonais cheias convexas.

O momento torsor solicitante  $T_{sd,i}$ , referente ao retângulo  $i$ , será dado por:

$$T_{sd,i} = T_{sd} \cdot \frac{a_i^3 \cdot b_i}{\sum a_i^3 \cdot b_i} \quad [3.68]$$

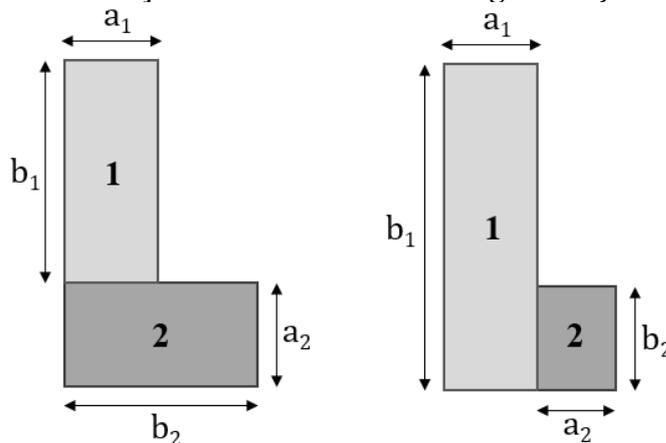
Em que:

$a_i$ : representa os lados menores dos retângulos;

$b_i$ : representa os lados maiores dos retângulos.

Como as vigas de seção “L” sempre apresentarão dois retângulos na composição da sua geometria, o dimensionamento desse tipo de seção transversal se resumirá ao dimensionamento de duas seções retangulares com os momentos torsores solicitantes proporcionais às dimensões de cada retângulo. A Figura 3.17 ilustra as duas maneiras possíveis de se dividir uma viga de seção “L” e as dimensões a serem consideradas em cada retângulo.

**Figura 3.17 – Divisão da seção transversal de uma viga de seção “L” em retângulos**



Fonte: Autor (2020)

Manipulando-se a Equação [3.68] e considerando a divisão feita na Figura 3.17 é possível determinar de maneira genérica as parcelas de momento torsor a serem distribuídas aos retângulos que compõem uma viga de seção “L” qualquer. As Equações [3.69] e [3.70] especificam os valores referentes aos retângulos 1 e 2 respectivamente.

$$T_{sd,1} = T_{sd} \cdot \frac{a_1^3 \cdot b_1}{(a_1^3 \cdot b_1) + (a_2^3 \cdot b_2)} \quad [3.69]$$

$$T_{sd,2} = T_{sd} \cdot \frac{a_2^3 \cdot b_2}{(a_1^3 \cdot b_1) + (a_2^3 \cdot b_2)} \quad [3.70]$$

Após realizar a distribuição dos momentos torsores e determinar o parâmetro  $h_e$  para cada retângulo, inicia-se então as verificações das resistências isoladamente para os retângulos. A primeira verificação a ser feita é relativa ao limite dado pela resistência das diagonais comprimidas de concreto ( $T_{Rd2}$ ). De acordo com a norma brasileira, essa resistência deve ser obtida por:

$$T_{Rd2} = 0,50 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot A_e \cdot h_e \cdot \text{sen } 2\theta \quad [3.71]$$

Em que:

$\alpha_{v2} = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$ ,  $f_{ck}$ : resistência característica à compressão do concreto, em MPa;

$f_{cd}$ : resistência de cálculo à compressão do concreto;

$A_e$ : área delimitada pela linha média da parede da seção vazada, incluindo a parte vazada;

$h_e$ : espessura equivalente da parede de seção vazada;

$\theta$ : ângulo de inclinação das diagonais comprimidas, arbitrado no intervalo  $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$  e sendo coincidente ao ângulo adotado no dimensionamento ao cisalhamento por forças cortantes;

Conforme abordado inicialmente e adotando o modelo de dimensionamento da seção formada por retângulos, a verificação da resistência final das diagonais comprimidas de concreto, para o caso em que há força cortante e torção combinadas, deverá ser feita da seguinte forma:

$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{sd,1}}{T_{Rd2,1}} \leq 1 \quad [3.72]$$

$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{sd,2}}{T_{Rd2,2}} \leq 1 \quad [3.73]$$

Feita a verificação com relação à resistência das diagonais comprimidas, parte-se para o dimensionamento da armadura transversal. Sabe-se, pela Expressão [3.64], que a parcela resistida pelos estribos normais ao eixo longitudinal da viga ( $T_{Rd3}$ ) deve ser, pelo menos, igual ao momento torsor solicitante de cálculo ( $T_{sd}$ ), podendo-se admitir que:

$$T_{Rd3} = T_{sd} = \left(\frac{A_t}{s}\right) \cdot f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot \cotg \theta \quad [3.74]$$

Em que:

$A_{t,90}$ : área de aço de apenas um ramo do estribo;

$s$ : espaçamento entre elementos da armadura transversal  $A_{t,90}$  (eixo longitudinal);

$f_{ywd}$ : tensão na armadura transversal passiva, limitada ao valor de 435 MPa.

Isolando a parcela referente a área de aço na Equação [3.74] obtém-se:

$$\left(\frac{A_t}{s}\right) = \frac{T_{sd}}{f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot \cotg \theta} \quad [3.75]$$

Adotando o modelo de dimensionamento da seção formada por retângulos, a determinação da armadura transversal final deverá ser feita a favor da segurança somando-se as armaduras obtidas separadamente em cada retângulo (1 e 2), conforme a Equação [3.76], e distribuindo na alma da seção de maneira análoga aos outros métodos analíticos.

$$\left(\frac{A_t}{s}\right)_{total} = \left(\frac{A_t}{s}\right)_1 + \left(\frac{A_t}{s}\right)_2 \quad [3.76]$$

Realizado o dimensionamento da armadura transversal, parte-se para o dimensionamento da armadura longitudinal, primordial ao equilíbrio do modelo de treliça espacial. Assim como na verificação do  $T_{Rd3}$ , sabe-se pela Expressão [3.64], que a parcela resistida pelas barras longitudinais paralelas ao eixo longitudinal ( $T_{Rd4}$ ) deve ser, pelo menos, igual ao momento torsor solicitante de cálculo ( $T_{sd}$ ), podendo-se admitir que:

$$T_{Rd4} = T_{sd} = \left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right) \cdot f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot \tg \theta \quad [3.77]$$

Em que:

$A_{sl}$ : soma das áreas das seções das barras longitudinais;

$u_e$ : é o perímetro de  $A_e$ ;

Isolando a parcela referente a área de aço na Equação [3.77] obtém-se:

$$\left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right) = \frac{T_{sd}}{f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot \text{tg } \theta} \quad [3.78]$$

Para a distribuição da armadura longitudinal ao longo do perímetro da seção, a ABNT NBR 6118:2014 permite que a área total de aço  $A_{sl}$  tenha arranjo distribuído ou concentrado, todavia, é necessário obrigatoriamente manter constante a relação  $\Delta A_{sl} / \Delta u$ , onde  $\Delta u$  é o trecho de perímetro da seção efetiva correspondente a cada barra ou feixe de barras de área  $\Delta A_{sl}$ . Para as seções poligonais, que é o caso das vigas de seção “L”, a norma brasileira ressalta ainda que em cada vértice dos estribos de torção deve ser colocada pelo menos uma barra longitudinal.

Adotando o modelo de dimensionamento da seção formada por retângulos, a determinação da armadura longitudinal final deverá ser feita a favor da segurança somando-se as armaduras obtidas separadamente em cada retângulo (1 e 2), conforme a Equação [3.79]:

$$\left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right)_1 + \left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right)_2 \quad [3.79]$$

Por fim, a última etapa do dimensionamento ao cisalhamento por torção é a determinação da armadura mínima, que deverá ser comparada com as armaduras calculadas anteriormente. As taxas geométricas mínimas previstas pela norma brasileira, para os estribos e para armadura longitudinal e transversal, são obtidas por meio das Equações [3.80] e [3.81] respectivamente:

$$\rho_{sl} = \frac{A_{sl,\text{mín}}}{h_e \cdot u_e} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \quad [3.80]$$

$$\rho_{sw} = \frac{A_{t,90,\text{mín}}}{b_w \cdot s} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \quad [3.81]$$

Em que:

$A_{sl,\text{mín}}$ : área mínima para soma das áreas das seções das barras longitudinais;

$A_{t,90,\text{mín}}$ : área mínima para seção de um ramo do estribo;

$b_w$ : largura média da alma, medida ao longo da altura útil da seção;

$f_{ctm}$ : resistência média à tração do concreto;

$f_{yw}$ : resistência característica ao escoamento do aço da armadura transversal  $\leq 500$  MPa.

Como visto anteriormente nos cálculos, a armadura destinada a resistir aos esforços de tração provocados pela torção deve ser constituída de estribos normais ao eixo da viga, combinados com barras longitudinais paralelas ao mesmo eixo, considerando-se efetivos na resistência à torção os ramos do estribo e as barras longitudinais que estiverem contidos no interior na parede fictícia da seção vazada equivalente.

A norma prevê que os estribos para torção sejam fechados em todo o seu contorno, envolvendo as barras longitudinais de tração e com as extremidades ancoradas por meio de ganchos em ângulo de  $45^\circ$ . As prescrições para relativas ao diâmetro das barras que formam o estribo e o espaçamento longitudinal dos mesmos devem ser iguais ao especificado para as forças cortantes, com a diferença que, neste caso como há barras longitudinais, estas deverão estar distribuídas ou concentradas ao longo do perímetro interno dos estribos, de modo que, o seu espaçamento não seja superior a 35 cm.

### 3.3 ABAS LATERAIS

As abas laterais são regiões presentes nas vigas de seção “L” destinadas a transferir as forças provenientes das lajes de concreto pré-moldado para a alma da viga. De maneira geral, as abas laterais são o que diferenciam as vigas de seção “L” dos outros tipos de seções transversais, portanto, o dimensionamento correto da conexão entre a aba lateral e alma da seção é fundamental para garantir que os carregamentos externos sejam transferidos até os pilares.

Tanto a ABNT NBR 9062:2017 como a ABNT NBR 6118:2014 não fazem nenhum tipo de recomendação específica para o dimensionamento das abas laterais de vigas de seção “L” ficando a cargo do projetista definir qual modelo de cálculo será adotado. As prescrições presentes na norma brasileira de estruturas de concreto pré-moldado versam somente a respeito do dimensionamento de consolos e dentes de apoio (dentes Gerber), permitindo-se assemelhar o comportamento do dente de apoio a um consolo.

Tomando como hipótese que a aba lateral assume funções semelhantes a um consolo ou, conforme propõe Pastore (2015), a um dente Gerber invertido, uma opção seria adotar como ponto de partida as hipóteses de cálculo para consolos presentes no item 7.3.2.2 da ABNT NBR

9062:2017. De acordo com este item, pode-se assumir três hipóteses diferentes de cálculo. Para consolos com relação  $1,0 < a/d \leq 2,0$  ( $a$  = distância do ponto de aplicação da força à face interna do consolo;  $d$  = altura útil do consolo) o dimensionamento é feito como uma viga em balanço aplicando-se o disposto na ABNT NBR 6118:2014 para flexão e força cortante. Para consolos com relação  $0,5 < a/d \leq 1,0$ , ditos consolos curtos, o dimensionamento é feito segundo o Método das Bielas, a partir de um modelo de treliça. A última hipótese é para consolos com relação  $a/d \leq 0,5$ , ditos consolos muito curtos. Nestes casos, o dimensionamento é feito pelo modelo conhecido como atrito-cisalhamento, supondo a ruptura ao longo do plano de ligação do consolo com seu suporte, podendo-se considerar o efeito favorável do engrenamento dos agregados desde que a face seja atravessada por barras de aço perpendiculares a ela.

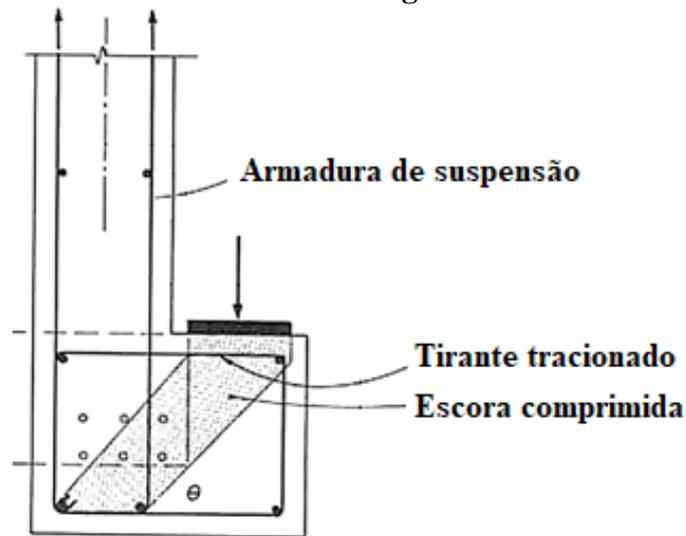
Uma outra alternativa seria recorrer à literatura e a documentos internacionais que abordam de maneira específica o dimensionamento das abas laterais de vigas de seção “L”. Apesar das hipóteses de dimensionamento serem diferentes entre as referências internacionais, todas elas remetem a um dos três modelos abordados pela ABNT NBR 9062:2017.

Segundo Collins e Mitchell (1980), de maneira geral, o dimensionamento da aba lateral deve ser realizado através do Método das Bielas, a partir de um modelo de treliça. Neste método, assume-se que a carga concentrada proveniente da laje seja transferida para base da alma por meio de uma escora comprimida inclinada, que deverá ser necessariamente verificada quanto aos limites de esmagamento do concreto, afim de se evitar uma ruptura frágil do elemento.

Para o equilíbrio da treliça, a componente horizontal dessa força na escora inclinada deve ser equilibrada por um tirante tracionado em forma de estribo horizontal, caso contrário o sistema não se manteria em equilíbrio. Por fim, a carga na base da viga é conduzida para o topo da seção por meio de uma armadura transversal de suspensão composta por todos os ramos do estribo vertical.

Segundo os autores essa armadura de suspensão deverá ser somada com a armadura transversal dimensionada para o cisalhamento por forças cortantes e torção. Embora Collins e Mitchell (1980) não especifiquem em quais condições da geometria da aba lateral essa hipótese pode ser assumida, no exemplo numérico desenvolvido pelos autores a relação  $a/d$  na qual o método foi aplicado foi de 0,38, dando indícios de que o intervalo recomendado pela ABNT NBR 9062:2017 para consolos, talvez não seja aplicável para o dimensionamento da aba lateral de vigas de seção “L”.

**Figura 3.18 - Modelo proposto por Collins e Mitchell (1980) para a ligação da aba lateral com a alma da viga**



Fonte: Adaptado de Collins e Mitchell (1980)

Segundo o Manual de Dimensionamento do BCA (2001) uma outra hipótese para o dimensionamento das abas laterais das vigas de seção “L” seria através de um modelo de flexão. De acordo com o manual, as abas laterais utilizadas em estruturas usuais de concreto pré-moldado normalmente possuem uma altura inferior a 300 mm e uma projeção superior à essa altura. Nessas situações, o manual adota a hipótese de que as abas se comportem como pequenas lajes em balanço engastadas na alma da viga. Neste manual não são apresentadas relações geométricas entre a altura e a projeção da aba permitidas para utilização do modelo de flexão e também não são feitas recomendações para as situações em que a altura da aba seja superior a 300 mm. As mesmas prescrições também são feitas pela norma britânica BS 8110-1:1997 no item 5.2.8.

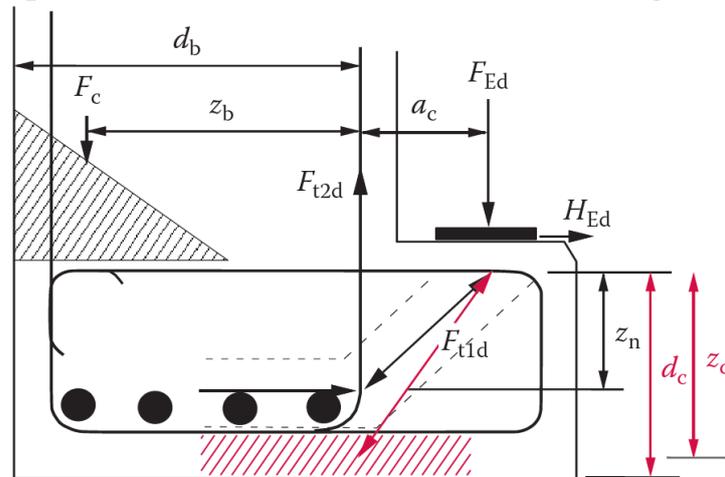
Elliott (2017) também corrobora com a hipótese de assumir o comportamento da aba lateral semelhante a um pequeno balanço, entretanto, segundo o autor, essa consideração deve ser feita somente para abas laterais com espessura inferior a 300 mm, independentemente da relação geométrica da aba. Caso contrário, segundo o autor, o comportamento da aba lateral será próximo a um modelo de treliça, devendo ser solucionado através do Método das Bielas.

O manual de dimensionamento do PCI (2010) apresenta uma seção específica para o dimensionamento das abas laterais de vigas de seção “L”. As recomendações são baseadas no trabalho de Zia e Mcgee (1974) e nos modos de ruptura observados por Mirza e Furlong (1983a, 1983b). A hipótese de cálculo adotada pelo manual é de um modelo de flexão, considerando

que a aba lateral esteja em balanço, complementado por uma análise da resistência a punção da aba. Vale ressaltar que não é feito nenhum tipo de restrição para as relações geométricas da aba lateral e também não é verificada a capacidade resistente da diagonal comprimida, ficando evidente que a hipótese adotada não remete à utilização do Método das Bielas.

Um outro documento que também trata especificamente do dimensionamento das abas laterais de vigas de seção “L” são as notas sobre o ACI 318:2011 feitas pela “*Portland Cement Association*”, PCA (2013). De acordo com o documento, o dimensionamento das abas laterais é semelhante aos consolos no que diz respeito às condições de carregamento, todavia, são necessárias algumas considerações adicionais específicas para abas laterais. Assim como no manual de dimensionamento do PCI (2010), as Notas do PCA (2013) são baseadas nas investigações de Mirza e Furlong (1983a, 1983b). A hipótese de cálculo adotada também é de um modelo de flexão, mas neste caso, complementado por uma análise da resistência por atrito-cisalhamento e uma análise da resistência à punção da aba lateral. Uma diferença presente neste documento, é que há uma recomendação explícita de que o dimensionamento das abas laterais também pode ser feito através do Método das Bielas, entretanto, não há recomendações para quais relações geométricas da aba lateral cada hipótese de cálculo deverá ser utilizada, ficando a cargo do projetista decidir qual modelo adotar.

Whittle (2013) questiona essa hipótese de assumir a aba lateral como um pequeno balanço submetido à flexão. Segundo o autor, adotar essa hipótese seria uma maneira insegura de tratar o assunto e pode levar a aba lateral a ruína. A explicação para ineficiência do modelo em balanço parte do pressuposto que o trecho comprimido da aba lateral estaria muito próximo da borda inferior, logo, a escora comprimida que se forma do ponto de aplicação da carga até a base da viga poderia gerar esforços que tenderiam a fragmentar esse trecho comprimido. Uma vez fragmentada essa região, o braço de alavanca resistente diminuiria, provocando um aumento nas tensões de tração na parte superior da aba, tornando a aba lateral vulnerável à ruptura. A Figura 3.19 ilustra a problemática reportada pelo autor, em que a região hachurada em vermelho representa a zona passível de fragmentação.

**Figura 3.19 - Comportamento à flexão da aba lateral em uma viga de seção "L"**

Fonte: Whittle (2013)

Uma outra fonte de questionamentos apontada por Pastore (2015) é com relação à armadura de suspensão, responsável por transmitir as forças aplicadas pela laje da base ao topo da viga e que está presente em todos documentos e trabalhos citados anteriormente. De acordo com o autor, a armadura de suspensão é um tema em que não há concordância entre os projetistas.

Alguns projetistas consideram que a força a ser suspensa pela armadura deve ser igual à força de reação da laje, sem considerar a distância até o centroide da armadura de suspensão, procedimento semelhante ao que ocorre nos dentes de concreto. Outros projetistas consideram a influência da distância entre o ponto de aplicação da carga e o centroide da armadura de suspensão.

Outro ponto de discordância entre os projetistas com relação a necessidade ou não de somar a armadura de suspensão com as armaduras transversais calculadas para o cisalhamento por torção e esforços cortantes. Alguns autores recomendam que deve ser considerada a adição de armadura para os dois efeitos, outros consideram que somente a maior entre as armaduras de suspensão ou cisalhamento deve ser adotada.

Além dos fatores já citados, uma terceira fonte de questionamentos a respeito do comportamento das abas laterais é referente a resistência à ruptura por punção na aba (Figura 3.20). Este efeito pode ocorrer em vigas de seção "L" que recebem valores elevados de cargas concentradas, como é o caso de vigas que apoiam lajes duplo "T" destinadas a pavimentos de piso.

**Figura 3.20 - Ruptura por punção da aba lateral observado em avaliação experimental**



Fonte: Nafadi et al. (2018a)

Recente pesquisa experimental conduzida por Nafadi et al. (2018a) a respeito do comportamento das abas laterais de vigas de seção “L” submetidas a cargas concentradas, aponta que os procedimentos recomendados pelo manual de dimensionamento do PCI (2010) podem superestimar a capacidade resistente à punção da aba lateral, especialmente nas regiões próximas ao meio do vão. A pesquisa também mostrou a presença de quatro parâmetros que afetam significativamente a resistência a punção das abas laterais. Estes parâmetros são: a excentricidade da carga, a resistência a compressão do concreto, a altura da aba, e a distância de aplicação da carga à borda da aba.

A partir dos resultados obtidos no programa experimental conduzido por Nafadi et al. (2018b) e em estudos baseados em modelos de elementos finito tridimensionais não-lineares, foi desenvolvido em Nafadi et al. (2018c) um novo método analítico que visa substituir o método atual presente no PCI (2010). Segundo os autores, o método é simples, prático e visa calcular a resistência a punção da aba lateral assumindo tensões de cisalhamento uniformes atuando em uma superfície de ruptura idealizada a partir de resultados de ensaios experimentais. Também são recomendadas armaduras complementares para melhorar o comportamento e aumentar a capacidade da aba sem alterar a geometria.

A partir do exposto, percebe-se, portanto, que atualmente não se tem um modelo unificado para o dimensionamento das abas laterais das vigas de seção “L”, uma vez que, muitas são as hipóteses e questionamentos a respeito do real comportamento das abas. Sendo assim, é

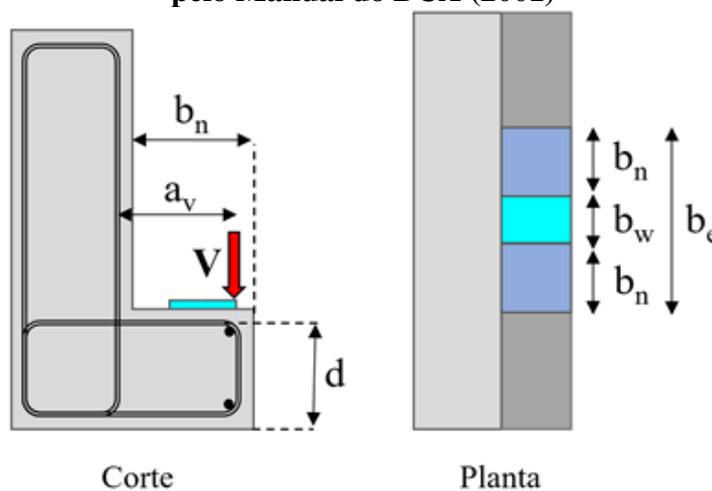
oportuno apresentar diferentes métodos analíticos presentes na literatura principalmente para servirem de parâmetro para comparações com o dimensionamento pelo Método das Bielas, objeto deste trabalho.

### 3.3.1 Método Analítico Proposto pelo Manual do BCA (2001) / BS 8110-1:1997

Como visto anteriormente, o método adotado pelo Manual do BCA (2001) e pela BS 8110-1:1997 é uma alternativa ao dimensionamento das abas laterais de vigas de seção “L” que considera o comportamento das abas como pequenas lajes em balanço, engastadas na alma. Segundo Elliott (2017) o dimensionamento considerando este pequeno balanço resulta em uma armadura de 5 a 10% superior aos métodos que consideram o dimensionamento do tirante horizontal através de modelos de treliça.

Embora o manual não apresente limitações para utilização do modelo de flexão, segundo o documento, usualmente, as espessuras das abas laterais são inferiores a 300 mm. Isso faz com que a distância entre o ponto de aplicação da carga e o centroide da armadura de suspensão geralmente seja superior a espessura da aba, confirmando uma possível hipótese do comportamento de flexão. Por questões de segurança, quando houver aparelho de apoio, a força aplicada pela laje deverá ser considerada na extremidade de fora do aparelho de apoio, gerando o maior braço de alavanca possível. Os parâmetros geométricos necessários para o dimensionamento da aba lateral conforme as recomendações do Manual do BCA (2001) são ilustrados na Figura 3.21.

**Figura 3.21 - Parâmetros geométricos adotados para o dimensionamento da aba lateral pelo Manual do BCA (2001)**



Fonte: Adaptado de BCA (2001)

O momento negativo ( $M$ ) que solicitará a aba lateral à flexão é obtido através de uma expressão simples que considera o produto entre a força aplicada pela laje na aba lateral e a distância entre o ponto de aplicação da força e o centroide da armadura de suspensão, conforme a Equação [3.82].

$$M = V \cdot a_v \quad [3.82]$$

Em que:

$V$ : força aplicada pela laje na aba lateral;

$a_v$ : distância do ponto de aplicação da força ao centroide da armadura de suspensão.

A armadura horizontal necessária para combater este momento fletor negativo é obtida por meio do equilíbrio de forças na seção, de maneira semelhante ao dimensionamento usual de lajes em balanço, conforme a Equação [3.83]. Por questões práticas, a distribuição dessa armadura horizontal deverá ser feita em forma de estribos horizontais, favorecendo ao máximo o processo de industrialização da viga. Para que seja garantida a ancoragem dos estribos horizontais, recomenda-se que os diâmetros dos estribos sejam inferiores a 12 mm.

$$A_{s,tir} = \frac{M_d}{(d - 0,4 \cdot x) \cdot f_{yd}} \quad [3.83]$$

Em que:

$M_d$ : momento fletor negativo de cálculo;

$d$ : altura útil da seção;

$x$ : posição da linha neutra;

$f_{yd}$ : resistência à tração de cálculo do aço.

Após o dimensionamento da armadura horizontal, é feito o dimensionamento dos estribos verticais que atuarão como armadura de suspensão. A hipótese adotada pelo Manual do BCA (2001) considera que a armadura de suspensão deve ser resistente a aplicação direta da força ( $V$ ), ou seja, considera-se que o comportamento da aba seja semelhante a um dente de apoio. Sendo assim, a armadura de suspensão, pode ser obtida através da Equação [3.84]. Segundo o manual, a armadura de suspensão deverá ser colocada adicionalmente a qualquer outra armadura dimensionada ao cisalhamento.

$$A_{s,sus} = \frac{V_d}{f_{yd}} \quad [3.84]$$

Em que:

$V_d$ : força de cálculo aplicada pela laje na aba lateral;

$f_{yd}$ : resistência à tração de cálculo do aço.

A próxima etapa compreende a verificação da capacidade resistente da seção à ruptura por cisalhamento da interface entre conecta a aba lateral na alma da viga. Assim, como no dimensionamento das lajes, a espessura da aba deve ser suficiente para prevenir a ruptura por cisalhamento, preferencialmente, sem a necessidade de armadura complementar.

A largura efetiva ( $b_e$ ) adotada para verificação do é feita estimando-se que a carga concentrada se dispersará formando um ângulo de  $45^\circ$  a partir das faces da superfície de aplicação da carga, podendo ser determinada através da seguinte expressão:

$$b_e = b_w + 2b_n \quad [3.85]$$

Em que:

$b_w$ : largura da superfície de aplicação da carga;

$b_n$ : distância que a aba se projeta para fora da viga.

Caso a distância entre as forças aplicadas na aba lateral seja inferior a  $2b_n$ , a largura efetiva ( $b_e$ ) deverá considerar as forças atuando em conjunto. A expressão que fornece o valor de  $b_e$  nas condições descritas é a seguinte:

$$b_e = 2(b_w + b_n) + s \quad [3.86]$$

Em que:

$s$ : distância entre as faces da superfície de aplicação da carga.

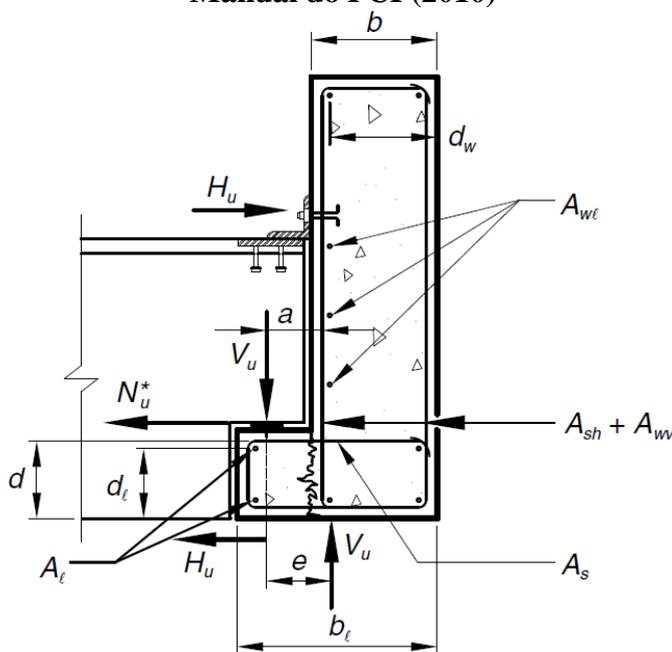
A tensão de cisalhamento solicitante será igual a força aplicada pela laje ( $V_d$ ) dividido pela área efetiva de contato da aba lateral com a alma da viga ( $d \times b_e$ ). Este valor deverá ser inferior a tensão de cisalhamento resistida somente pelo concreto ( $V_c$ ), sem considerar a presença de armadura, a ser obtida por meio da Tabela 3.8 da BS 8110-1:1997. Tanto o Manual do BCA (2001) como a BS 8110-1:1997 consideram a hipótese de que a resistência ao

cisalhamento promovida somente pelo concreto pode ser elevada multiplicando-se  $V_c$  por um fator  $2d/a_v$ .

### 3.3.2 Método Analítico Proposto pelo Manual do PCI (2010)

O dimensionamento das abas laterais segundo a proposta apresentada no item 5.5 do Manual do PCI (2010) é composto por uma série de etapas que, de maneira geral, visa atender aos requisitos apresentados na Figura 3.22. Estes requisitos são compostos pela resistência ao cisalhamento da aba, armadura transversal de flexão para equilibrar o balanço da aba ( $A_s$ ), armadura longitudinal de flexão da aba no sentido do comprimento da viga ( $A_l$ ), armadura de suspensão da carga excêntrica ( $A_{sw}$ ), e as armaduras de flexão fora do plano próximo aos apoios ( $A_{wl}$  e  $A_{ww}$ ), além das armaduras de flexão e cisalhamento por torção e esforços cortantes obtidas através do método proposto por Zia e Hsu (2004) e que já foram explicadas previamente.

**Figura 3.22 - Requisitos para o dimensionamento da aba lateral de acordo com o Manual do PCI (2010)**



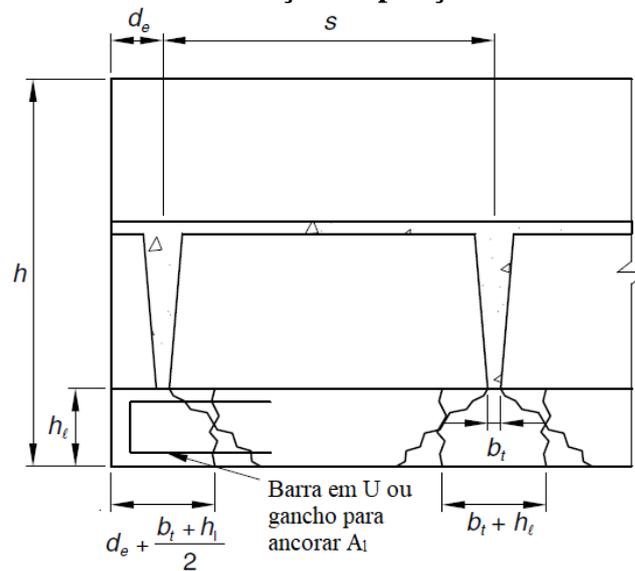
Fonte: PCI (2010)

A primeira verificação a ser realizada é referente a resistência ao cisalhamento da aba lateral, tanto para os efeitos de punção, quando são utilizadas lajes duplo “T”, como para a interface que conecta a aba na alma da viga, quando são utilizadas lajes alveolares. O manual

adota expressões diferentes para o cálculo da resistência ao cisalhamento de abas que suportam forças concentradas e de abas que suportam forças linearmente distribuídas.

Para que as expressões adotadas pelo manual possam ser utilizadas corretamente, é necessário tomar conhecimento dos parâmetros geométricos que influenciam o cálculo da resistência ao cisalhamento da aba lateral. Estes parâmetros podem ser obtidos por meio da visualização em elevação da viga, conforme a Figura 3.23.

**Figura 3.23 – Parâmetros geométricos adotados pelo Manual do PCI (2010) para verificação da punção**



Fonte: Adaptado de PCI (2010)

A resistência à punção das abas laterais em vigas que recebem cargas concentradas deve ser igual ao menor valor entre as Equações [3.87], [3.88], [3.89] e [3.90]. As equações serão apresentadas de forma diferente do que é apresentado no Manual do PCI (2010) pois foram adaptadas para utilização em MPa e o concreto com peso específico normal (25 kN/m<sup>3</sup>).

Quando:  $s > b_t + h_l$

$$\phi V_n = 0,25 \cdot \phi \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot h_l [2(b_l - b) + b_t + h_l] \quad [3.87]$$

$$\phi V_n = 0,083 \cdot \phi \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot h_l [2(b_l - b) + b_t + h_l + 2d_e] \quad [3.88]$$

Quando:  $s < b_t + h_l$

$$\phi V_n = 0,125 \cdot \phi \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot h_l [2(b_l - b) + b_t + h_l + s] \quad [3.89]$$

$$\phi V_n = 0,083 \cdot \phi \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot h_l \left[ 2(b_l - b) + \left( \frac{b_t + h_l}{2} \right) + d_e + s \right] \quad [3.90]$$

Em que:

$\phi$ : coeficiente minorador da resistência;

$f_{ck}$ : resistência a compressão característica do concreto, em MPa;

$h_1$ : espessura da aba lateral;

$b_1$ : largura total da viga, considerando a projeção da aba;

$b$ : largura da alma;

$b_t$ : largura da superfície de aplicação da carga concentrada;

$s$ : espaçamento entre os pontos de aplicação da carga;

$d_e$ : distância do ponto de aplicação da carga à borda da aba.

Caso a aba seja destinada ao apoio de lajes com carregamento contínuo, como é o caso das lajes alveolares, a resistência ao cisalhamento deve ser obtida pela seguinte expressão:

$$\phi V_n = 2 \cdot \phi \cdot h_1 \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad [3.91]$$

Nas situações em que a força de cálculo aplicada pela laje  $V_d$  seja superior a  $\phi V_n$ , a aba lateral deverá ter seus parâmetros iniciais redimensionados ou ainda, na impossibilidade de redimensionamento dos parâmetros adotados inicialmente, segundo o Manual do PCI (2010), a aba lateral poderá ser dimensionada considerando os conceitos de dentes de apoio (dentes Gerber), apresentados nos itens 5.6.3.2 a 5.6.3.4 do manual.

Vale ressaltar que recente pesquisa experimental feita por Nafadi et al. (2018a), aponta que as expressões recomendadas pelo PCI (2010), podem superestimar a resistência ao cisalhamento das abas laterais, principalmente para o efeito de punção, quando as abas são destinadas ao apoio de lajes duplo “T”. Nestas situações recomenda-se utilizar o método analítico proposto por Nafadi et al. (2018a), que será apresentado com mais detalhes posteriormente.

A segunda etapa do dimensionamento consiste na determinação da armadura horizontal ( $A_{s,tir}$ ) em forma de estribos fechados, responsável pela flexão da aba lateral conectada na alma da seção. Diferente do Manual do BCA (2001) que leva em consideração a posição da linha neutra, a expressão recomendada pelo Manual do PCI (2010) considera que o braço de alavanca seja igual a altura útil da seção. Logo, a armadura de flexão neste caso é obtida diretamente pelo equilíbrio de momentos na seção através da Equação [3.92], que considera também a presença de forças horizontais aplicadas pela laje.

$$A_{s,tir} = \left( \frac{V_d \cdot a}{d \cdot \phi \cdot f_{yk}} \right) + \left( \frac{N_d \cdot h_l}{d \cdot \phi \cdot f_{yk}} \right) \quad [3.92]$$

Manipulando-se a Equação [3.92], é possível chegar na equação apresentada no item 5.5.2 do Manual do PCI (2010).

$$A_{s,tir} = \frac{1}{\phi \cdot f_{yk}} \left[ V_d \left( \frac{a}{d} \right) + N_d \left( \frac{h_l}{d} \right) \right] \quad [3.93]$$

Em que:

$\phi$ : coeficiente minorador da resistência;

$f_{yk}$ : resistência a tração característica do aço;

$a$ : distância do ponto de aplicação da carga até o centroide da armadura de suspensão;

$d$ : braço de alavanca da armadura transversal de flexão;

$h_l$ : espessura da aba lateral;

$V_d$ : força vertical de cálculo aplicada pela laje na aba lateral;

$N_d$ : força horizontal de cálculo aplicada pela laje na aba lateral.

Segundo o manual, a armadura horizontal de flexão ( $A_{s,tir}$ ) deve ser uniformemente espaçada em uma distância de seis vezes a espessura da aba para cada lado do ponto de aplicação da carga, mas não deve exceder metade da distância entre os pontos de aplicação das cargas. O manual também prevê que o espaçamento máximo não pode exceder a espessura da aba ( $h_l$ ) ou 18" (42,72 cm).

A terceira etapa é a determinação da armadura longitudinal de flexão da aba no sentido do comprimento da viga ( $A_{l,aba}$ ). Essa armadura deverá ser posicionada nos cantos do estribo horizontal, tanto no topo como na base, sendo determinada pela Equação [3.94]. Segundo Pastore (2015), para cargas linearmente distribuídas ao longo da aba, como é o caso das lajes alveolares, a armadura longitudinal é meramente construtiva.

$$A_{l,aba} = 1,38 \cdot (b_1 - b) \cdot \frac{d_l}{f_{yk}} \quad [3.94]$$

Em que:

$b_1$ : largura total da viga, considerando a projeção da aba;

$b$ : largura da alma;

$d_1$ : distância entre o centroide da armadura  $A_1$  posicionada no topo da aba e a base da viga;  
 $f_{yk}$ : resistência a tração característica do aço, em MPa.

Determinada a armadura longitudinal, a quarta etapa é a determinação da armadura vertical de suspensão ( $A_{s,sus}$ ), responsável por promover a suspensão das forças aplicadas na base da viga ao topo da seção. A distribuição e o espaçamento da armadura de suspensão devem seguir as mesmas recomendações da armadura horizontal de flexão ( $A_{s,tir}$ ). A maneira proposta pelo Manual do PCI (2010) para o cálculo da armadura de suspensão é semelhante ao Manual do BCA (2001), todavia, considera-se a um fator complementar ( $m$ ) que é derivado das observações feitas no trabalho experimental conduzido por Klein (1986). A expressão que determina a armadura de suspensão necessária é:

$$A_{s,sus} = \frac{V_d}{\phi \cdot f_{yk}} \cdot (m) \quad [3.95]$$

Em que:

$$m = \frac{\left[ (d_s + a) - \left( 3 - 2 \frac{h_1}{h} \right) \left( \frac{h_1}{h} \right)^2 \left( \frac{b_1}{2} \right) - e \gamma_t \frac{(x^2 y)_{aba}}{\Sigma x^2 y} \right]}{d_w} \geq 0,6 \quad [3.96]$$

Sendo:

$d_s$ : distância da face externa da viga até o centroide da armadura de suspensão;  
 $a$ : distância do ponto de aplicação da carga até o centroide da armadura de suspensão;  
 $h_1$ : espessura da aba lateral;  
 $h$ : altura total da viga;  
 $b_1$ : largura total da viga, considerando a projeção da aba;  
 $e$ : distância do ponto de aplicação da carga até a reação no apoio;  
 $\gamma_t$ : 1,0 para estribos fechados na alma; 0 para outros arranjos;  
 $x$  = menor dimensão dos retângulos que compõem a viga (ver Figura 3.13b);  
 $y$  = maior dimensão dos retângulos que compõem a viga (ver Figura 3.13b).

Diferente de Collins e Mitchell (1980), BCA (2001) / BS 8110-1:1997, o Manual do PCI (2010) considera que somente o maior valor entre as armaduras de suspensão e a

combinação entre as armaduras de cisalhamento por torção e esforços cortantes deve ser considerada no detalhamento.

Por fim, sempre que as reações verticais nos apoios não estiverem no mesmo eixo de aplicação das cargas, o Manual do PCI (2010) recomenda que sejam adotadas armaduras complementares para flexão fora do plano perto dos apoios. A necessidade dessa armadura foi observada por Klein (1986) através de resultados de ensaios experimentais. Tanto a armadura vertical ( $A_{wv}$ ) como a armadura transversal ( $A_{wl}$ ) para flexão fora do plano são obtidas através da seguinte expressão:

$$A_{wv} = A_{wl} = \frac{V_d \cdot e}{2 \cdot \phi \cdot f_{yk} \cdot d_w} \quad [3.97]$$

Ambas as armaduras devem ser distribuídas próximas aos apoios em um trecho equivalente a distância entre a reação de apoio horizontal superior e a base da viga. A distribuição das armaduras deve ser feita tanto na horizontal quanto na vertical.

### 3.3.3 Método Analítico Proposto pelas Notas do PCA (2013)

As notas sobre o ACI 318:2011 feitas pela “*Portland Cement Association*”, PCA (2013) abordam no Capítulo 15 um tópico específico para o dimensionamento da aba lateral de vigas de seção “L”. De acordo com o documento, essas recomendações são necessárias pois a norma americana de estruturas de concreto não faz nenhuma recomendação sobre este tema em específico.

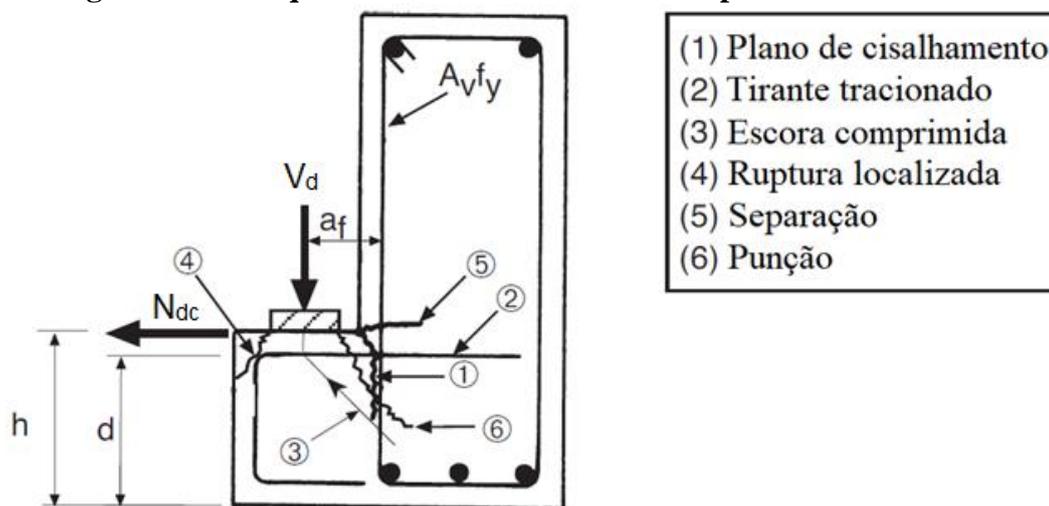
Segundo as Notas do PCA (2013) o dimensionamento das abas laterais é semelhante aos consolos no que diz respeito às condições de carregamento, todavia, devem ser considerados dois modos de ruptura adicionais que levam em conta a separação entre a aba lateral e alma da seção e a punção na região de aplicação das forças concentradas.

A hipótese de cálculo adotada nas Notas do PCA (2013) é de um modelo de flexão da aba lateral, complementado por uma análise da resistência por atrito-cisalhamento e uma análise da resistência à punção da aba lateral para atender aos modos de ruptura adicionais citados anteriormente. Uma diferença presente neste documento, é que há uma recomendação explícita de que o dimensionamento das abas laterais também pode ser feito através do Método das Bielas, entretanto, não há recomendações para quais relações geométricas da aba lateral cada

hipótese de cálculo deverá ser utilizada, ficando a cargo do projetista decidir qual modelo adotar.

O dimensionamento da aba lateral é feito a partir dos modos de ruptura observados nas investigações experimentais de Mirza e Furlong (1983a, 1983b, 1985), sendo necessário determinar quais os parâmetros geométricos, propriedades dos materiais e o conjunto de armaduras necessárias para prevenir esses modos de ruptura. A Figura 3.24 resume o esquema estrutural da aba lateral de uma viga de seção “L” bem como os possíveis modos de ruptura considerados.

**Figura 3.24 – Esquema estrutural e modos de ruptura de abas laterais**

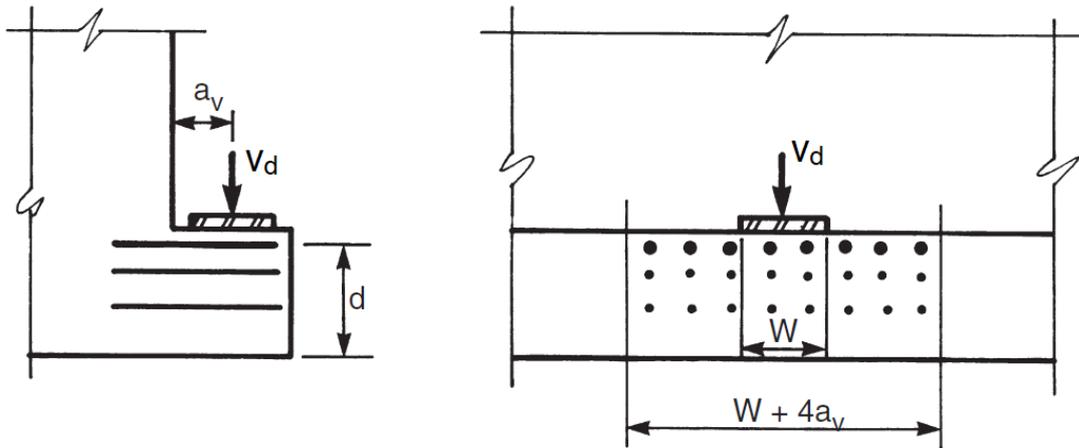


Fonte: Adaptado de PCA (2013)

As etapas de dimensionamento apresentadas pelas Notas do PCA (2013) são realizadas adaptando os modos de ruptura e as recomendações de Mirza e Furlong (1983a, 1983b, 1985) ao que preconiza o ACI 318:2011. Neste trabalho, todavia, algumas equações podem estar diferentes da versão original do PCA (2013) pois foram atualizadas conforme as recomendações do ACI 318:2019 e foram adaptadas para utilização em MPa, considerando o concreto com peso específico normal ( $25 \text{ kN/m}^3$ ).

A primeira etapa consiste no dimensionamento por atrito-cisalhamento da conexão entre a aba lateral e alma da seção. Para tanto, são feitas verificações para garantir que a resistência do concreto e as dimensões adotadas para aba lateral sejam suficientes para resistir à força aplicada pela laje, além do dimensionamento da armadura horizontal necessária ao modelo de ruptura por atrito-cisalhamento. A Figura 3.25 apresenta os parâmetros geométricos que afetam as verificações do modelo de ruptura por atrito-cisalhamento.

**Figura 3.25 – Parâmetros geométricos que afetam as verificações pelo modelo de ruptura por atrito-cisalhamento**



Fonte: Adaptado de PCA (2013)

De acordo com o item 16.5.2.4 do ACI 318:2019, e adaptando a largura efetiva ao  $W_{eff}$  mostrado na Figura 3.25, a força de cálculo aplicada pela laje ( $V_d$ ) não deve exceder o menor entre os seguintes valores:

$$V_d \leq \begin{cases} 0,2 \cdot f_{ck} \cdot W_{eff} \cdot d \\ (3,3 + 0,08 \cdot f_{ck}) \cdot W_{eff} \cdot d \\ 11 \cdot W_{eff} \cdot d \end{cases} \quad [3.98]$$

Em que:

$f_{ck}$ : resistência a compressão característica do concreto, em MPa;

$d$ : altura útil da aba lateral;

$W_{eff}$ : largura efetiva da aba lateral por força aplicada;

Para condições típicas no meio do vão:

$$W_{eff} \leq \begin{cases} W + 4 \cdot a_v \\ S \end{cases} \quad [3.99]$$

Próximo às extremidades:

$$W_{eff} \leq \begin{cases} W + 4 \cdot a_v \\ S \\ 2 \cdot C \end{cases} \quad [3.100]$$

Sendo:

$W$ : comprimento do aparelho de apoio;

$a_v$ : distância do ponto de aplicação da força pela laje até a face da alma;

S: distância entre forças aplicadas pela laje;

C: distância da última força aplicada pela laje até a extremidade da aba lateral.

A armadura horizontal necessária ao modelo de ruptura por atrito-cisalhamento deve ser calculada de acordo com o item 22.9.4.2 do ACI 318:2019, por meio da seguinte equação:

$$A_{vf} = \frac{V_d}{\mu \cdot f_{yd}} \quad [3.101]$$

Em que:

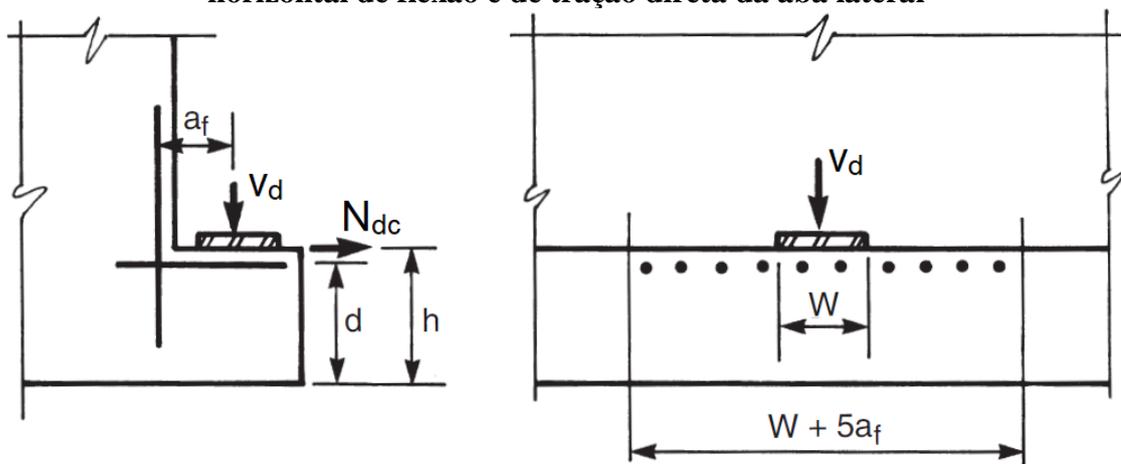
$V_d$ : força de cálculo aplicada pela laje;

$f_{yd}$ : resistência a tração de cálculo do aço;

$\mu$ : coeficiente de atrito = 1,4 (concretagem monolítica).

A segunda etapa consiste no dimensionamento da armadura horizontal de flexão da aba lateral, responsável por equilibrar os momentos fletores gerados pela excentricidade das forças verticais ( $V_u$ ) e horizontais ( $N_{uc}$ ) aplicadas pela laje. Nesta etapa, também é feito o dimensionamento da armadura horizontal de tração direta, responsável por equilibrar as forças normais horizontais ( $N_{uc}$ ) aplicadas pela laje. A Figura 3.26 apresenta os parâmetros geométricos que afetam o dimensionamento da armadura horizontal de flexão e tração direta.

**Figura 3.26 – Parâmetros geométricos que afetam o dimensionamento da armadura horizontal de flexão e de tração direta da aba lateral**



Fonte: Adaptado de PCA (2013)

A armadura horizontal de flexão deve ser dimensionada para equilibrar o momento fletor ( $M_u$ ), que pode ser calculado conforme o item R16.5.3.1 do ACI 318:2019. Segundo as Notas do PCA (2013), a armadura horizontal de flexão pode ser obtida utilizando os métodos convencionais de dimensionamento à flexão ou pela recomendação de Mirza e Furlong (1985) que prevê a utilização de um braço de alavanca igual a  $0,8d$  na vigas de seção “L”, em que  $d$  é a altura útil da aba lateral. Sendo assim, a armadura horizontal de flexão pode ser obtida por meio da seguinte expressão:

$$A_f \geq \frac{V_d \cdot a_f + N_{dc} \cdot (h - d)}{0,8 \cdot d \cdot f_{yd}} \quad [3.102]$$

Em que:

$V_d$ : força vertical de cálculo aplicada pela laje;

$N_{dc}$ : força horizontal de cálculo aplicada pela laje;

$a_f$ : distância entre o ponto de aplicação da força vertical o centroide da armadura transversal;

$h$ : altura da aba lateral;

$d$ : altura útil da aba lateral;

$f_{yd}$ : resistência a tração de cálculo do aço.

A armadura horizontal de tração direta deve ser dimensionada para equilibrar a força horizontal aplicada pela laje, conforme prescrição do item 16.5.4.3 do ACI 318:2019. A expressão que fornece a quantidade necessária de armadura é a seguinte:

$$A_n \geq \frac{N_{dc}}{f_{yd}} \quad [3.103]$$

Em que:

$N_{dc}$ : força horizontal de cálculo aplicada pela laje;

$f_{yd}$ : resistência a tração de cálculo do aço;

De acordo com a Notas do PCA (2013), em conformidade com o item 16.5.5.1 do ACI 318:2019, a armadura horizontal total a ser utilizada na aba lateral não deverá ser inferior ao maior dos seguintes valores:

$$A_{s,tir} \geq \begin{cases} A_f + A_n \\ (2/3).A_{vf} + A_n \\ 0,04.(f_{ck}/f_{yk}).d.(W + 5.a_f) \leq 0,04.(f_{ck}/f_{yk}).d.S \text{ [meio do v\~ao]} \\ 0,08.(f_{ck}/f_{yk}).d.C \leq 0,02.(f_{ck}/f_{yk}).d.(W + 5.a_f) \text{ [extremidades]} \end{cases} \quad [3.104]$$

A distribuiç~ao da armadura horizontal total ( $A_{sc}$ ) dever~a ser realizada em uma faixa igual a  $W + 5.a_f$  conforme apresentado na Figura 3.26. Caso a dist~ancia  $W + 5.a_f$  seja superior ~a dist~ancia entre as for~as aplicadas pela laje ( $S$ ), distribuiç~ao da armadura dever~a ser realizada em faixa igual a  $S$ . Nas regi~oes pr~oximas ~as extremidades, a armadura horizontal total dever~a ser distribu~ida em uma faixa igual a  $2.C$ , em que  $C$  ~e dist~ancia da ~ultima for~a aplicada pela laje at~e a extremidade da aba lateral, entretanto, a dist~ancia  $2.C$  n~ao pode ser superior a  $0,5(W + 5.a_f)$ , logo a express~ao [3.104] dever~a ser alterada.

As Notas do PCA (2013) ainda recomendam a utilizaç~ao de uma armadura de cisalhamento na aba lateral, de maneira an~aloga ~a armadura utilizada nos consolos. Tal recomendaç~ao ~e feita com base no item 16.5.5.2 do ACI 318:2019 e deve ser distribu~ida em uma faixa de  $(2/3).d$ . Caso a altura da aba lateral n~ao permita tal distribu~iç~ao, a armadura de cisalhamento por ser somada ~a armadura horizontal total ( $A_{sc}$ ). A express~ao que fornece a armadura de cisalhamento necess~aria ~e a seguinte:

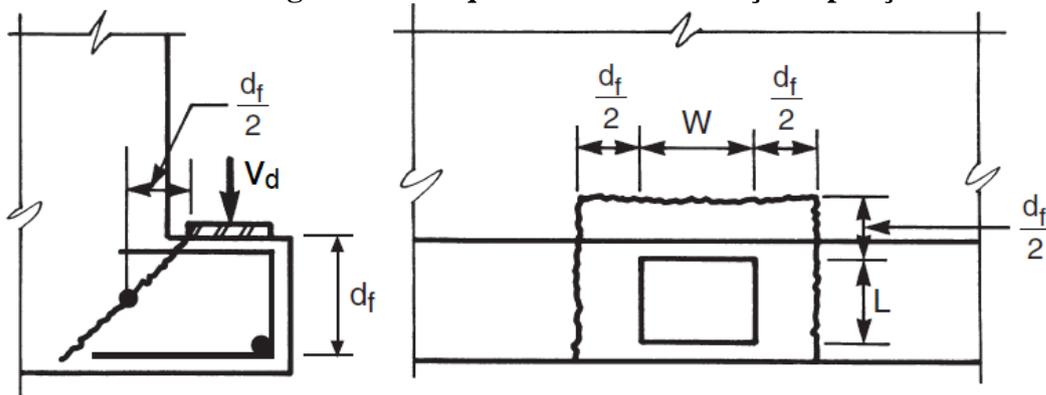
$$A_{s,cis} = 0,5(A_{s,tir} + A_n) \quad [3.105]$$

Em que:

$A_{s,tir}$ : armadura horizontal total;

$A_n$ : armadura horizontal de traç~ao direta.

Dimensionadas as armaduras horizontais necess~arias, inicia-se a terceira etapa que consiste no dimensionamento ~a punç~ao da aba lateral. Esse modo de ruptura ocorre em vigas de seç~ao "L" submetidas a cargas concentradas e, de acordo com as Notas do PCA (2013), pode ser verificado adotando-se o per~imetro cr~itico a partir dos par~ametros geom~etricos apresentados na Figura 3.27.

**Figura 3.27 – Parâmetros geométricos que afetam a verificação à punção da aba lateral**

Fonte: Adaptado de PCA (2013)

A capacidade resistente à punção da aba lateral estará verificada caso a força vertical de cálculo ( $V_d$ ) seja igual ou inferior a resistência à punção obtida de acordo com a perímetro crítico da aba lateral, no meio ou nas extremidades do vão, conforme as expressões [3.106] e [3.107] respectivamente:

Para condições típicas no meio do vão:

$$V_d \leq 0,33 \cdot \emptyset \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot d_f \cdot (W + 2L + 2d_f) \quad [3.106]$$

Próximo às extremidades:

$$V_d \leq 0,33 \cdot \emptyset \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot d_f \cdot (W + L + d_f) \quad [3.107]$$

Em que:

$\emptyset$ : coeficiente minorador da resistência;

$f_{ck}$ : resistência a compressão característica do concreto, em MPa;

$d_f$ : distância do topo da aba lateral até o centroide do ramo inferior da armadura horizontal;

$W$ : comprimento do aparelho de apoio;

$L$ : largura do aparelho de apoio.

A quarta etapa compreende o dimensionamento da armadura de suspensão, responsável por promover a suspensão das forças aplicadas na base da viga ao topo da seção e prevenir a separação da aba lateral com a alma. De acordo com as recomendações das Notas do PCA (2013), a armadura de suspensão deve ser dimensionada para atender à condição de estado limite último da viga de seção “L”, todavia, quando a aba lateral estiver submetida a um grande número de repetição de cargas acidentais, como em edifícios garagem e pontes por exemplo, o

documento prevê que se faça um dimensionamento complementar levando em conta também o estado limite de serviço.

O dimensionamento de um ramo da armadura de suspensão necessária para atender ao estado limite último pode ser feito por meio da seguinte expressão:

$$A_{s,sus} \geq \frac{V_d \cdot s}{f_{yd} \cdot S} \quad [3.108]$$

Em que:

$V_d$  : força vertical de cálculo aplicada pela laje;

$s$ : espaçamento entre estribos verticais que compõem a armadura de suspensão;

$S$ : espaçamento entre forças aplicadas pela laje;

$f_{yd}$ : resistência a tração de cálculo do aço;

Para os casos em que se faz necessário um dimensionamento complementar devido ao grande número de repetição de cargas acidentais, a determinação da armadura de suspensão em serviço pode ser feita por meio da expressão abaixo:

$$A_{s,sus} \geq \frac{V_k \cdot s}{0,5 \cdot f_{yk} \cdot (W + 3 \cdot a_v)} \quad [3.109]$$

Em que:

$V_k$  : força vertical característica aplicada pela laje;

$s$ : espaçamento entre estribos verticais que compõem a armadura de suspensão;

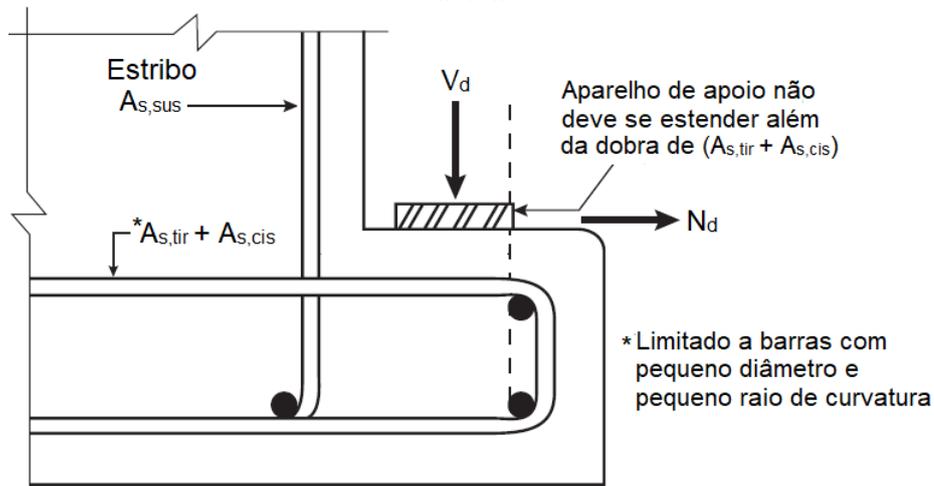
$f_{yk}$ : resistência a tração de cálculo do aço;

$W$ : comprimento do aparelho de apoio;

$a_v$ : distância do ponto de aplicação da força pela laje até a face da alma;

As considerações finais das Notas do PCA (2013) a respeito do dimensionamento das abas laterais de vigas de seção “L” são com relação à ancoragem da armadura horizontal total e o posicionamento do aparelho de apoio na aba, conforme ilustra a Figura 3.28.

**Figura 3.28 – Recomendações para o posicionamento do aparelho de apoio na aba lateral**



Fonte: Adaptado de PCA (2013)

De acordo com o documento, diferentemente dos consolos, nas vigas de seção “L” a ancoragem pode ser realizada por meio da utilização de estribos horizontais, somando a armadura horizontal total ( $A_{s,tir}$ ) com a armadura de cisalhamento ( $A_{s,cis}$ ), desde que o diâmetro das barras e o raio de curvatura possibilite o correto posicionamento da armadura. Por fim, de modo a se evitar uma ruptura localizada da extremidade da aba lateral, o documento recomenda que a extremidade do aparelho de apoio não deve se estender além da dobra da armadura horizontal.

### 3.3.4 Método Analítico Proposto por Nafadi et al. (2018a) para Resistência à Punção

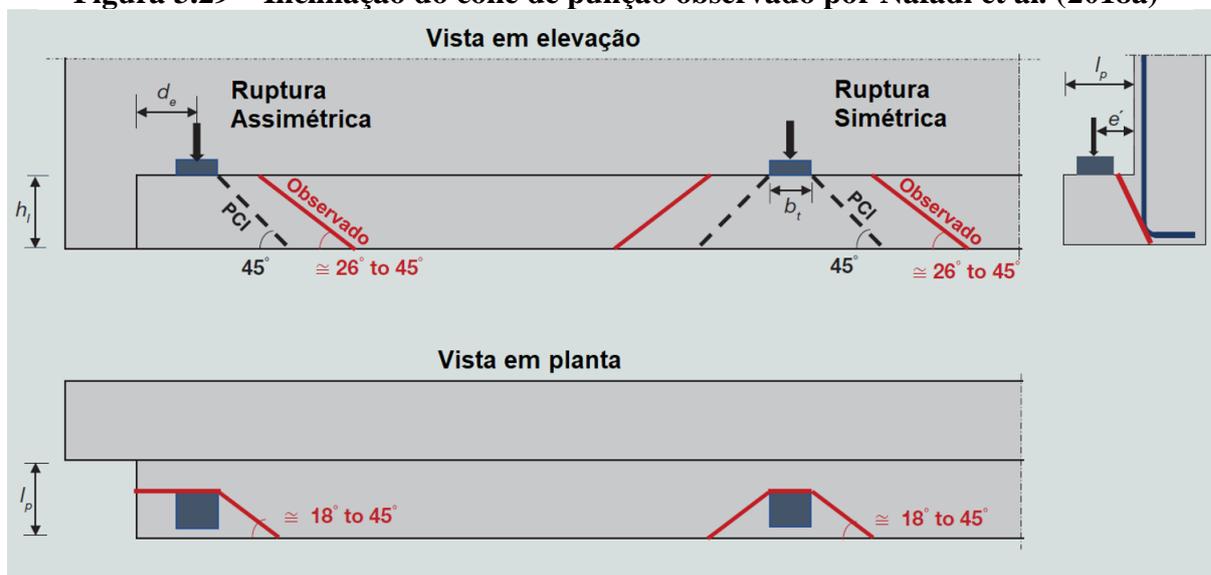
A metodologia proposta por Nafadi et al. (2018a) teve como principal objetivo substituir as recomendações feitas pelo manual de dimensionamento do PCI (2010), principalmente com relação a resistência à punção da aba lateral. A metodologia apresentada pelos autores foi feita com base no programa experimental apresentado em Nafadi et al. (2018a e 2018b) onde foram avaliadas, em escala real, 21 vigas com vão de 4,72 m, uma viga com vão de 11,1 metros e 8 vigas com vão de 13,9 metros. Todas as vigas foram submetidas a múltiplos testes em diferentes localizações ao longo do vão, totalizando 106 ensaios experimentais no programa. Além do programa experimental, a pesquisa também incluiu uma extensa análise numérica através de um modelo não-linear tridimensional por elementos finitos que foi validado por ensaios experimentais. Este modelo serviu de base para delinear o programa experimental e estender a

análise a parâmetros que não puderam ser avaliados experimentalmente. Maiores detalhes da pesquisa numérica podem ser vistos em Rizkalla et al. (2016).

Os resultados da pesquisa experimental e numérica mostraram uma série de parâmetros que afetam significativamente a resistência à punção de abas laterais de vigas de seção “L” que não são levados em conta pelo manual de dimensionamento do PCI (2010).

A nova proposta feita por Nafadi et al. (2018a) aponta que a resistência a punção das abas laterais são diretamente influenciadas por fatores como o estado de tensões globais da viga (flexão e cisalhamento), as forças de protensão e a excentricidade na aplicação da carga. Os autores observaram que enquanto elevados níveis de tensão global e o aumento da excentricidade na aplicação da carga causam reduções na resistência à punção, o uso da protensão eleva a capacidade da aba lateral em resistir as forças concentradas. Também foi observado que o ângulo de  $45^\circ$  proposto pelo Manual do PCI (2010) para a inclinação do cone de punção é superior ao observado nos experimentos, de modo que a superfície de ruptura observada é geralmente maior do que a considerada pelo manual, conforme ilustra a Figura 3.29.

**Figura 3.29 – Inclinação do cone de punção observado por Nafadi et al. (2018a)**



Fonte: Adaptado de Nafadi et al. (2018a)

De maneira geral, as conclusões obtidas pelos autores a respeito da resistência à punção das abas laterais de vigas de seção “L” mostraram que:

- As recomendações feitas pelo Manual do PCI (2010) podem superestimar significativamente a resistência a punção da aba lateral, principalmente nas regiões mais próximas do meio do vão;
- Pode-se observar também que os níveis de tensão global na viga foi o parâmetro de maior influência na resistência à punção, de modo que, níveis elevados de tensão, provocados pela flexão ou pelo cisalhamento na região de atuação de uma força concentrada, podem reduzir significativamente a resistência à punção da aba lateral;
- O aumento da excentricidade de aplicação da carga também provoca reduções na resistência à punção das abas laterais, entretanto, observou-se que adotar uma excentricidade em relação a face da alma igual a  $3/4$  da largura da aba lateral é uma maneira conservadora de se realizar o dimensionamento;
- Por outro lado, um fator observado foi que o uso da protensão eleva a resistência à punção da aba lateral, todavia, o grau de acréscimo na resistência depende do nível de protensão aplicado;
- Alguns testes também mostraram que um outro fator que também pode elevar a resistência a punção da aba lateral em 25% ou mais é a concentração da armadura horizontal e da armadura de suspensão próximo à região de aplicação da carga concentrada, mais especificamente em uma distância igual a  $b_t + 2h_l$ , em que  $b_t$  é o menor valor entre a largura do apoio da laje duplo “T” ou a largura do aparelho de apoio e  $h_l$  é a espessura da aba lateral.

Segundo Nafadi et al. (2018a) a utilização do Método das Bielas é uma maneira alternativa que pode ser utilizada para dimensionar as armaduras horizontais e de suspensão a nas vigas de seção “L”. Os autores não descrevem em quais condições geométricas a utilização do Método das Bielas pode ser adotada, ficando a cargo do projetista a decisão de utilizar o método proposto pelo Manual do PCI (2010) ou as recomendações genéricas feitas pelo ACI 318 para utilização do Método das Bielas.

O dimensionamento através do método analítico proposto por Nafadi et al. (2018a) segue, basicamente, os mesmos princípios do manual de dimensionamento do PCI (2010), apresentado em 3.3.2. A diferença, entretanto, é com relação à verificação da capacidade resistente à punção da aba lateral que, no método proposto pelos autores, contempla fatores complementares aos apresentados pelo manual. Desse modo, por brevidade, será apresentado

somente o equacionamento para verificação da resistência à punção, podendo ser utilizado o tópico 3.3.2 deste trabalho para o dimensionamento das armaduras.

A primeira etapa da verificação da capacidade resistente à punção é a obtenção das forças concentradas nas regiões que ocorrem a máxima força cortante e o máximo momento fletor, devendo ser feitas duas verificações de resistência à punção, uma em cada região.

Feitas as divisões e identificados os dois pontos nos quais a resistência à punção deverá ser verificada, calcula-se as taxas que relacionam a máxima força cortante e o máximo momento fletor com suas respectivas resistências, ambos os valores de cálculo,  $V_{sd}/V_{Rd}$  e  $M_{sd}/M_{Rd}$ . As duas taxas deverão ser calculadas simultaneamente nas duas regiões em que ocorrem os maiores esforços solicitantes, obtendo-se assim dois coeficientes R, que representam a maior entre as duas taxas para cada região.

Obtido o coeficiente R para cada região, é possível determinar um coeficiente  $\beta$  de resistência ao cisalhamento na aba lateral por meio das seguintes expressões:

Para  $R \leq 0,2$ :

$$\beta = 2,0 \quad [3.110]$$

Para  $0,2 < R < 0,6$ :

$$\beta = 1 + 2,5(0,6 - R) \quad [3.111]$$

Para  $R \geq 0,6$ :

$$\beta = 1,0 \quad [3.112]$$

De acordo com Nafadi et al. (2018a), para situações típicas, o coeficiente R provavelmente será superior a 0,6 nas regiões de máxima força cortante e máximo momento fletor, logo é razoável e sempre conservador adotar  $\beta = 1,0$ .

A etapa seguinte consiste na determinação da contribuição da protensão na resistência à punção a aba lateral, caso a protensão seja utilizada no dimensionamento da viga de seção “L”. O fator que determina essa contribuição pode ser obtido por meio da seguinte expressão:

$$\gamma = \sqrt{1 + 10 \cdot \frac{f_{pc}}{f_{ck}}} \quad [3.113]$$

Em que:

$f_{pc}$  = tensão média de protensão após todas as perdas;

$f_{ck}$  = resistência característica à compressão do concreto.

Por fim, a resistência à punção da aba lateral pode ser determinada pelo menor valor entre as Equações [3.114], [3.115], [3.116] e [3.117]. Quando as forças concentradas estiverem localizadas a uma distância igual ou superior a  $0,5b_t + h_l + L_p$ , deverá ser utilizada a menor entre as Equações [3.114], [3.115], com  $b_t$  sendo o menor valor entre a largura do apoio da laje duplo “T” ou a largura do aparelho de apoio,  $h_l$  é a espessura da aba lateral e  $L_p$  é a distância da face da alma até a face da aba lateral (projeção da aba lateral). Caso as forças concentradas estejam localizadas a uma distância inferior a  $0,5b_t + h_l + L_p$  deve ser adotado o menor valor entre as Equações [3.116] e [3.117]. Vale ressaltar que as equações foram adaptadas para que possam ser utilizadas em MPa, considerando o concreto com peso específico normal (25 kN/m<sup>3</sup>).

Para  $d_e \geq 0,5b_t + 2h_l + 2L_p$ :

$$\emptyset V_n = \emptyset \cdot 0,083 \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot h_l \cdot (b_t + 2h_l + 2L_p) \quad [3.114]$$

$$\emptyset V_n = \emptyset \cdot 0,041 \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot h_l \cdot (b_t + 2h_l + s + 2L_p) \quad [3.115]$$

Para  $d_e < 0,5b_t + 2h_l + 2L_p$ :

$$\emptyset V_n = \emptyset \cdot 0,083 \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot h_l \cdot (0,5b_t + h_l + d_e + L_p) \quad [3.116]$$

$$\emptyset V_n = \emptyset \cdot 0,041 \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot h_l \cdot (0,5b_t + h_l + d_e + s + L_p) \quad [3.117]$$

Em que:

$\emptyset$ : coeficiente minorador da resistência;

$\gamma$ : fator que considera o nível de protensão;

$\beta$ : coeficiente de resistência ao cisalhamento considerando o nível de tensões globais;

$f_{ck}$ : resistência a compressão característica do concreto, em MPa;

$h_l$ : espessura da aba lateral;

$d_e$ : distância do ponto de aplicação da força à extremidade da aba lateral (sentido longitudinal);

$b_t$ : menor valor entre a largura do apoio da laje duplo “T” ou a largura do aparelho de apoio;

$s$ : espaçamento entre os pontos de aplicação das forças;

$L_p$ : distancia da face da alma até a face da aba lateral (projeção da aba lateral).

Apesar do trabalho feito por Nafadi et al. (2018a) ter se concentrado somente nas abas laterais solicitadas por forças concentradas, as observações feitas pelos autores sugerem que as recomendações feitas pelo Manual do PCI (2010) também podem superestimar a resistência ao cisalhamento das abas laterais solicitadas por forças distribuídas. Desse modo, os autores recomendam que a Equação [3.91] apresentada neste trabalho seja substituída pela seguinte expressão:

$$\phi V_n = \phi \cdot h_1 \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad [3.118]$$

Conforme exposto anteriormente, a obtenção das armaduras necessárias pode ser feita adotando-se a mesma abordagem proposta no manual de dimensionamento do PCI (2010), apresentada no item 3.3.2 deste trabalho.



## 4 MÉTODO DAS BIELAS

A utilização do Método das Bielas teve origem a partir da “Analogia de Treliça” proposta por Ritter e Mörsch no início do século XX. Tal analogia foi desenvolvida através de observações experimentais, para tornar possível o dimensionamento de armaduras transversais em vigas de concreto. Até hoje, a analogia é utilizada com sucesso para o dimensionamento de vigas de concreto armado a força cortante e a torção. A generalização da “Analogia de Treliça” é o que comumente se denomina Método das Bielas ou Modelos de Escoras e Tirantes (“*Strut-and-Tie Models*”) (SOUZA, 2004).

De acordo com Schlaich e Schäfer (1991), alguns pesquisadores, entre eles Bay, Franz, Leonhardt, Kupfer e Thürliman, mostraram através de diversas aplicações que os Modelos de Escoras e Tirantes poderiam ser muito úteis quando aplicados em vigas-parede e consolos. A partir disso, Schlaich, Schäfer e outros membros do Instituto de Estruturas de Concreto da Universidade de Stuttgart na Alemanha, reuniram todos os seus esforços para expandir e sistematizar esses modelos para todas as estruturas.

Os trabalhos de Schlaich e Schäfer (1987, 1988, 1991) e Marti (1985, 1991) impulsionaram o uso do Método das Bielas no meio científico. A partir de publicações que continham informações mais refinadas a respeito do método, os pesquisadores proporcionaram a adoção de critérios sistemáticos, abrindo caminho para a utilização do método tanto pela comunidade científica em geral como por diversos documentos normativos (SOUZA, 2004).

Ao longo dos últimos anos, o Método das Bielas tem sido amplamente estudado e utilizado por ser uma alternativa viável e segura ao dimensionamento das regiões que apresentam descontinuidades, ditas “Regiões D” (“*Disturbed*” ou “*Discontinuity*”). Nestas regiões, pelo fato da distribuição das deformações não serem lineares, a “Hipótese de Bernoulli” pode não ser aplicável, logo, os métodos convencionais baseados na análise seccional dos elementos podem não refletir o real comportamento da estrutura, podendo conduzir a soluções inseguras de dimensionamento.

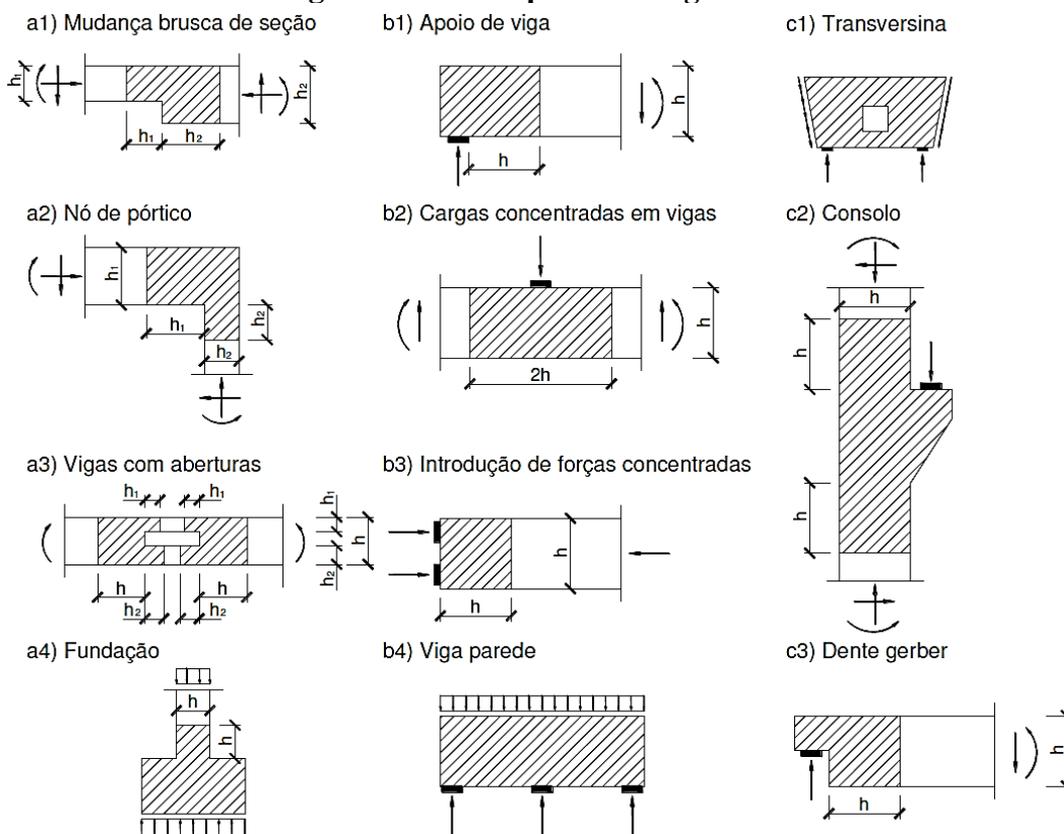
As “Regiões D” se diferenciam das “Regiões B” (“*Beam*” ou “*Bernoulli*”), onde a “Hipótese de Bernoulli” é válida, pela presença de descontinuidades geométricas ou descontinuidades estáticas. As descontinuidades geométricas são causadas por mudanças bruscas na geometria do elemento, enquanto as descontinuidades estáticas são causadas pela

presença de cargas concentradas, seja pela aplicação direta da carga no elemento ou por regiões próximas aos apoios.

A condição de descontinuidade estática no elemento pode ser caracterizada fazendo-se uso do “Princípio de Saint Venant”, que demonstra que nas regiões próximas a aplicação do carregamento, existem grandes perturbações nas tensões, principalmente se a carga for pontual. De acordo com o princípio, as tensões no elemento só se regularizam após uma região definida por dimensões da mesma ordem de grandeza da altura da seção transversal do elemento carregado, ou seja, o comprimento de perturbação do elemento pode ser tomado como sendo a altura da seção transversal.

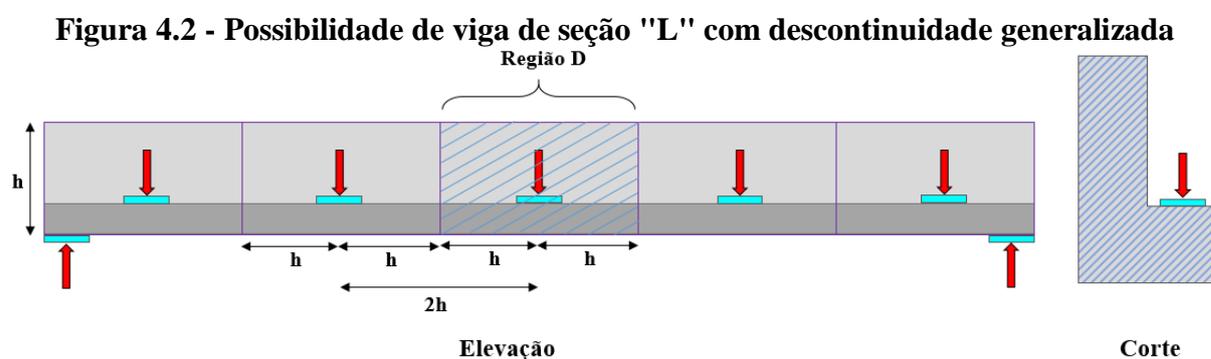
Existem ainda situações em que o elemento pode estar integralmente inserido em uma “Região D”, sendo chamadas “zonas de descontinuidade generalizada”. Nestes casos as relações existentes entre o vão, os pontos de aplicação das cargas e altura da seção não são suficientes para que as tensões se regularizem, constatando-se que a estrutura fica perturbada como um todo. A Figura 4.1 apresenta exemplos de descontinuidade geométrica (a), descontinuidade estática (b) e descontinuidade geométrica e estática simultaneamente (c).

**Figura 4.1 - Exemplos de “Regiões D”**



Fonte: ABNT NBR 6118:2014

Além das estruturas mostradas na Figura 4.1, as vigas de seção “L” de concreto pré-moldado também são exemplos que podem estar submetidos a condição de descontinuidade geométrica, estática ou até mesmo de descontinuidade generalizada. A descontinuidade geométrica é ocasionada pela mudança brusca na geometria da seção devido a presença da aba lateral. A descontinuidade estática pode surgir devido a presença de cargas concentradas quando se utilizam lajes duplo “T”, situação corriqueira na indústria do pré-moldado. Por fim, pode ainda ocorrer a situação de descontinuidade generalizada na seção, quando a distância entre os pontos de aplicação das forças concentradas forem inferiores a duas vezes a altura ( $h$ ) da viga conforme ilustra a Figura 4.2.



Fonte: Autor (2020)

A revisão da ABNT NBR 6118:2014, diferentemente das versões anteriores, passou a abordar conceitos mais genéricos para utilização do Método das Bielas dentro do Capítulo 22, mais especificamente no item 22.3. Neste item são apresentados de maneira breve os procedimentos para aplicação do método, bem como os parâmetros necessários para análise e dimensionamento de elementos especiais tanto em “Regiões D” como em “zonas de descontinuidade generalizada”.

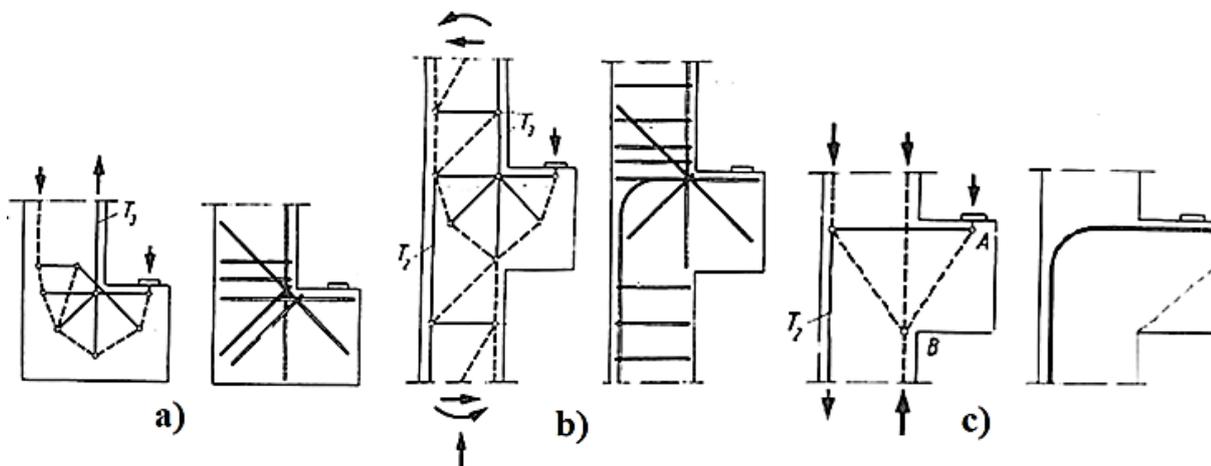
Apesar da norma brasileira fazer menção ao método como “Método de Bielas e Tirantes”, segundo Souza (2004), como o termo biela pode representar tanto elementos submetidos a compressão quanto elementos submetidos à tração, chamar o método de bielas e tirantes seria redundante, logo, é mais adequado adotar a nomenclatura somente como Método das Bielas ou Modelos de Escoras e Tirantes (“*Strut-and-Tie Models*”).

Diversas normas e códigos internacionais adota o Método das Bielas como teoria para o dimensionamento das regiões em que forças concentradas ou descontinuidades geométricas provocam uma distribuição não linear das deformações podendo-se destacar por exemplo, as

considerações feitas pelo Eurocode 2 (2004), FIB (CEB-FIP) “*Model Code*” (2010), o boletim técnico 61 FIB (CEB-FIP) “*Design Examples for Strut-and-Tie Models*” (2013), além das diversas possibilidades de utilização apresentadas pela norma canadense CSA 23.3:2014 e a recente revisão da norma americana ACI 318:2019 que apresentou doze novas alterações com relação à utilização do Método das Bielas. Segundo Moehle (2019) as alterações aprovadas tornarão o método ainda mais versátil além de aumentar a segurança e a capacidade de utilização.

Aplicações do Método das Bielas em vigas de seção “L” de concreto pré-moldado já são vistas há algum tempo na literatura. Conforme ilustra Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) as vigas de seção “L” podem ser dimensionadas através de uma abordagem semelhante ao mecanismo resistente dos consolos, uma vez que os caminhos das tensões são similares. A Figura 4.3 ilustra exemplos utilizados pelos autores comparando modelos de treliça adotados em consolos com abas laterais de vigas de seção “L”.

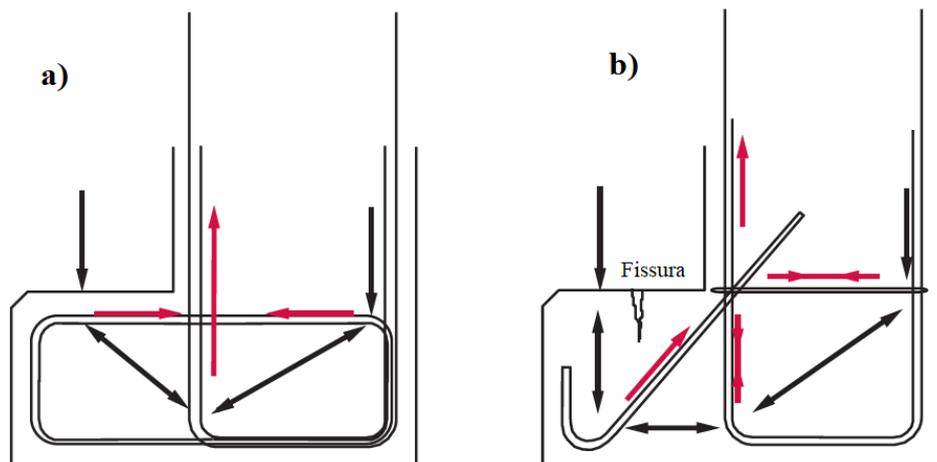
**Figura 4.3 – Comparação entre modelos resistentes para aba lateral de vigas de seção “L” e consolos**



Fonte: Adaptado de Schäfer, Schlaich e Jennewein (1987)

Segundo Whittle (2013), em caso de solicitações de grande magnitude pode ser necessário adotar mais de um modelo de treliça, simultaneamente, para transferir as forças com segurança. O autor ressalta que os caminhos menos diretos percorridos pelas forças causarão maior distorção e fissuração, não devendo ser utilizados para o estado limite de serviço. A Figura 4.4 mostra dois modelos apresentados por Whittle (2013) para resistir aos esforços excêntricos. É possível notar que os modelos são semelhantes aos apresentados na Figura 4.3.

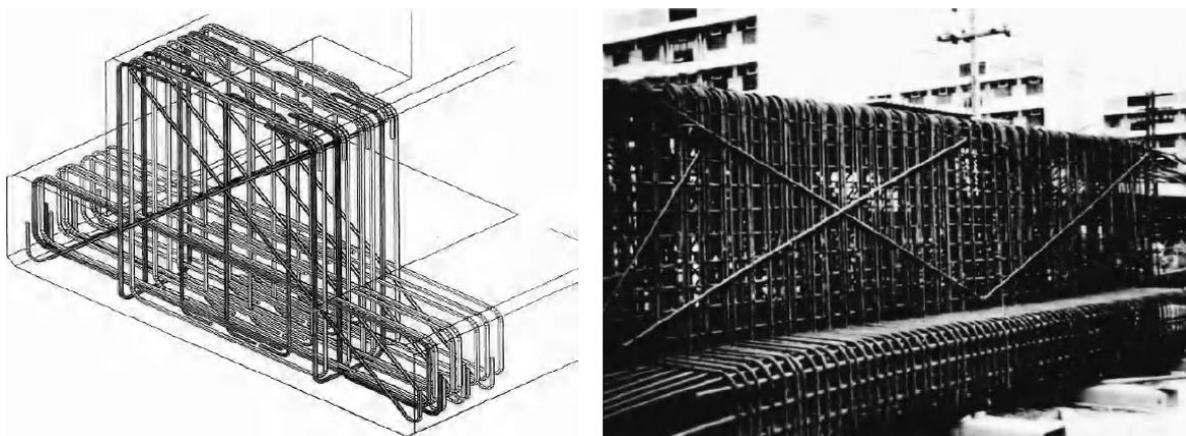
**Figura 4.4 – Combinação de modelos de escoras e tirantes para vigas de seção "L"**



Fonte: Whittle (2013)

De acordo com Whittle (2013), o modelo primário mostrado na Figura 4.4a é mais direto, visto que, a trajetória das forças é mais próxima de um modelo elástico, criando a menor distorção interna para atingir o equilíbrio. Já a Figura 4.4b mostra um modelo secundário de escoras e tirantes, que quando adotado, pode ser acompanhado por distorções e fissuras no concreto antes que se possa alcançar o equilíbrio. Caso as solicitações impostas na viga de seção "L" sejam muito elevadas para serem suportadas somente pelo modelo primário, é razoável sobrepor o modelo secundário ao primário para fornecer resistência suficiente para o estado limite último (Figura 4.5). Entretanto, é importante garantir que o modelo primário seja suficiente para resistir às solicitações no estado limite de serviço, principalmente para garantir o controle das fissuras.

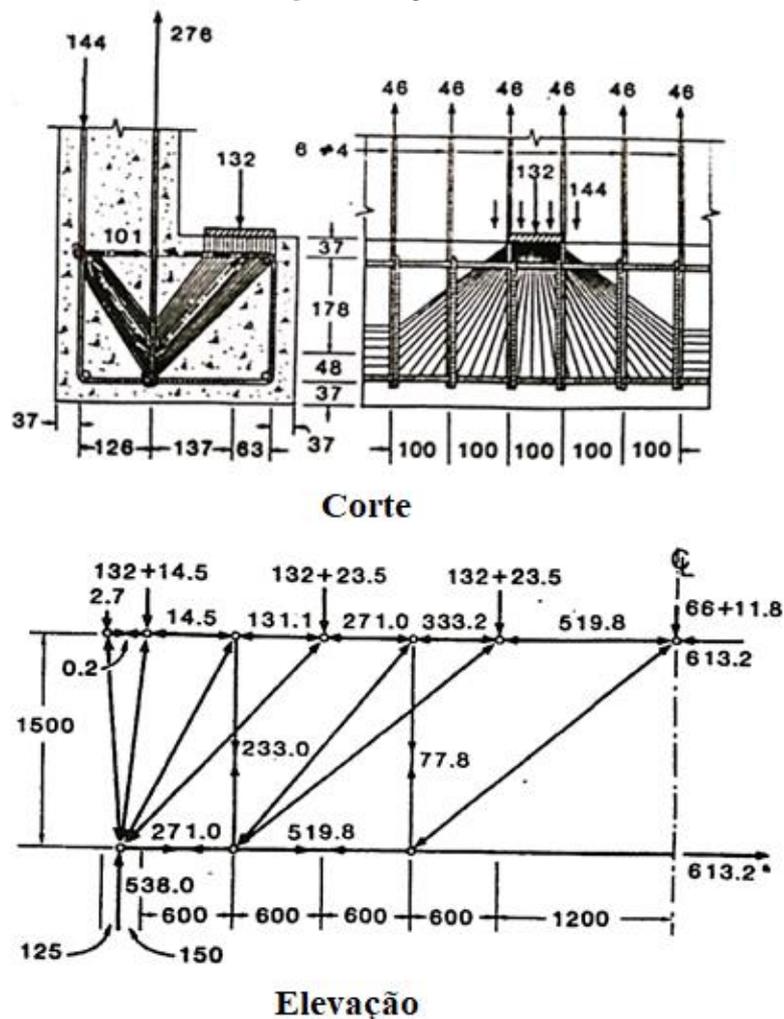
**Figura 4.5 - Modelos sobrepostos para suportar cargas de grande magnitude**



Fonte: Whittle (2013)

Também no campo de aplicação do Método das Bielas em vigas de seção “L” de concreto pré-moldado, um dos trabalhos mais completos a respeito da aplicação do método foi feito por Marti (1985). O autor demonstra através de um exemplo numérico que o método pode ser utilizado para o dimensionamento completo de vigas de seção “L”. Segundo a abordagem feita pelo autor, a excentricidade do ponto de aplicação das forças nas abas laterais faz com que os esforços cortantes e a torção na viga possam ser tratados por modelos de treliça que atuam em conjunto com o modelo de treliça da aba lateral. Através de conceitos da mecânica das estruturas e da resistência dos materiais, o autor ainda propõe uma simplificação para desacoplar o modelo espacial de viga de seção “L”, que é essencialmente tridimensional, em dois modelos planos, facilitando ainda mais a utilização do método na resolução do problema. A Figura 4.6 ilustra a abordagem feita pelo autor.

**Figura 4.6 – Abordagem feita por Marti (1985) para utilização do Método das Bielas em vigas de seção "L"**



Fonte: Adaptado de Marti (1985)

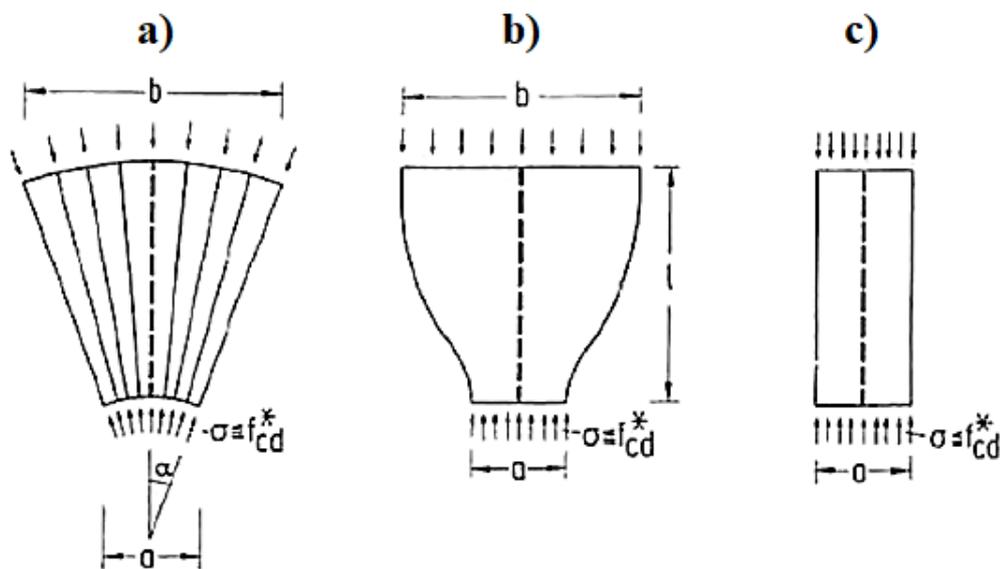
Para que se faça a análise e dimensionamento de elementos de concreto utilizando o Método das Bielas com segurança é necessário a compreensão dos princípios básicos que governam o método, o entendimento a respeito dos parâmetros fundamentais de resistência dos elementos que compõe os modelos de treliça, além do conhecimento a respeito das recomendações presentes na literatura e nos documentos normativos, que darão respaldo técnico para utilização. Os tópicos a seguir visam apresentar de maneira clara e direta os principais conceitos que governam o Método das Bielas, bem como dar suporte à resolução de exemplos.

#### 4.1 PRINCÍPIOS BÁSICOS

O Método das Bielas consiste basicamente em substituir a estrutura real por uma estrutura resistente equivalente na forma de treliça. Nesses modelos equivalente, os campos principais de tensão são discretizados por elementos de barra em que as escoras representam os campos principais de compressão e os tirantes os campos principais de tração. Portanto, por esse motivo, o Método das Bielas também recebe a nomenclatura de Modelo de Escoras e Tirantes (HU, LEY E HUSSEL, 2014).

Segundo Schäfer, Schlaich e Jennewein (1987), as configurações típicas de escoras necessárias para cobrir todos os campos de compressão existentes nas estruturas de concreto são as escoras do tipo leque, garrafa e prismática, conforme ilustra a Figura 4.7.

**Figura 4.7 - Tipos de escoras: a) Leque; b) Garrafa; c) Prismática**



Fonte: Schäfer, Schlaich e Jennewein (1987)

De acordo com Souza (2004) as três configurações típicas para as escoras de concreto se diferenciam bastante no que diz respeito às perturbações por tensões. As definições para cada tipo de escora são as seguintes:

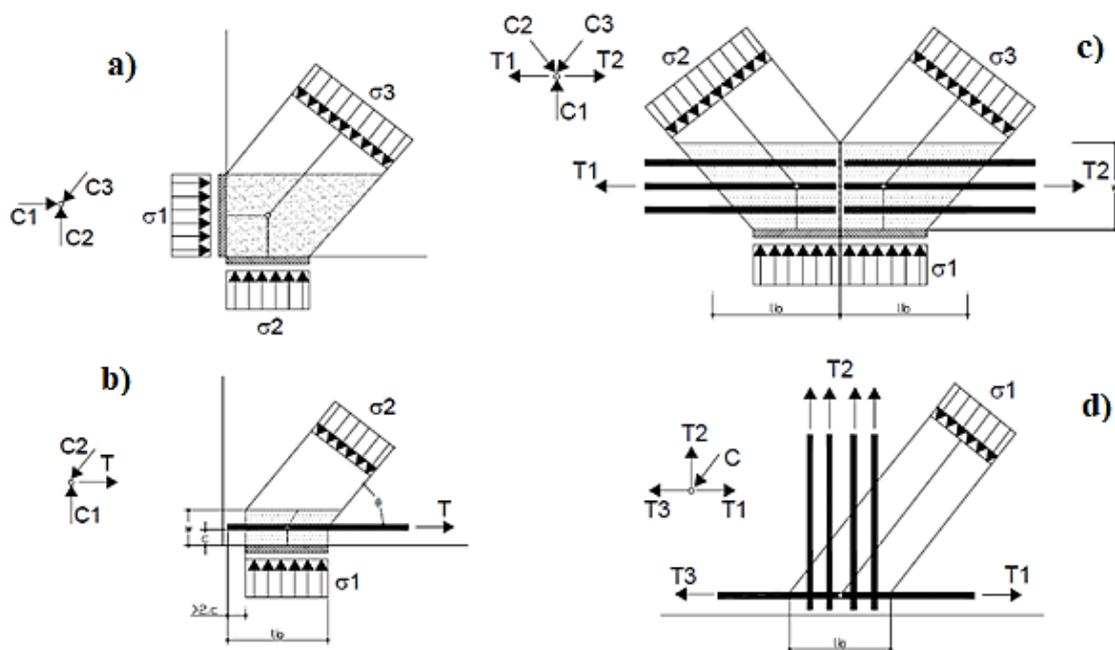
- Escoras Leque: trata-se de uma idealização de um campo de tensão com curvatura desprezível, que não desenvolve tensões transversais de tração (Figura 4.7a);
- Escora Garrafa: trata-se de um tipo de escora que possui a distribuição de tensão em linhas curvilíneas com afinamento da seção e que desenvolve tensões transversais de tração consideráveis (Figura 4.7b);
- Escora Prismática ou Paralela: trata-se de um campo de tensões que se distribui uniformemente, sem perturbação, e que não produz tensões transversais de tração (Figura 4.7c);

Já os tirantes normalmente são constituídos por barras de aço, uma vez que a capacidade resistente a tração do concreto é um tanto quanto limitada. Todavia, em algumas situações específicas é necessário o uso de tirantes de concreto, como por exemplo lajes sem estribos, ancoragens e trechos de barras dobradas. O dimensionamento das seções dos tirantes, sejam formados por barras de aço ou por concreto, será decorrente das forças atuantes nestes elementos no estado limite último, sendo a resistência ao escoamento do aço considerada para os tirantes de aço e a resistência a tração do concreto para os tirantes de concreto.

Os elementos responsáveis pela ligação entre as escoras e os tirantes são denominados nós ou regiões nodais. Conforme Schlaich e Schäfer (1991) os nós presentes nos modelos de escoras e tirantes podem ser classificados como nós contínuos ou nós singulares. Os nós contínuos são regiões nas quais os desvios das forças são feitos em comprimentos razoáveis, onde a própria região nodal é suficiente para garantir a ancoragem das armaduras. Por outro lado, os nós singulares ou concentrados, são regiões onde os desvios das forças são feitos localmente. Estas regiões normalmente são críticas e devem ter suas tensões verificadas de modo a equilibrar as forças que nela atuam sem produzir deformações excessivas.

As regiões nodais podem estar submetidas a ação somente de forças de compressão (nós CCC), somente a forças de tração (nós TTT) ou à ação conjunta de forças de compressão e forças de tração (nós CCT e CTT). A Figura 4.8 apresenta exemplos das regiões nodais descritas.

**Figura 4.8 – Exemplos de regiões nodais CCC, CCT, CTT e TTT**



Fonte: Adaptado de Schäfer e Schlaich (1991) apud Souza (2004)

A tipologia a ser considerada em cada nó será governada pelo número de forças de tração presentes na região nodal. Por exemplo, na Figura 4.8c o nó apresenta três forças de compressão (C1, C2 e C3) e duas forças de tração (T1 e T2), logo, adota-se que este seja um nó do tipo CTT, pela quantidade de forças de tração que compõem a região nodal. Apesar da Figura 4.8d apresentar uma força de compressão na composição do nó, considera-se que este nó seja do tipo TTT por apresentar três forças de tração.

## 4.2 PARÂMETROS FUNDAMENTAIS

O Método das Bielas tem sua fundamentação baseada no Teorema do Limite Inferior da Teoria da Plasticidade, que segundo Santos (2003), pode ser entendido como sendo a condição em que a carga atuante terá uma magnitude que permita obter um campo de tensões que satisfaça as condições de equilíbrio no interior e no contorno e em qualquer ponto do corpo, também satisfaça um critério de resistência do material.

Desse modo, Pantoja (2010) afirma que caso um campo de tensões se enquadre na condição descrita acima, esse campo é dito seguro ou estaticamente admissível. O fato de uma

carga real de ruína ser sempre igual ou superior a um campo de tensões estaticamente admissível, faz com que os limites inferiores sejam sempre a favor da segurança.

Afim de se utilizar os requisitos apresentados pela norma brasileira para o dimensionamento de viga de seção “L” pelo Método das Bielas, serão apresentados a seguir somente os parâmetros de resistência presentes na ABNT NBR 6118:2014. Todavia, é importante ressaltar, que estes parâmetros variam conforme o documento normativo adotado ou a literatura consultada.

#### 4.2.1 Escoras

De acordo com a ABNT NBR 6118:2014 o eixo das escoras deve ser escolhido de maneira a se aproximar o máximo possível das tensões principais de compressão. As escoras inclinadas devem ter um ângulo de inclinação cuja tangente esteja entre 0,57 e 2 em relação ao eixo da armadura longitudinal do elemento estrutural, ou seja, a angulação deve estar entre 29,68° e 63,43°.

As expressões adotadas pela norma brasileira para definir os parâmetros de resistência de cálculo (tensões máximas resistentes) para as escoras de concreto são mostradas a seguir:

$$f_{cd1} = 0,85 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \quad [4.1]$$

$$f_{cd2} = 0,60 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \quad [4.2]$$

$$f_{cd3} = 0,72 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \quad [4.3]$$

Em que:

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad [4.4]$$

Sendo:

$f_{cd1}$  = parâmetro de resistência efetiva para escoras prismáticas ou nós CCC;

$f_{cd2}$  = parâmetro de resistência efetiva para escoras atravessadas por mais de um tirante, ou nós CTT ou TTT;

$f_{cd3}$  = parâmetro de resistência efetiva para escoras atravessadas por tirante único, ou nós CCT;

$\alpha_{v2}$  = coeficiente de fragilidade, com  $f_{ck}$  em MPa;

$f_{cd}$  = resistência a compressão de cálculo do concreto.

Analisando as expressões acima nota-se que o parâmetro  $f_{cd1}$  é especificado com clareza pela ABNT NBR 6118:2014 como sendo destinado às escoras do tipo prismática. Já para os parâmetros  $f_{cd2}$  e  $f_{cd3}$ , a norma aponta somente a quantidade de tirantes que atravessa a escora o que pode gerar dúvidas quanto a sua utilização, uma vez que, diferentes modelos de treliça podem atender a um mesmo problema e a quantidade de tirantes que atravessa as escoras pode não refletir a configuração correta da escora.

A partir dos conceitos apresentados por Souza (2004), avalia-se, portanto, que o parâmetro  $f_{cd2}$  deve ser destinado às escoras do tipo garrafa, uma vez que as tensões transversais ao campo de tensões curvilíneo faz com este tipo de escora tenha menores valores de resistência, devido principalmente à possibilidade de surgimento de fissuras nestas regiões. As escoras do tipo leque, por outro lado, apresentam campos de tensão radiais onde não se desenvolvem tensões transversais, logo avalia-se que o parâmetro de resistência efetiva a ser adotado deve ser o  $f_{cd1}$ .

#### 4.2.2 Regiões Nodais

Os parâmetros para a resistência de cálculo das regiões nodais recomendados pela ABNT NBR 6118:2014 são os mesmo utilizados para escoras, sendo expressos pelas Equações [4.1], [4.2] e [4.3]. Sendo assim, os parâmetros atribuídos às regiões nodais devem ser feitos de tal modo que o parâmetro  $f_{cd1}$  seja destinado aos nós CCC, o parâmetro  $f_{cd2}$  destinado aos nós CTT ou nós TTT e o parâmetro  $f_{cd3}$  destinado aos nós CCT.

#### 4.2.3 Tirantes

O parâmetro de resistência de cálculo dos tirantes recomendado pela ABNT NBR 6118:2014, leva em conta a resistência ao escoamento do aço e a força atuante no elemento no estado limite último. O cálculo deste parâmetro tem como resposta a área de aço ( $A_s$ ) a ser aplicada no tirante sendo expresso da seguinte forma:

$$A_s = \frac{F_{sd}}{f_{yd}} \quad [4.5]$$

Em que:

$F_{sd}$  = valor de cálculo da força de tração determinada no tirante;

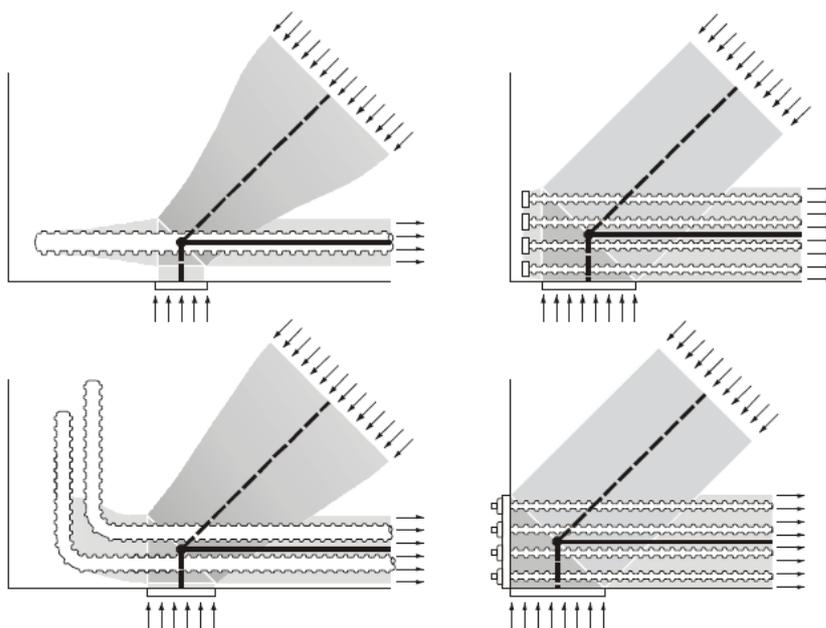
$f_{yd}$  = resistência à tração de cálculo do aço.

Segundo Souza (2004), recomenda-se que as armaduras calculadas para os tirantes sejam distribuídas ao longo de toda a zona efetivamente tracionada. Tal medida visa limitar a abertura de fissuras no concreto. Uma previsão para abertura de fissuras pode ser obtida considerando-se o tirante como uma barra prismática de concreto. De acordo com o ACI-318:2019, o centroide das armaduras do tirante deve coincidir com o eixo do tirante assumido no modelo de escoras e tirantes, ou seja, coincidir com o posicionamento das barras da treliça idealizada.

Um outro aspecto extremamente importante em relação aos tirantes tracionados nas “Regiões D” é a ancoragem nas extremidades das regiões nodais. Para que os modelos de escoras e tirantes funcionem de acordo com os resultados obtidos na análise do modelo de treliça, deve-se garantir que a ancoragem dos tirantes esteja assegurada nas regiões nodais. Para isso, é necessário que se tenha um volume adequado de concreto que envolva as armaduras do tirante.

Segundo a ABNT NBR 6118:2014 todas as barras das armaduras devem ser ancoradas de modo que as forças a que estejam submetidas sejam integralmente transmitidas ao concreto, seja por meio de aderência, de dispositivos mecânicos ou pela combinação dos dois. As ancoragens por aderência ocorrem quando os esforços são transmitidos ao concreto por meio de um comprimento reto ou com grande raio de curvatura, seguido ou não de gancho. Já as ancoragens por meio de dispositivos mecânicos acontecem quando as forças são transmitidas ao concreto por meio de dispositivos mecânicos auxiliares que visam melhorar a ancoragem das armaduras caso a ancoragem por aderência não tenha comprimento suficiente. A Figura 4.9 apresenta alguns exemplos de condições para ancoragem dos tirantes nas regiões nodais próxima aos apoios.

**Figura 4.9 - Exemplos de condições de ancoragem nos tirantes**



Fonte: Tjhin e Kuchma (2002)

Da mesma forma como foi visto na ancoragem dos chumbadores em ligações submetidas à torção, a ABNT NBR 6118:2014 trata da ancoragem de barras por aderência através do cálculo do comprimento de ancoragem básico. Este comprimento é entendido como o comprimento reto de uma barra de armadura passiva necessário para ancorar a força  $F_{sd}$  que chega no tirante. O comprimento de ancoragem básico pode ser reduzido caso sejam previstos ganchos, barras transversais soldadas ou a combinação entre ganchos e barras transversais soldadas. Outro parâmetro que também auxilia na diminuição do comprimento de ancoragem básico é a relação entre a quantidade de armadura calculada e a quantidade de armadura que efetivamente foi utilizada.

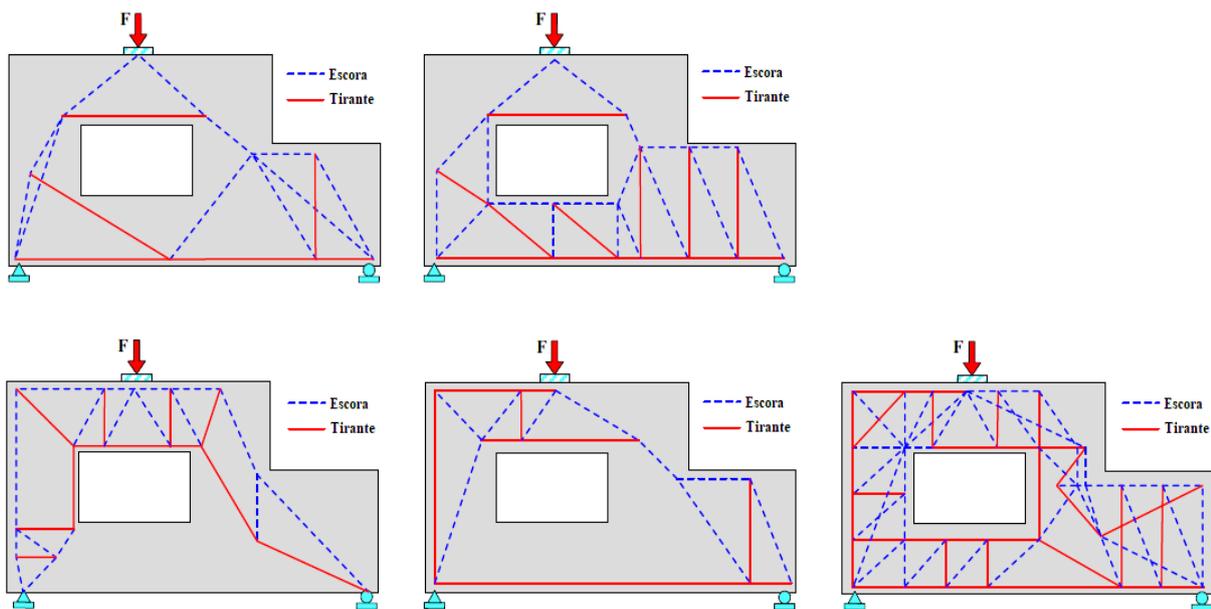
Caso sejam utilizados dispositivos mecânicos, a norma prevê que a eficiência do conjunto deve ser justificada e, quando for o caso, comprovada através de ensaios. Também são impostos limites para o escorregamento entre a barra e o concreto junto ao dispositivo de ancoragem.

#### 4.3 PROCESSOS DE OBTENÇÃO DOS MODELOS

Segundo Zhong et al. (2017) diferentes modelos de treliça podem ser verificados para uma mesma “Região D”. Para essas diferentes configurações, a disposição e a quantidade de

armadura necessária pode variar significativamente. Portanto, é necessário que se tenha modelos confiáveis que representem de maneira adequada o caminho das tensões. A Figura 4.10 apresenta um exemplo com cinco modelos de treliça para a mesma viga-parede, o que demonstra a grande versatilidade que o Método das Bielas apresentam no detalhamento de elementos descontínuos.

**Figura 4.10 - Diferentes modelos de escoras e tirantes para a mesma viga-parede**



Fonte: Adaptado de Zhong et al. (2017)

Souza (2004) apresenta algumas alternativas em relação aos processos de obtenção dos modelos de treliça:

- Modelos padronizados: Sua utilização tem sido preconizada por diversos documentos normativos e normalmente são baseados em extensas comprovações experimentais. A padronização dos modelos é o desejo da maioria dos profissionais ligados as estruturas de concreto, principalmente pela agilidade na análise e dimensionamento de estruturas complexas. Devido a diversidade geométrica que pode ocorrer na estrutura, os modelos padronizados acabam tendo seu campo de validade limitado, uma vez que estes modelos geralmente estão amarrados aos parâmetros geométricos da estrutura;

- Processo do caminho das cargas: Busca-se o encontro entre as ações que estão de um lado da estrutura com as ações que as equilibram do outro lado, através de caminhos alinhados que não se interceptem entre si. Após desenhados todos os caminhos, é feita a substituição

destes caminhos por linhas de um polígono, que são divididas em escoras (linhas pontilhadas) e tirantes (linhas cheias). A desvantagem do processo do caminho das cargas é que desenvolvimento do caminho depende de uma certa sensibilidade e experiência do profissional;

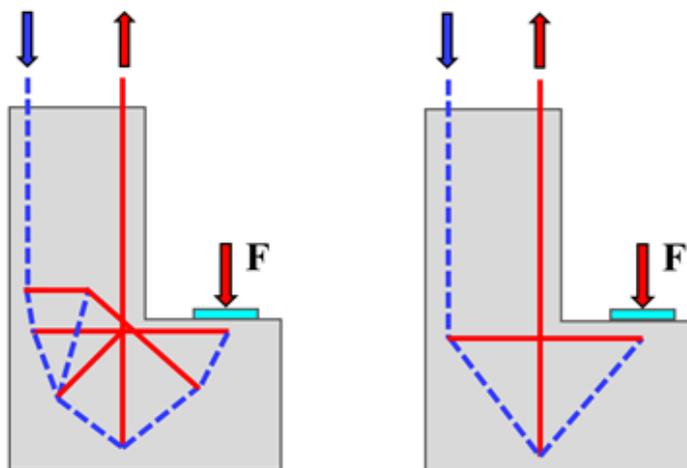
- Análises Elásticas: Baseiam-se nos fluxos de tensões obtidos a partir de análises elásticas utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), cabendo ressaltar que é necessário cuidado na escolha da malha e na interpretação dos resultados fornecidos pelo método, para que não este não leve a dimensionamentos que sejam inseguros;

- Análises Não-Lineares: Os modelos são concebidos através da visualização dos panoramas de fissuração obtidos em ensaios experimentais ou através de programa computacionais de elementos finitos com recursos de análise não-linear que apresentem as regiões de fissuração;

- Processos de otimização: A disponibilização e localização dos elementos pelos processos de otimização são feitos de maneira automática através de programações lineares, não-lineares e otimizações topológicas.

Para as vigas de seção “L” de maneira mais específica, pode se observar na literatura que os modelos de treliça adotados são muito semelhantes aos modelos padronizados utilizados para o dimensionamento de consolos e dentes de apoio. Os modelos apresentados por Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) e Marti (1985), ilustrados na Figura 4.11 – Modelos padronizados de treliça para utilização em vigas de seção "L", são recomendados para o dimensionamento da aba lateral podendo ser usados separadamente ou ainda conforme aponta Whittle (2013), podem ser unificados para situações em que ocorrem cargas de grande intensidade.

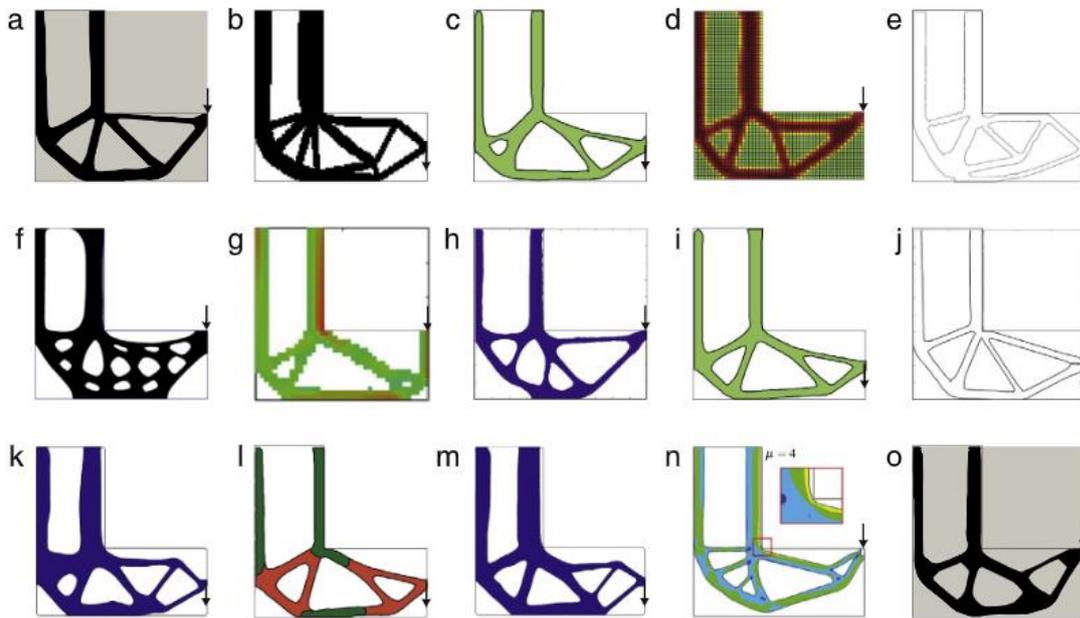
**Figura 4.11 – Modelos padronizados de treliça para utilização em vigas de seção "L"**



Fonte: Adaptado de Schäfer, Schlaich e Jennewein (1987) e Marti (1991)

Nos últimos anos diversos autores têm aplicado processos de otimização, baseados em diferentes teorias, em vigas de seção “L” para obtenção das tensões principais no elemento (Figura 4.12). É interessante observar como os modelos mais refinados se aproximam das propostas feitas há um certo tempo por Schäfer, Schlaich e Jennewein (1987) e Marti (1991), demonstrando que as vigas de seção “L” podem ser representadas com segurança por modelos padronizados de treliça, uma vez que a variação de modelo para modelo não é relevante.

**Figura 4.12 – Modelos baseados em processos de otimização para vigas de seção "L"**



Fonte: Picelli et al. (2018)

Percebe-se, de maneira geral, que a substituição da estrutura real por uma estrutura resistente na forma de treliça não é uma tarefa trivial. A medida que o grau de complexidade da estrutura aumenta, maiores serão as possibilidades e as dificuldades de obtenção de um modelo de treliça que represente com fidelidade o caminho das tensões principais, ficando a critério do profissional a escolha por qual modelo usar. Várias são as alternativas que se tem para a obtenção de um modelo de treliça que venha a caracterizar o comportamento de uma “Região D”, portanto é essencial que o modelo escolhido represente da melhor maneira possível o caminho das tensões até os apoios.

Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) afirmam que para seleção do melhor modelo, o profissional deve considerar sempre aquele que tende a seguir os caminhos mais curtos e com as menores deformações. Pelo fato dos tirantes serem mais deformáveis que as escoras, o modelo com o menor número de tirantes possivelmente será o mais adequado.

#### 4.4 ANÁLISE E VERIFICAÇÕES

De acordo com Pantoja (2012), de maneira geral, um projeto feito adotando-se o Método das Bielas envolve tipicamente os seguintes passos:

I) Definição de todas as descontinuidades e isolamento das “Regiões D”. Esse processo é feito a partir da identificação das mudanças bruscas na geometria do elemento e através da utilização do “Princípio de Saint Venant”;

II) Computar as resultantes de forças em cada contorno da “Região D”, sendo que, as tensões resultantes calculadas entre as “Regiões B” e “Regiões D” podem ser consideradas como forças pontuais equivalentes;

III) Considerar um modelo de treliça adequado que transfira as resultantes de forças através da Região D, coincidindo o eixo das escoras e tirantes com os campos principais de compressão e tração respectivamente;

IV) Calcular os esforços solicitantes nas barras da treliça. Estes esforços podem ser facilmente obtidos através de algum software de análise estrutural. No caso dos modelos de treliças isostáticas mais simplificadas, a análise pode ser feita manualmente através de algum método consagrado, como por exemplo o “Método dos nós ou Método de Cremona” ou o “Método das seções ou Método de Ritter”. Para modelos hiperestáticos uma solução bastante interessante seria a solução em mínima norma Euclidiana. Segundo Pantoja (2012), essa formulação utiliza a teoria da inversa generalizada de matrizes para substituir a solução elástica de um elemento desconexo de treliça, logo, dessa forma, seria possível obter uma solução única, compatível e equilibrado para o problema proposto.

V) Determinar as larguras efetivas das escoras comprimidas e regiões nodais, considerando as forças atuantes obtidas no passo anterior e a resistência efetiva a ser adotadas em cada elemento. Em alguns casos pode haver ainda a necessidade de se fazer ajustes na geometria e novamente determinar os esforços na treliça;

VI) Calcular as seções das armaduras necessárias para os tirantes considerando a tensão de resistência do aço utilizado. Nesta etapa importante que as armaduras sejam detalhadas de maneira a garantir a ancoragem necessária;

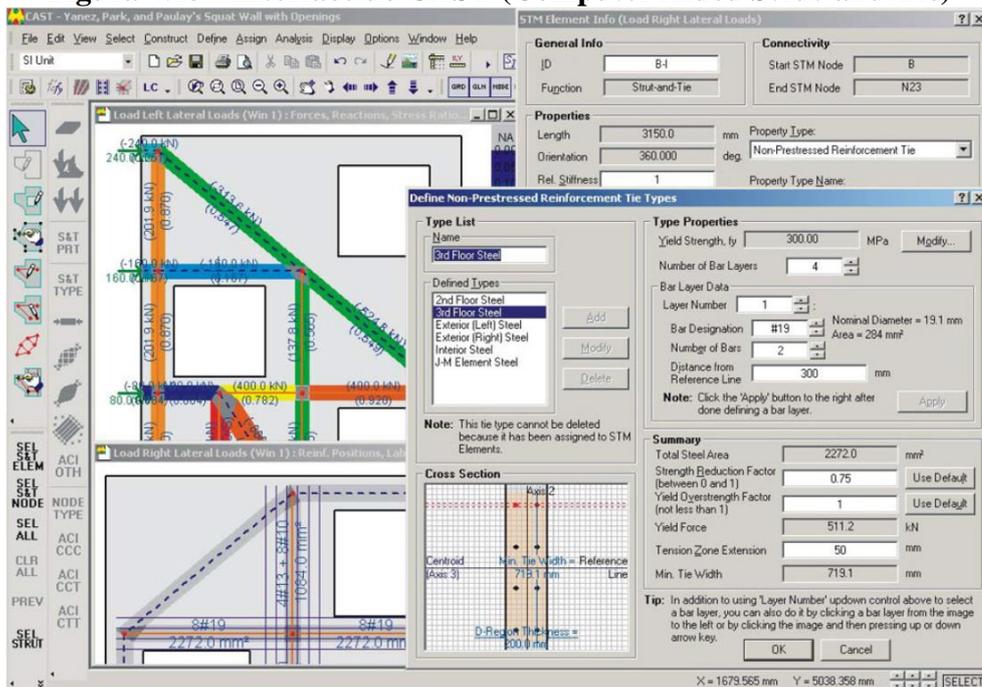
VII) Por fim, é necessário verificar os níveis de tensões finais nas escoras e nas regiões nodais, além de uma apropriada definição da armadura de pele a ser utilizada para controle da fissuração do elemento estrutural.

De acordo com Souza (2004) e Pantoja (2012), afim de se obter um comportamento dúctil frente ao estado limite último, é aconselhável garantir ainda que os tirantes escoem antes que as escoras ou regiões nodais entrem em ruína.

#### 4.5 SOFTWARE CAST

O software *CAST – Computer Aided Strut-and-Tie* é uma ferramenta gráfica de projeto desenvolvida na Universidade de Illinois sob a supervisão do Prof. Dr. Daniel Alexander Kuchma com o objetivo de trazer eficiência e transparência ao processo de dimensionamento pelo Método das Bielas. O software baseia-se principalmente em um ambiente gráfico onde o profissional é capaz de desenhar a geometria da “Região D”, desenhar e obter os esforços nas barras de um modelo de treliça isostático, selecionar as dimensões, os tipos das escoras e a quantidade de armadura nos tirantes, tendo a possibilidade de gerar arquivos de saída que resumem todo o processo de dimensionamento e verificações. A metodologia consistente e bem fundamentada que a ferramenta promove faz com que o dimensionamento das “Regiões D” se torne rápido e eficaz. Maiores informações a respeito do desenvolvimento, critérios adotados e utilização do software podem ser vistas em Tjhin e Kuchma (2002), Tjhin (2004) e Tjhin e Kuchma (2007).

**Figura 4.13 - Interface do CAST (Computer Aided Strut-and-Tie)**

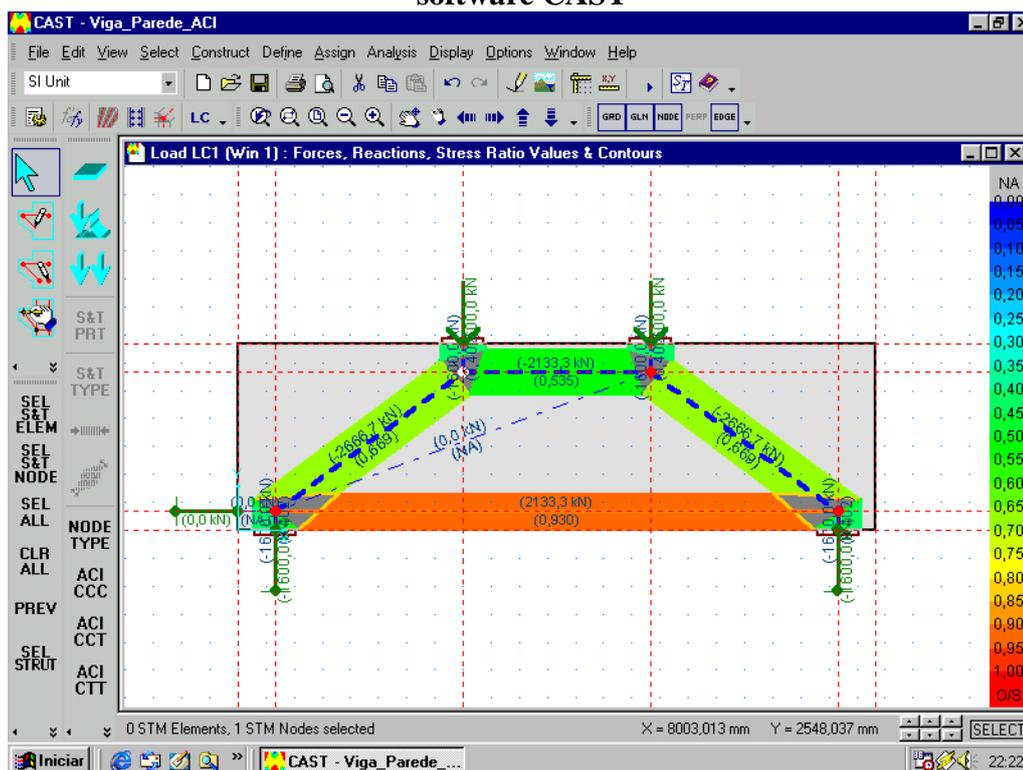


Fonte: Tjhin e Kuchma (2007)

Nos últimos anos diversos autores têm aplicado o software CAST para o desenvolvimento de trabalhos que visam avaliar o comportamento e a resistência de modelos de escoras e tirantes em diferentes situações de “Regiões D”, ficando evidente o potencial e a grande variabilidade de uso que a ferramenta computacional proporciona.

Souza (2004) avaliou o comportamento de duas vigas-paredes utilizando o software CAST (Figura 4.14). Os resultados foram comparados com cálculos manuais para uma viga de geometria mais simples e com análises não-lineares utilizando o software de elementos finitos DIANA para uma viga de geometria complexa. A ferramenta computacional apresentou-se como um procedimento de grande eficiência para a verificação dos modelos investigados, principalmente pela complexidade das regiões nodais, atendendo com grande segurança o desenvolvimento da carga limite.

**Figura 4.14 – Viga-parede analisada e verificada automaticamente com auxílio do software CAST**

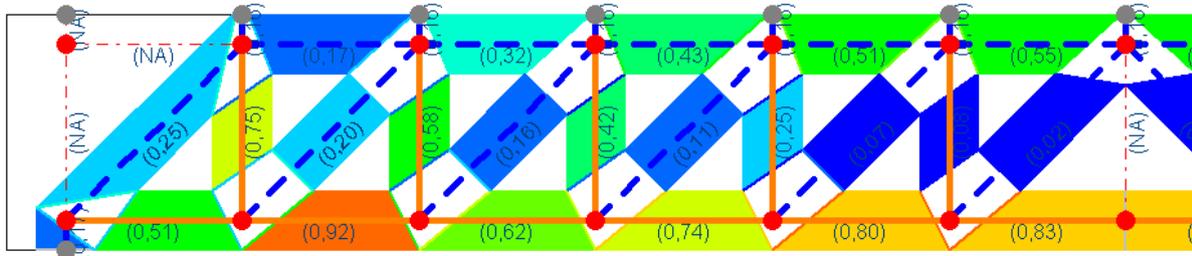


Fonte: Souza (2004)

Santos e Giongo (2008) analisaram uma viga convencional de concreto armado utilizando o modelo de escoras e tirantes através do software CAST (Figura 4.15). Segundo os pesquisadores, a utilização do software se apresentou como uma alternativa muito interessante na verificação e no dimensionamento de viga de concreto armado usuais. A grande vantagem

da utilização do software é praticidade na verificação dos nós, mostrando-se certamente como um enorme auxílio aos projetos estruturais pelo Método das Bielas.

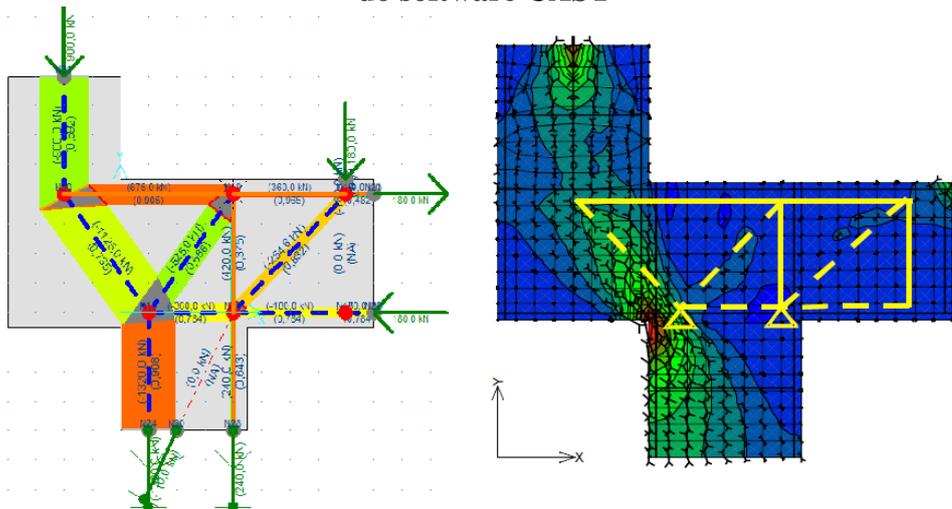
**Figura 4.15 – Viga convencional analisada e verificada automaticamente com auxílio do software CAST**



Fonte: Santos e Giongo (2008)

Frantova, Stemberk e Vala (2012) utilizaram o software CAST afim de explorarem a possibilidade de utilização do Método das Bielas em situações mais complexas, como pilares excêntricos aos apoios, por exemplo. Comparações entre a utilização do Método das Bielas com simulações numéricas (Figura 4.16), mostraram que o método foi capaz de prever corretamente a capacidade máxima resistente da estrutura, com o software CAST se mostrando um grande aliado na obtenção desses resultados.

**Figura 4.16 – Pilares excêntricos analisados e verificados automaticamente com auxílio do software CAST**



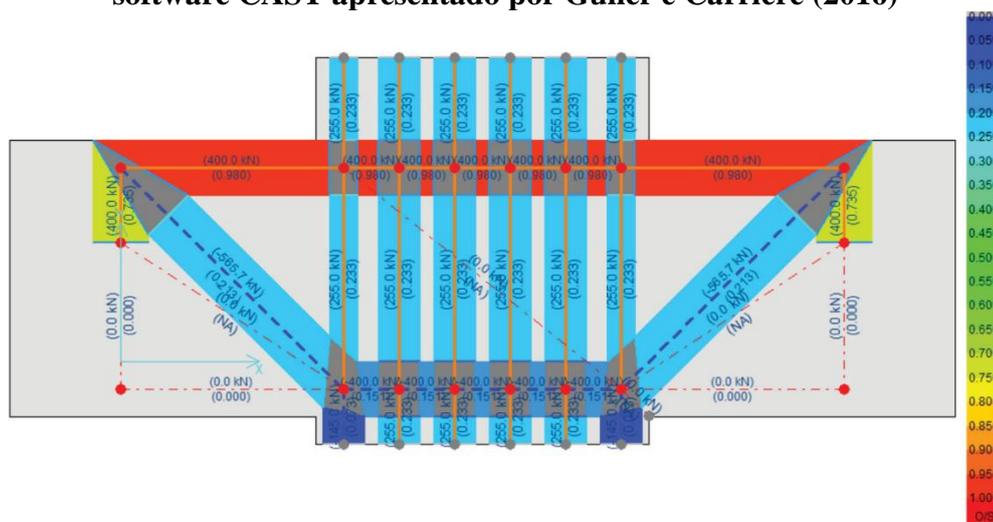
Fonte: Adaptado de Frantova, Stemberk e Vala (2012)

Campione, Cucchiara e Minafo (2014) avaliaram experimentalmente a influência das aberturas circulares no comportamento de pilares de concreto armado. As previsões analíticas

para capacidade de carga dos pilares nas regiões das aberturas foram feitas através de um modelo de escoras e tirantes obtido da literatura com auxílio do software CAST para a análise e traçado das curvas de carga x deformação. Os pesquisadores recomendam o uso do software para avaliação do comportamento de “Regiões D” uma vez que os resultados obtidos pelas previsões analíticas foram próximos dos resultados experimentais.

Guner e Carrière (2016) aplicaram o software na análise e dimensionamento do reforço da fundação de uma torre de transmissão (Figura 4.17). A metodologia proposta levou em conta modelos de escoras e tirantes e análises não-lineares por elementos finitos. Um estudo de caso foi apresentado, mostrando-se que a ação conjunta do software CAST, para o dimensionamento das escora, tirantes e regiões nodais, com a análise não-linear por elementos finitos, para avaliação da fissuração e do comportamento da ligação entre o reforço e a estrutura inicial, proporcionou um dimensionamento eficiente e seguro.

**Figura 4.17 – Reforço em fundação dimensionado automaticamente por com auxílio do software CAST apresentado por Guner e Carrière (2016)**



Fonte: Guner e Carrière (2016)

Como visto acima, o software CAST tem sido utilizado com sucesso em diferentes situações para automatização do processo de análise e dimensionamento de elementos de concreto através de modelos de escoras e tirantes. Apesar do software não contemplar, nas configurações originais do programa, os parâmetros de resistência recomendados pela ABNT NBR 6118:2014, é possível manipular os dados de entrada para que os valores de resistência coincidam com os valores preconizados pela norma brasileira. Dentre as diversas funcionalidades e opções que o programa possui, a seguir, serão apresentados os comandos

básicos do software afim de permitir a compreensão do estudo de caso a ser realizado posteriormente.

#### 4.5.1 Configurações Iniciais

A primeira etapa para utilização do software são as definições das propriedades gerais da região “D” a ser analisada (Figura 4.18). Como o software realiza somente a análise e verificação de modelos planos de treliça, o primeiro campo denominado “*D-Region Thickness*”, corresponde à espessura da região “D”, que deve ser definida em relação ao eixo normal ao plano analisado. O segundo campo “*Concrete Compressive Strength*” corresponde à resistência a compressão do concreto, que pode ser assumida como o valor do  $f_{ck}$  do concreto. O terceiro campo “*Concrete Tensile Strength*” corresponde ao valor da resistência à tração do concreto, que na falta de valores de ensaios, pode ser calculada de acordo com o item 8.2.5 da ABNT NBR 6118:2014. Por fim no campo “*Non-Prestressed Reinforcement Yield Strength*” é definido o valor característico da resistência ao escoamento da armadura utilizada, normalmente aço CA-50, correspondendo a um valor de resistência de 500 MPa.

**Figura 4.18 – Definição das propriedades gerais do software CAST**

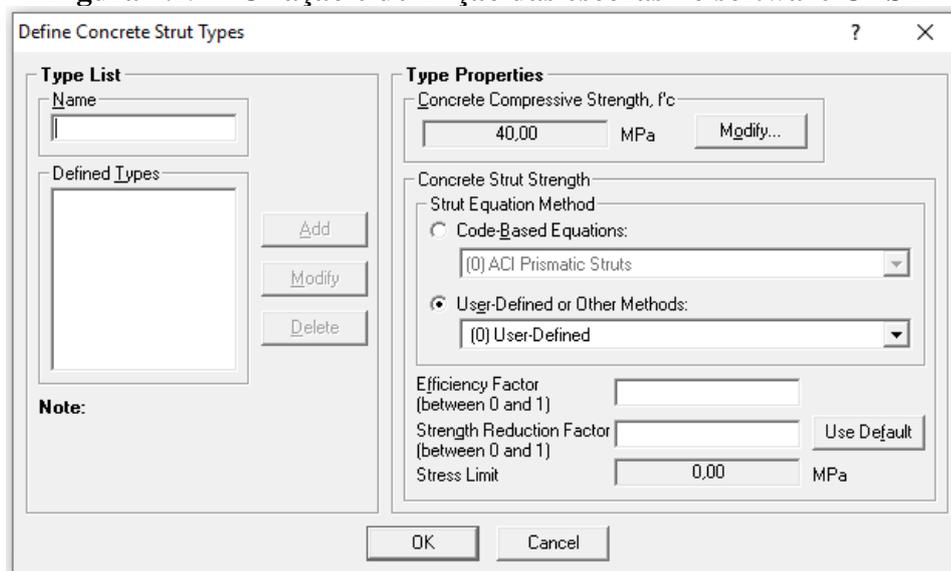
The image shows a dialog box titled "Define General Properties" with a question mark and a close button in the top right corner. The dialog is divided into three sections. The first section, "D-Region Thickness", has a text input field followed by "mm". The second section, "Material Strengths", contains three rows of labels and input fields: "Concrete Compressive Strength, f'c" (MPa), "Concrete Tensile Strength, f'ct" (MPa), and "Non-Prestressed Reinforcement Yield Strength, fy" (MPa). A "Use Default" button is positioned to the right of the second input field. At the bottom of the dialog are "OK" and "Cancel" buttons.

Fonte: Autor (2020)

Definidas as propriedades gerais do software, parte-se então para criação e definição do tipo e capacidade das escoras de concreto (Figura 4.19). Como visto anteriormente, as escoras representam os campos principais de compressão e devem ter sua resistência de cálculo configurada em conformidade com o documento normativo ou a literatura adotada como referência para o dimensionamento. O software não apresenta por padrão as resistências

preconizadas pela ABNT NBR 6118:2014, sendo necessário fazer adaptações para correta utilização.

**Figura 4.19 – Criação e definição das escoras no software CAST**



Fonte: Autor (2020)

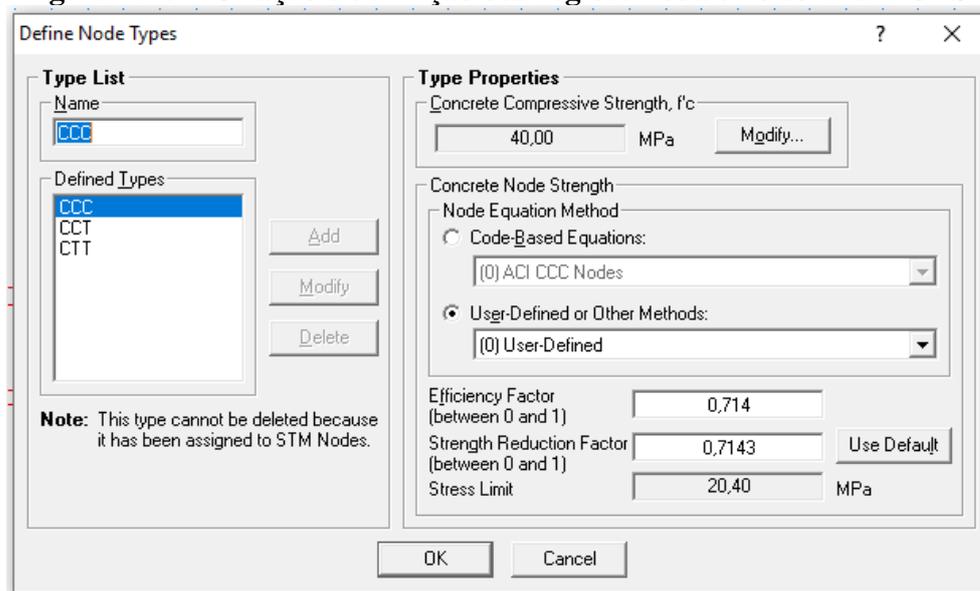
Para criação de um novo tipo de escora em conformidade com os valores recomendados pela ABNT NBR 6118:2014, deve-se manter selecionado o campo “*User-Defined or Other Methods*” e marcar a opção “(0) *User-Defined*”, caso contrário, serão adotados valores pré-configurados baseados nas recomendações do ACI 318 ou em valores clássicos obtidos na literatura. O próximo passo é a inserção do nome da escora no campo “*Name*” e a configuração dos campos “*Efficiency Factor*” e “*Strength Reduction Factor*” que representam o fator de eficiência da escora e o fator de redução da resistência do concreto para valores de cálculo.

O fator de eficiência da escora compreende a multiplicação entre os dois primeiros valores das Equações [4.1], [4.2] e [4.3], a depender do tipo de escora inserida. Ou seja, serão os valores  $0,85 \cdot \alpha_{v2}$  para as escoras prismáticas ou leque,  $0,60 \cdot \alpha_{v2}$  para escoras do tipo garrafa ou atravessadas por mais de um tirante e  $0,72 \cdot \alpha_{v2}$  para escoras atravessadas por um único tirante. O fator de redução da resistência do concreto corresponde à minoração da resistência a compressão característica ( $f_{ck}$ ) para a resistência a compressão de cálculo ( $f_{cd}$ ). Como esse fator será usado para multiplicar o  $f_{ck}$  ele deverá ser inserido como  $0,7143 (1 \div 1,4)$ , ou seja, um valor inferior a 1,0. O campo “*Stress Limit*” será calculado automaticamente e deverá coincidir com os valores  $f_{cd1}$ ,  $f_{cd2}$  ou  $f_{cd3}$  apresentados pela norma.

Por fim a escora deverá ser cadastrada através do botão “Add”. O procedimento deverá ser repetido para quantas escoras o usuário desejar inserir. Posteriormente, caso necessários, também podem ser modificados os valores de entrada ou excluída alguma escora através das opções “Modify” e “Delete” respectivamente.

A inserção das regiões nodais em conformidade com os valores recomendados pela ABNT NBR 6118:2014 é feita de maneira idêntica ao apresentado para as escoras conforme pode ser observado na Figura 4.20.

**Figura 4.20 – Criação e definição das regiões nodais no software CAST**



Fonte: Autor (2020)

Por fim a última etapa das configurações iniciais é a criação e definição dos tirantes (Figura 4.21). Conforme explicação anterior, os tirantes representam os campos principais de tração e devem ser definidos de maneira que a força resistente do tirante seja maior que a força atuante na barra tracionada da treliça. Para criação de um novo tirante conforme as recomendações da ABNT NBR 6118:2014 também é necessário que esteja selecionado o campo “User-Defined”. Inicialmente define-se o número de camadas de barras adotadas para o tirante no campo “Number of Bar Layers”. A partir do número de camadas, é possível definir, para a camada desejada (“Layer Number”), qual a área das barras utilizadas na camada (“Bar Area”), o número de barras na camada (“Number of Bars”), além da distância da camada em relação à uma linha de referência (“Distance from Reference Line”) apresentada no campo “Cross Section”.

**Figura 4.21 – Criação e definição dos tirantes no software CAST**

**Define Non-Prestressed Reinforcement Tie Types**

**Type List**

Name:

Defined Types:

Add Modify Delete

**Note:**

**Type Properties**

Yield Strength,  $f_y$ : 500,00 MPa

Number of Bar Layers: 4

Standard:  ASTM A615/A615M  User-Defined

**Bar Layer Data (User-Defined)**

Layer Number: 1

Bar Area: 284 mm<sup>2</sup>

Number of Bars: 3

Distance from Reference Line: 0 mm

**Cross Section**

Axis 2

Reference Line

Centroid (Axis 3)

Effective Tie Width = 250,0 mm

D-Region Thickness = 400,0 mm

**Summary**

Total Steel Area: 3408,0 mm<sup>2</sup>

Strength Reduction Factor (between 0 and 1): 0,869

Yield Overstrength Factor (not less than 1): 1

Yield Force: 1480,8 kN

Tension Zone Extension: 50 mm

Minimum Effective Width: 250,0 mm

**Tip:** In addition to using 'Layer Number' updown control above to select a bar layer, you can also do it by clicking a bar layer from the image to the left or by click on the image using the left mouse button. Alternatively, click the image and then press Up, Down, Left, Right, Page Up, Page Down, Home, or End key.

Fonte: Autor (2020)

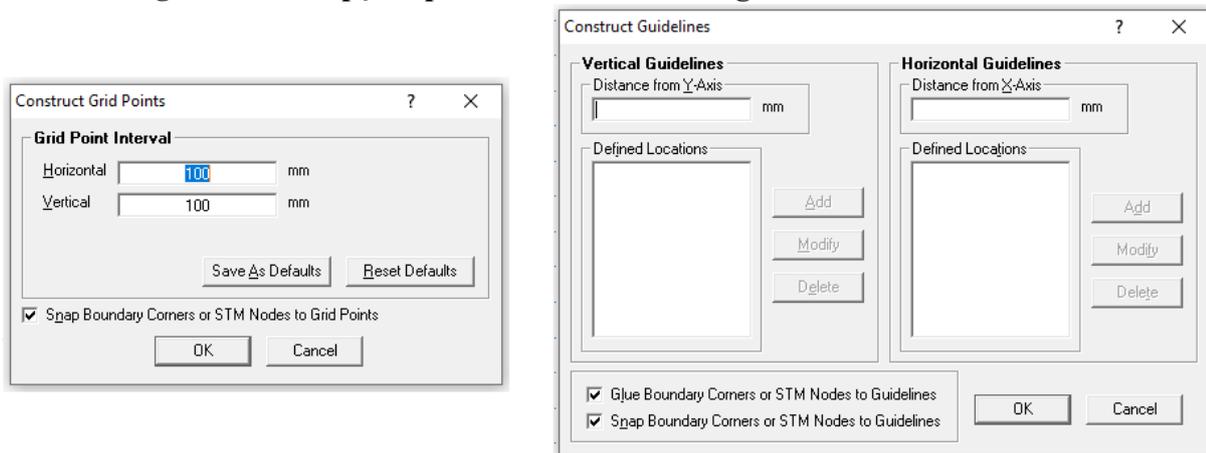
No quadro denominado “*Summary*” são feitas as adequações em relação às propriedades adotadas para resistência do aço e a extensão da zona tracionada considerada para o tirante. O primeiro campo editável, denominado “*Strength Reduction Factor*”, é o fator de redução da resistência à tração do aço que corresponde à minoração da resistência a tração característica ( $f_{yk}$ ) para a resistência a tração de cálculo ( $f_{yd}$ ). Assim como no concreto, como esse fator será usado para multiplicar o  $f_{yk}$  ele deverá ser inserido como 0,869 ( $1 \div 1,15$ ), ou seja, um valor inferior a 1,0. O segundo campo editável, “*Yield Overstrength Factor*”, representa o ganho de resistência que o aço apresenta no trecho de escoamento, ou seja, é a relação entre a resistência no escoamento e a resistência do aço no estado plástico. Por fim, no campo editável “*Tension Zone Extension*” é possível definir qual será a extensão da zona tracionada do tirante, este parâmetro é essencial para obtenção das dimensões e tensões nas regiões nodais.

#### 4.5.2 Construção do Modelo de Treliça

A primeira etapa para construção do modelo de treliça é o desenho do elemento estrutural ou “Região D” a ser analisada. O desenho pode ser feito através da ligação de pontos

em uma malha com espaçamentos em x e y definidos pelo usuário (“*Grid Points*”), ou através da definição de linhas guia nos eixos x e y (“*Guidelines*”), conforme ilustra a Figura 4.22. O software oferece diversos recursos relacionados a ferramentas de captura de pontos ou intercessão entre linhas que facilitam muito o desenho do elemento estrutural ou da “Região D”.

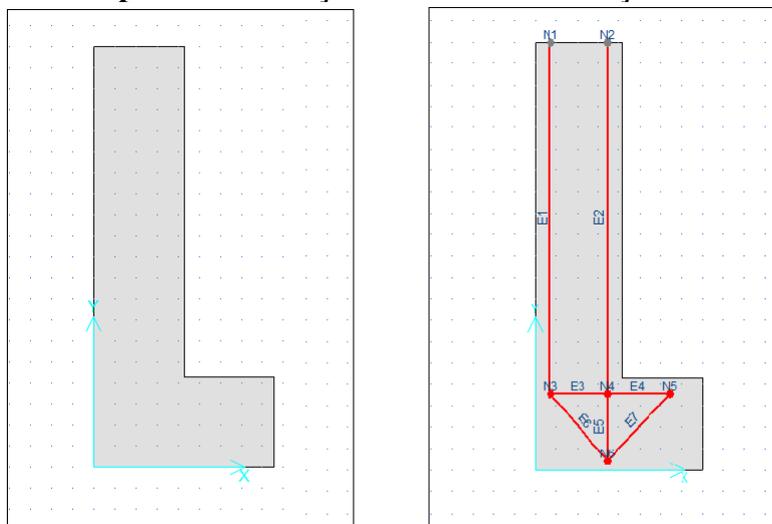
**Figura 4.22 – Opções para o desenho da “Região D” no software CAST**



Fonte: Autor (2020)

Após a realização do desenho, o software libera a opção para a construção do modelo de treliça. Da mesma forma como foi feito o desenho do elemento, o desenho da treliça é feito pela captura de pontos através dos “*Gridpoints*” ou das “*Guidelines*” ou ainda através de modelos padronizados que o software oferece. A Figura 4.23 ilustra as etapas de desenho tanto da seção transversal como do modelo de treliça para uma viga de seção “L”.

**Figura 4.23 – Etapas de construção do modelo de treliça no software CAST**



Fonte: Autor (2020)



Conforme ilustra a Figura 4.24, é possível observar que o software apresenta de maneira didática os esforços obtidos no modelo de treliça. As barras que estão em azul pontilhado são os elementos comprimidos e as barras alaranjadas contínuas são os elementos tracionados. O software também apresenta os valores dos esforços obtidos em cada barra, de modo que, pela convenção adotada pelo software, os valores negativos são esforços de compressão e os valores positivos são esforços de tração.

#### 4.5.4 Atribuição dos Parâmetros e Verificação das Tensões

Obtidos os esforços solicitantes, parte-se para etapa final do dimensionamento que consiste na atribuição dos parâmetros essenciais aos elementos (tipo de cada elemento e dimensão das larguras efetivas) e a verificação das resistências. A atribuição dos parâmetros deve ser feita clicando-se com o botão direito do mouse sobre cada elemento. Quando o elemento for uma barra, uma janela semelhante à apresentada na Figura 4.25 abrirá para que o usuário defina o tipo e a dimensão da largura efetiva da barra. O software também disponibiliza a definição de parâmetros complementares como alterações na rigidez relativa da barra, alterações no fator de escala da espessura da barra, além da atribuição de propriedades não-lineares aos elementos.

**Figura 4.25 – Atribuição dos parâmetros essenciais nas barras do software CAST**

The image shows a software dialog box titled "STM Element Info (Load LC1)". It contains the following fields and sections:

- General Info:** ID: E2; Function: Strut-and-Tie
- Connectivity:** Start STM Node: N2; End STM Node: N5
- Properties and Results of Design Calculations:**
  - Length: 633,2 mm
  - Orientation: 270,00 deg
  - Relative Stiffness: 1
  - Tie Force: 235,4 kN
  - Thickness Scale Factor: 1
  - Property Type: Undefined
  - Property Type Name: (empty)
  - Provided Effective Width: 0 mm
- Nonlinear Properties:**
  - Stress-Strain Curve Type: (dropdown)
  - Curve Scale Factor (Greater than 0): 1

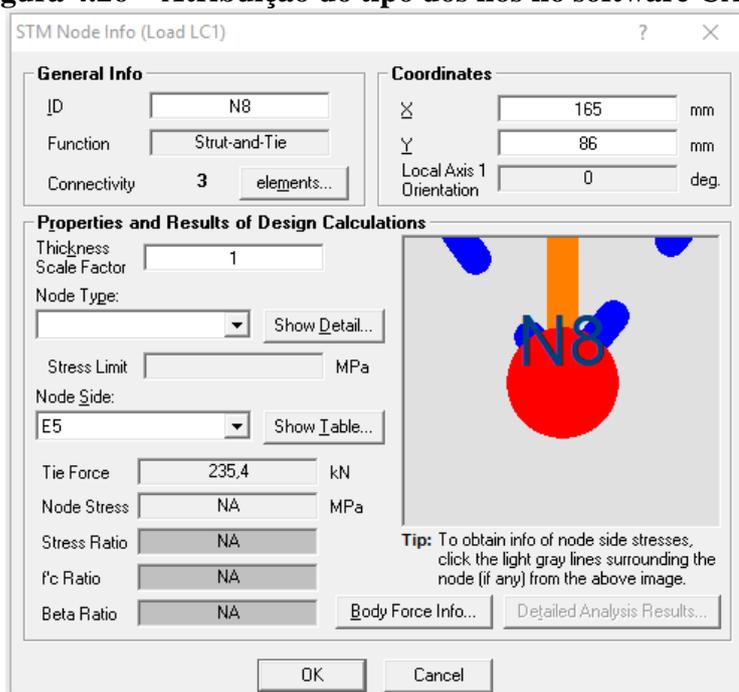
Buttons: Show Detail..., Use Default, OK, Cancel.

Fonte: Autor (2020)

Em relação ao tipo do elemento, no campo “*Property Type*” o usuário definirá se a barra é uma escora ou um tirante e no campo “*Property Type Name*” o usuário atribuirá qual o tipo de escora ou tirante, criados previamente, aquela barra representará. Logo após, o usuário deverá definir uma largura efetiva para barra no campo “*Provided Effective Width*”, a partir dessa definição é que o software terá condições de determinar as dimensões das regiões nodais bem como comparar as tensões atuantes com as tensões resistentes na barra. Conforme Pantoja (2012), em alguns casos pode haver ainda a necessidade de se fazer ajustes na geometria e novamente determinar os esforços na treliça.

Quando o elemento selecionado for um nó , uma janela semelhante à apresentada na Figura 4.25 abrirá para que o usuário defina o tipo do nó, de acordo com as configurações feitas previamente. O software também permite que o usuário faça alterações no fator de escala da espessura do nó.

**Figura 4.26 – Atribuição do tipo dos nós no software CAST**



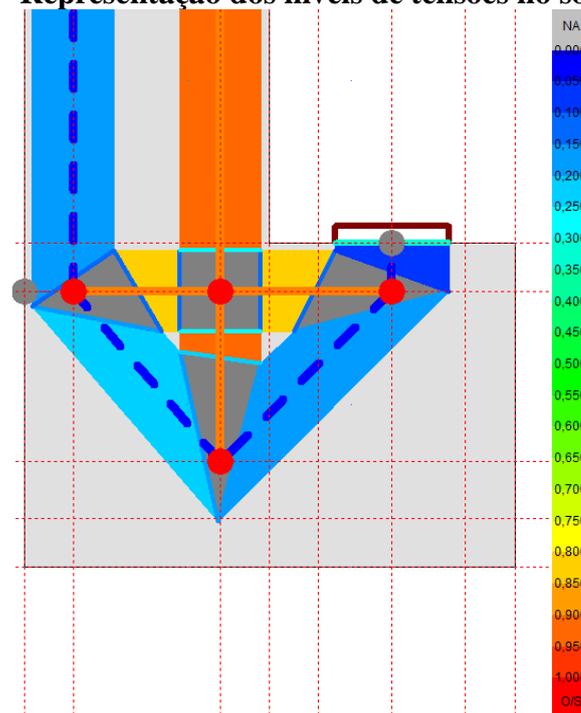
Fonte: Autor (2020)

Definidos todos os parâmetros essenciais para as barras e nós, após um novo processamento, o software apresentará o modelo de treliça já com todas as dimensões de barras e regiões nodais definidas, bem como o “*Stress Ratio*”, que representa a relação entre a tensão resistente e a tensão atuante tanto nas barras como nos nós. No caso dos nós, como estes

possuem mais de uma face, o “*Stress Ratio*” deverá ser verificado em cada face do nó clicando com o botão direito do mouse sobre o nó e selecionando a face pelo campo “*Node Side*”.

A apresentação final do modelo é feita de maneira didática uma vez que o software atribui uma escala de cores para o “*Stress Ratio*” de cada elemento. A escala de cores vai do verde, para os elementos menos solicitados, ao vermelho para os elementos mais solicitados, a depender do nível de tensão presente tanto nas barras quanto nos nós (Figura 4.27).

**Figura 4.27 – Representação dos níveis de tensões no software CAST**



Fonte: Autor (2020)

O software também possui a opção de exportar relatórios do dimensionamento que demonstram, através de tabelas, todas as barras e nós presentes no elemento estrutural analisado, bem como as forças e relações existentes entre as tensões solicitantes e as tensões resistentes.

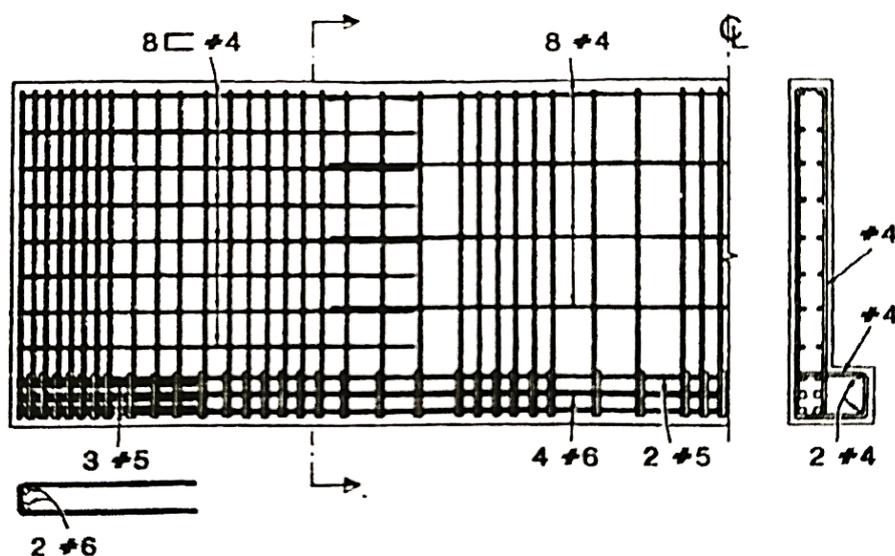
#### 4.6 ABORDAGEM FEITA POR MARTI (1985) EM VIGAS DE SEÇÃO “L”

Uma das aplicações mais abrangentes do Método das Bielas em vigas de seção “L”, sem dúvidas, foi feita por Marti (1985). O autor apresentou um exemplo completo de dimensionamento adotando modelos de treliça para o dimensionamento a flexão, ao cisalhamento por torção e forças cortantes, dimensionamento da aba lateral, além da ligação

viga-pilar submetidas à torção, ficando evidente o potencial de utilização que o método apresenta neste tipo de seção transversal.

Todas as etapas do dimensionamento são feitas de maneira lógica e racional, sem a utilização de métodos analíticos e expressões empíricas que muitas vezes são limitadas a situações específicas ou são de difícil compreensão. De fato, a metodologia proposta pelo autor percorre todas as etapas de dimensionamento simplesmente fazendo uso de conceitos da mecânica das estruturas e da resistência dos materiais. A Figura 4.28 mostra o detalhamento final da seção viga de seção “L”.

**Figura 4.28 – Detalhamento final da viga de seção “L” dimensionada por Marti (1985)**

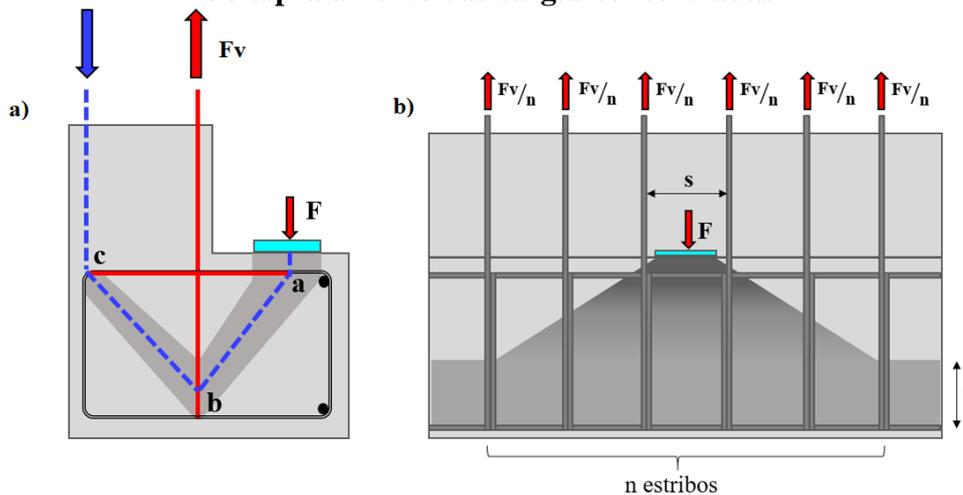


Fonte: Marti (1985)

A abordagem feita pelo autor inicialmente adota um modelo de treliça para transferência da força aplicada na aba lateral da viga. O equilíbrio da treliça é garantido por meio de duas escoras inclinadas e dois tirantes, um posicionado na horizontal e outro na vertical, próximos da região da aba lateral. As inclinações e as dimensões das barras da treliça dependerão das dimensões adotadas inicialmente para a seção transversal. Percebe-se pela Figura 4.29a que as barras comprimidas (escoras) do modelo de treliça adotado são posicionadas no centro do campo de tensões de compressão, logo, para obtenção dos esforços na treliça, a distância entre o tirante horizontal e a extremidade da escora comprimida será diferente do tamanho do estribo horizontal na aba lateral. A largura a ser adotada para o campo de tensões de compressão dependerá essencialmente do tamanho do aparelho de apoio, responsável por transmitir as tensões que comprimem a escora.

Para resolução manual deste modelo de treliça, será necessário fazer o equilíbrio dos nós a, b e c. O equilíbrio do nó é feito a partir do somatório das forças verticais e horizontais presentes no nó. Os dois somatórios deverão ser nulos pois o elemento é tratado de forma estática. Caso sejam utilizados softwares que automatizam o procedimento, será necessário somente indicar as coordenadas dos nós e inserir barras que façam a ligação entre eles.

**Figura 4.29 – a) Transferência da força aplicada na aba lateral; b) Modelo em elevação do espraioamento das cargas concentradas**



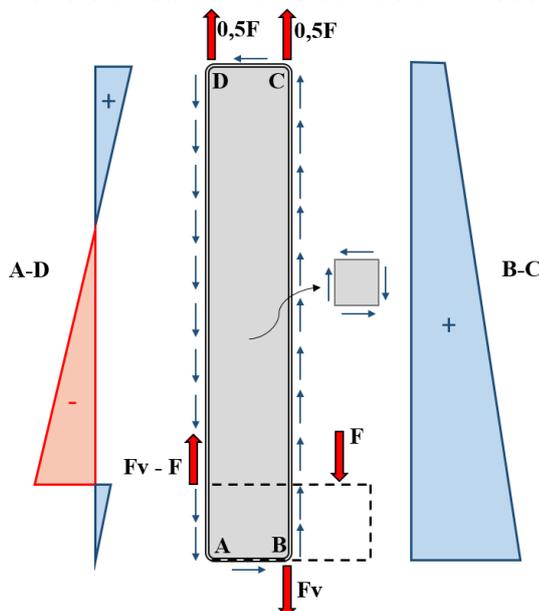
Fonte: Adaptado de Marti (1985)

Após a obtenção dos esforços internos na treliça são adotados estribos fechados posicionados na horizontal e na vertical para combater as forças de tração nos dois tirantes. Os estribos verticais, que corresponde a armadura de suspensão, são dimensionados para combater a força vertical de tração ( $F_v$ ) e devem ser distribuídos ao longo de uma região de espraioamento da carga, que compreende um ângulo de aproximadamente  $45^\circ$  em relação às extremidades do aparelho de apoio. Os estribos horizontais deverão ser dimensionados para combater a força horizontal e por questões construtivas devem ter o mesmo espaçamento do estribo vertical, conforme ilustra a Figura 4.29b. Também são adotadas barras longitudinais nos cantos dos estribos. Segundo o autor, o efeito de pino (“*dowel action*”) promovido pelas barras longitudinais, ajudam a transferir as forças dos estribos ao concreto entre os estribos.

De acordo com Marti (1985) a condição final de equilíbrio da seção transversal pode ser comprovada pelo equilíbrio entre os fluxos de tensões que ocorrem nas faces da alma da seção. Fazendo o equilíbrio de forças atuantes na seção, assume-se que a força (+)  $F_v$ , que traciona o ramo do estribo vertical ao lado da aba lateral, diminui linearmente ao longo da altura útil da viga até atingir o valor de (+)  $0,5.F$ , também de tração, no topo da seção. A resultante entre as

forças  $F_v$  e  $0,5.F$  será um fluxo de tensões na face da alma. Metade desse fluxo será anulado pelo fluxo de tensões de cisalhamento por torção provocado pela excentricidade da força  $F$  e a outra metade será transferida para o concreto entre os ramos dos estribos verticais através de tensões transversais. Os fluxos de tensões que atuam na face oposta ao lado da aba lateral também estarão em equilíbrio com a força de compressão (-)  $F_v - F$  e com a força igual de tração (+)  $0,5.F$  no topo da seção, equilibrando se da mesma forma como foi descrito na outra face. A Figura 4.30 ilustra a hipótese de equilíbrio apresentada por Marti (1985).

**Figura 4.30 - Fluxo de cisalhamento devido a introdução da força  $F$**



Fonte: Adaptado de Marti (1985)

O dimensionamento da seção à torção é feito adotando-se a hipótese de que os momentos torsores são transportados por campos de compressão em espiral no concreto, através de uma seção tubular em que o centro da parede deste tubo coincide com o centro dos ramos dos estribos.

A partir da obtenção do fluxo de cisalhamento por torção na seção mais solicitada e adotando-se barras para armadura longitudinal de torção, é possível obter a taxa de resistência necessária aos estribos verticais destinados à torção, através da seguinte expressão:

$$\rho_{sw} = \frac{\tau_{sd}^2}{\rho_{sl}} \quad [4.6]$$

Em que:

$\tau_{sd}$  = fluxo de cisalhamento por torção máximo na seção;

$\rho_{sl}$  = taxa de resistência promovida armadura longitudinal de torção adotada.

De posse das taxas de resistência das armaduras vertical e horizontal é possível obter o ângulo de inclinação dos campos de compressão em espiral por meio da seguinte expressão:

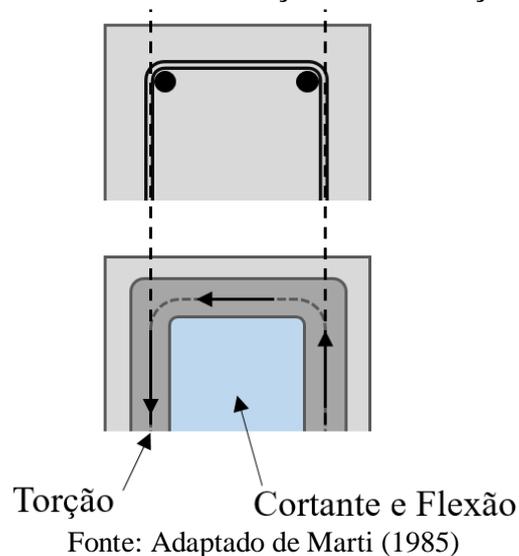
$$\theta = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\rho_{sw}}{\rho_{sl}}} \quad [4.7]$$

A espessura necessária para parede da seção tubular pode ser estimada assumindo a hipótese de que as tensões principais de compressão serão iguais à resistência característica a compressão do concreto utilizado na viga, conforme a seguinte equação:

$$h_e = \frac{\rho_{sw} + \rho_{sl}}{f_{ck}} \quad [4.8]$$

Obtidos todos os parâmetros de resistência das armaduras e a espessura da parede que compõe a seção tubular resistente à compressão, Marti (1985) propõe uma subdivisão da seção transversal em regiões que resistirão a flexão e ao cisalhamento por forças cortantes e regiões que resistirão ao cisalhamento por torção, como pode ser visto na Figura 4.31. Segundo o autor, o cobrimento da armadura é desprezado de modo conservador, mas, na realidade, tensões transversais existem entre planos definidos pelos ramos dos estribos e o cobrimento atuará em conjunto como o concreto que está cercado pelos estribos. Incluindo o cobrimento nos cálculos não teria, todavia, influência significativa na armadura necessária.

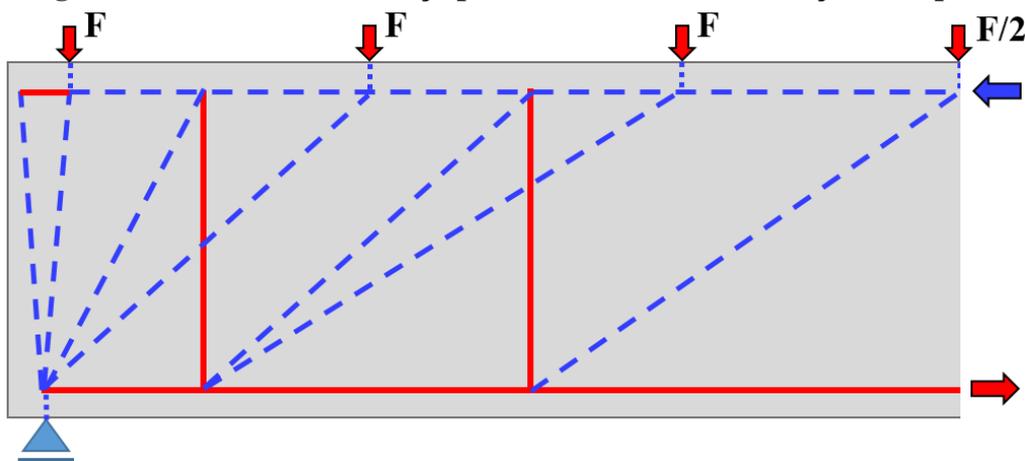
**Figura 4.31 - Regiões resistentes a torção e aos esforços cortantes e flexão**



O modelo em elevação adotado por Marti (1985) para transferir as forças até os apoios é feito somente pela região central da viga, responsável por resistir a flexão e aos esforços cortantes. Com este modelo é possível dimensionar a seção a flexão e ao cisalhamento por esforços cortantes de maneira combinada, através dos esforços solicitantes nas barras da treliça.

Percebe-se pela Figura 4.32, que a suspensão da força cortante pelos estribos verticais é feita em pontos intermediários aos pontos de aplicação da carga excêntrica, onde foi calculada a armadura de suspensão. Essa separação na modelagem torna possível a transformação de um modelo que é essencialmente tridimensional, em dois modelos bidimensionais atuando de maneira conjunta, sem interferências entre os dois, logo, o problema pode ser tratado manualmente ou automaticamente sem grandes dificuldades. A flexibilidade para decidir o caminhoamento a ser percorrido pelas cargas, além da possibilidade de acoplar furos, aberturas e dentes de apoio ao modelo, são vantagens que a utilização do Método das Bielas possibilita.

**Figura 4.32 - Modelo de treliça para transferência das forças aos apoios**



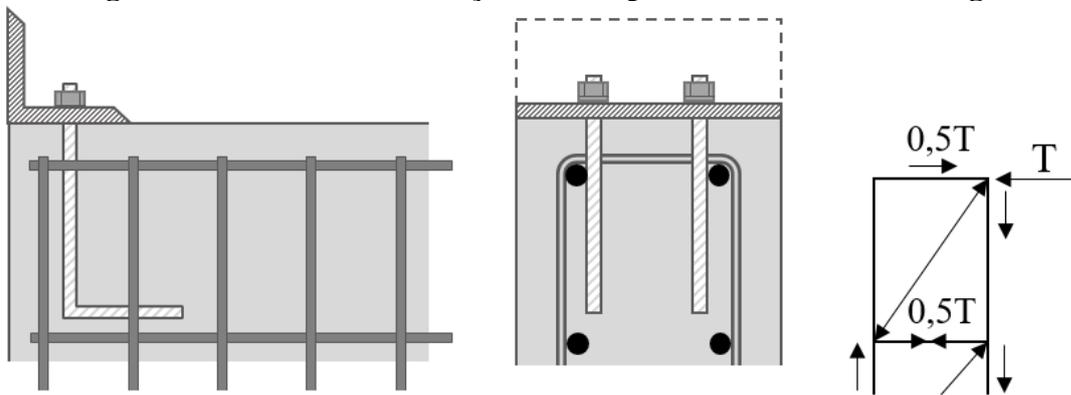
Fonte: Adaptado de Marti (1985)

A altura a ser considerada no modelo de treliça em elevação é obtida através de um processo iterativo. Inicialmente pode-se adotar como altura para treliça a distância entre a armadura superior e o centro da aba lateral, onde estarão distribuídas as armaduras longitudinais de flexão. Obtidas as forças no banzo superior e inferior estima-se uma área necessária para o concreto resistir a força de compressão no banzo superior sem a necessidade de armadura dupla. De posse dessa área, assume-se que a altura da treliça será a distância entre o centroide da região comprimida e o centroide da região tracionada. Por fim deve-se comparar essa altura com a altura adotada inicialmente. Caso as alturas sejam próximas o processo é finalizado, caso estejam distantes, uma nova altura para a treliça deve ser adotada.

Tanto a armadura longitudinal de flexão como as armaduras transversais para as forças cortantes são obtidas dividindo-se o valor da força nas barras pela resistência de cálculo adotada para o aço. Próximo aos apoios, a força no banzo inferior tem uma redução no seu valor devido ao maior número de escoras que ajudam a contrapor os esforços horizontais, todavia, Marti (1985) considera prudente somar também uma força proveniente do fluxo de cisalhamento por torção que ocorre na aba lateral próximo à zona de apoio. O autor também prevê que sejam posicionados pinos transversais para melhorar a ancoragem das armaduras longitudinais nos apoios.

Marti (1985) também apresenta uma possível solução com cantoneiras metálicas para resistir a introdução do binário de forças horizontais provenientes do momento torsor solicitante na ligação viga-pilar. Segundo o autor, as tensões nas extremidades da viga são semelhantes a um modelo de placa retangular sujeita a torção pura pela aplicação de forças iguais e em sentidos opostos perpendiculars ao plano da placa. Cada força aplicada nos cantos da placa é dividida em metades que são transferidas como forças de cisalhamento ao longo das bordas da placa através de um modelo de treliça conforme ilustra a Figura 4.33.

**Figura 4.33 - Modelo de treliça adotado para borda vertical da viga**

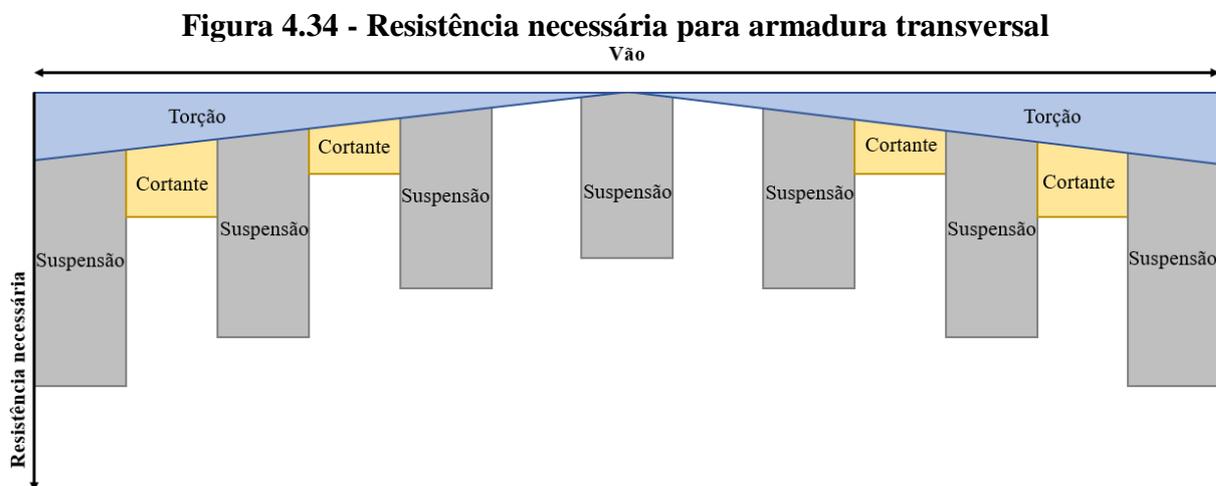


Fonte: Adaptado de Marti (1985)

O detalhamento final das armaduras necessárias para a suspensão das forças excêntricas e para o cisalhamento por forças cortantes é feito trecho a trecho conforme os esforços obtidos nos modelos de treliça para aba lateral e em elevação. Já a resistência necessária ao momento torsor varia de maneira linear, com valores nulos no meio do vão e máximos nas extremidades.

Neste procedimento, as armaduras transversais dimensionadas para os momentos torsores são somadas com as armaduras de suspensão da carga excêntrica e com as armaduras

transversais de cisalhamento por forças cortantes, a depender do trecho em que o detalhamento está sendo feito conforme ilustra a Figura 4.34.



Fonte: Adaptado de Marti (1985)

Apesar de não ficar explícito no exemplo numérico desenvolvido por Marti (1985), também é essencial que se façam todas as verificações relativas a capacidade resistente das escoras e das regiões nodais, tanto no modelo de treliça da aba lateral quanto no modelo de treliça em elevação. Como já foi ressaltado anteriormente, é aconselhável que o elemento tenha um comportamento dúctil garantindo que os tirantes escoem antes que as escoras ou as regiões nodais entrem em ruína. Deste modo, a verificação de atendimento aos parâmetros de resistência das escoras e regiões nodais é uma etapa obrigatória no dimensionamento.



## 5 COMPARAÇÕES ENTRE DIVERSAS METODOLOGIAS

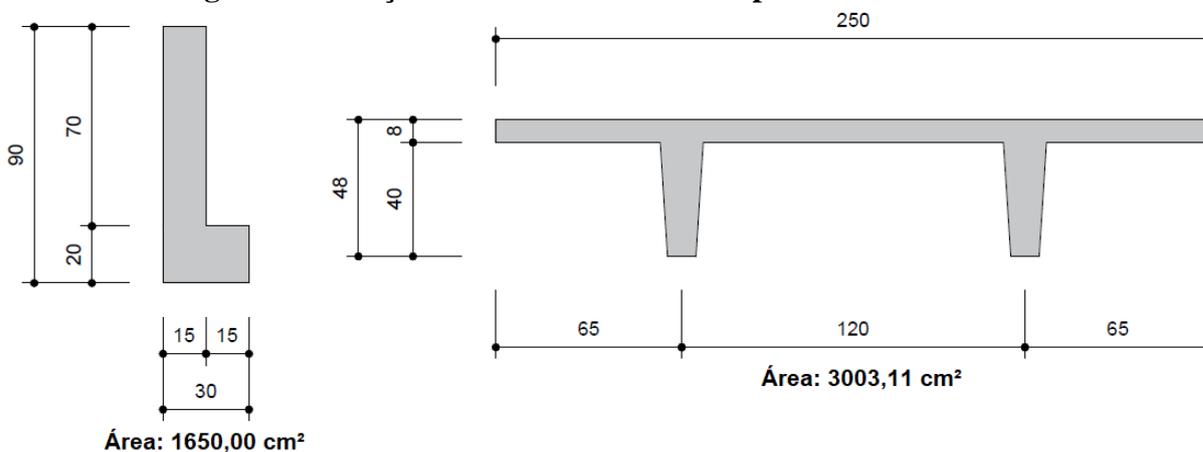
O presente capítulo tem como objetivo apresentar a resolução de um exemplo numérico desenvolvido de modo a permitir uma aplicação prática do Método das Bielas e dos outros métodos analíticos usuais apresentados nos capítulos anteriores. A resolução do exemplo permitirá também avaliar, através de uma análise comparativa, quais as vantagens, desvantagens e percentuais de armadura obtidas em cada método. A análise será feita tanto para o dimensionamento da viga em elevação quanto para o dimensionamento da aba lateral.

É importante ressaltar que a abordagem feita neste trabalho é destinada somente ao dimensionamento no estado limite último considerando a estrutura na posição final de utilização. Não é o foco deste trabalho abordar o comportamento e o dimensionamento da viga no estado limite de serviço e nas situações transitórias, quem em certos casos, podem ser preponderantes ao dimensionamento no estado limite último aqui apresentado.

### 5.1 ESTUDO DE CASO

A viga de seção “L” dimensionada neste exemplo pertence ao perímetro de um edifício de escritórios. Afim de se obter uma situação mais próxima possível da realidade, tanto a viga de seção “L” como a laje duplo “T” foram obtidas do catálogo de seções comerciais de uma empresa de estruturas pré-moldadas localizada no Paraná. Dentre as várias opções disponíveis optou-se por seleccionar a viga e a laje, com dimensões em centímetro, ilustradas na Figura 5.1.

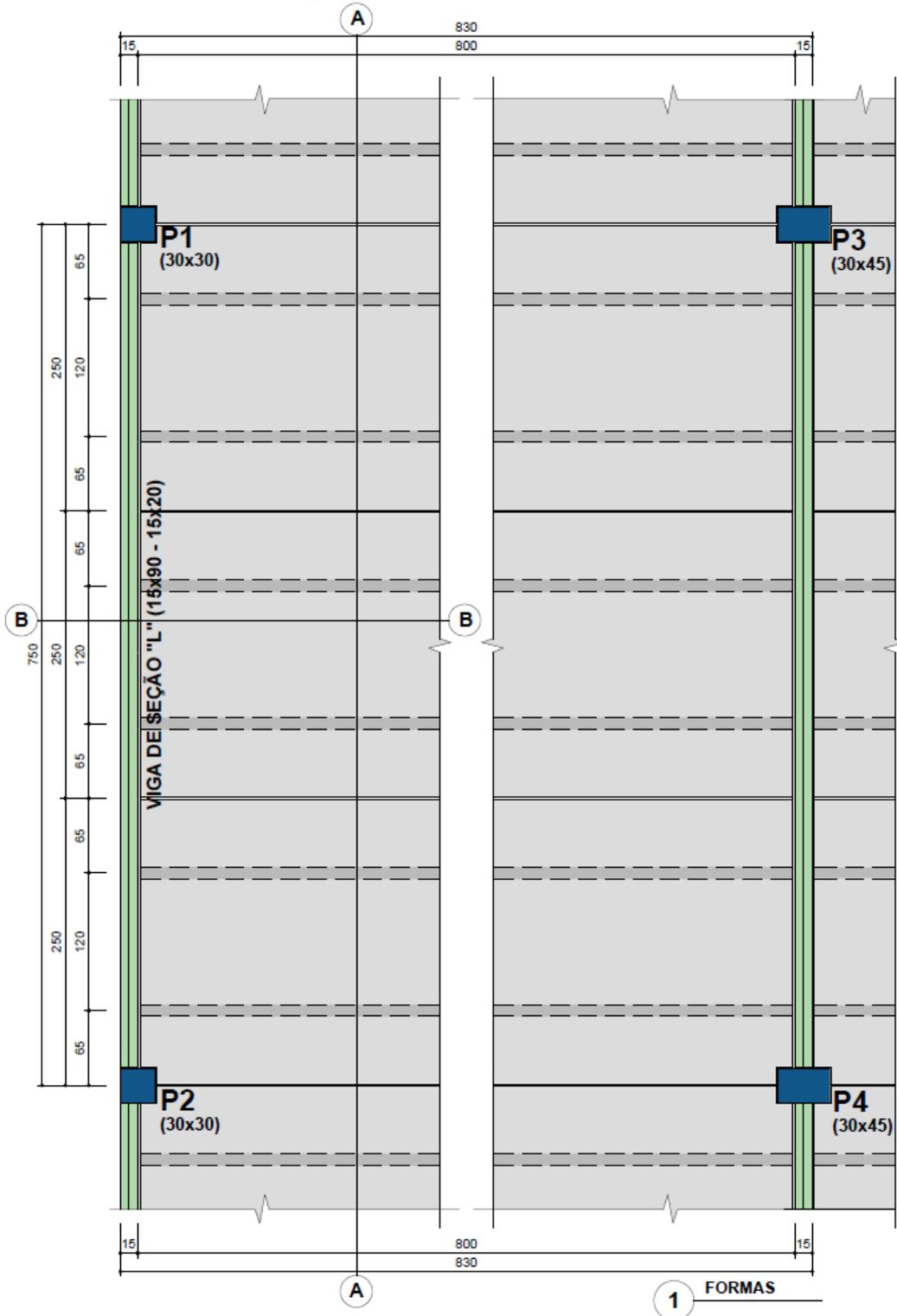
**Figura 5.1 – Seções transversais adotadas para o estudo de caso**



Fonte: Autor (2020)

De posse das dimensões em planta das vigas e das lajes, a concepção estrutural da edificação foi definida para que o espaçamento entre pilares fosse de 750 cm, desse modo, cada viga “L” apoiará três lajes duplo “T”, conforme a planta de formas ilustrada na Figura 5.2.

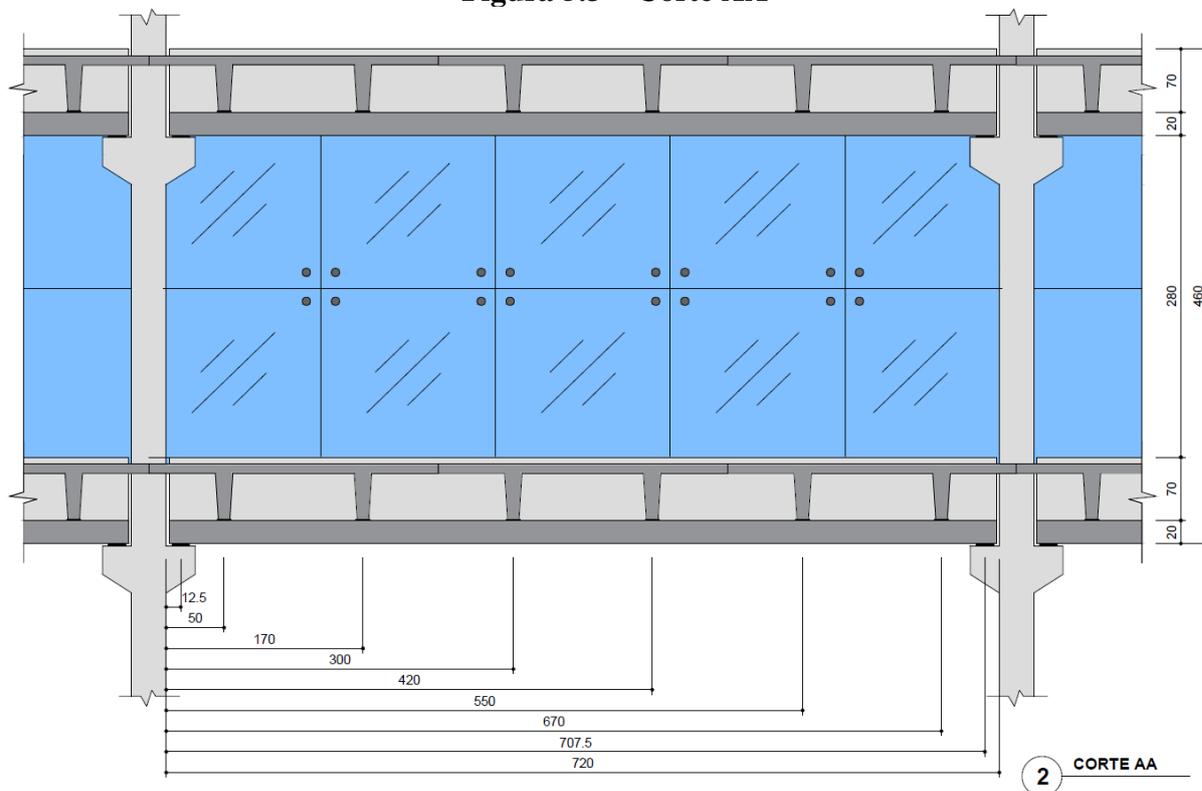
**Figura 5.2 – Planta de formas**



Fonte: Autor (2020)

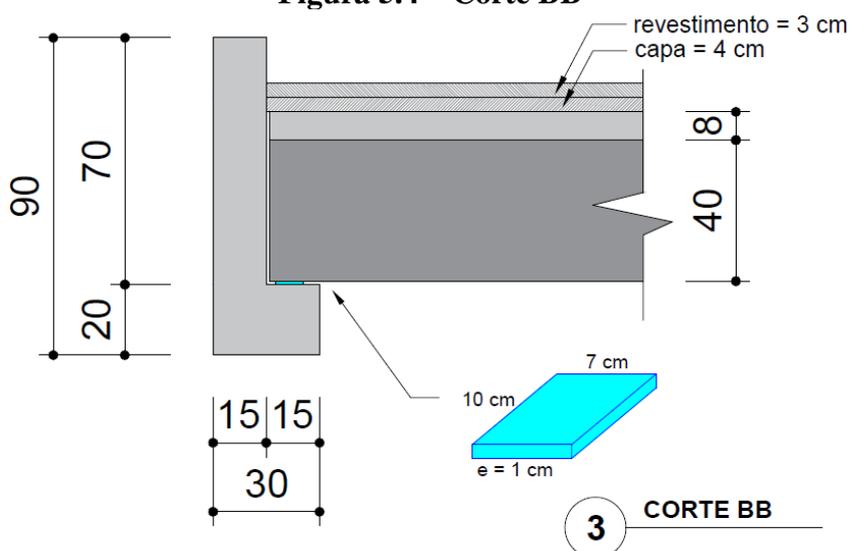
Os Cortes AA e BB, ilustrados nas Figura 5.3 e Figura 5.4 respectivamente, apresentam as dimensões em centímetro do pavimento em elevação e das condições de apoio das nervuras da laje duplo “T” na aba lateral.

**Figura 5.3 – Corte AA**



Fonte: Autor (2020)

**Figura 5.4 – Corte BB**



Fonte: Autor (2020)

O dimensionamento da viga foi feito para classe de agressividade ambiental (CAA II) em ambiente urbano e os materiais utilizados na estrutura foram concreto C40 ( $f_{ck} = 40$  MPa) e aço CA-50 ( $f_{yk} = 500$  MPa). Os valores de cálculos adotados para a resistências dos materiais foram calculados para as combinações normais no ELU, conforme as recomendações da ABNT NBR 6118:2014 por meio das seguintes expressões:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{40}{1,4} = 28,6 \text{ MPa}$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,8 \text{ MPa}$$

## 5.2 CARGAS E ESFORÇOS INTERNOS ATUANTES

Como visto anteriormente a viga de seção “L” dimensionada neste exemplo pertence ao perímetro de um edifício de escritórios, logo, as cargas acidentais, de acordo com a Tabela 10 da ABNT NBR 6120:2019, devem ser adotadas com o valor característico de 3,0 kN/m<sup>2</sup>, atendendo às salas de uso geral, sanitários, corredores entre unidades autônomas e corredores de uso comum.

As cargas permanentes também foram definidas em conformidade com a ABNT NBR 6120:2019, de modo que, para o peso próprio dos elementos estruturais e capa de concreto será considerado uma massa específica de 25 kN/m<sup>3</sup>. Para os revestimentos, conforme a Tabela 4 da norma, foi considerada uma espessura de 3 cm, resultando em uma carga de 0,6 kN/m<sup>2</sup>. Para as divisórias foi considerada a utilização de paredes de “*Drywall*”, logo, conforme a Tabela 3 da norma, foi adotado uma carga de 0,5 kN/m<sup>2</sup>. Para os forros, foi considerado a utilização de forro em gesso em placas e dutos de ar-condicionado com isolamento térmico, correspondendo, conforme a Tabela 8 da norma, a uma carga de 0,45 kN/m<sup>2</sup>. Também foi considerado a fachada com pele de vidro com uma carga linearmente distribuída de 0,5 kN/m.

Considerando que cada laje duplo “T” possui duas nervuras que resultam em quatro pontos de apoio, os carregamentos característicos atuantes na viga de seção “L” foram:

- Peso próprio da viga

$$PP_{\text{viga}} = 0,1650 \cdot 25 = 4,12 \text{ kN/m}$$

- Peso próprio da laje (por nervura)

$$PP_{\text{laje}} = \frac{0,3003 \cdot 25 \cdot 8}{4} = 15,01 \text{ kN}$$

- Peso próprio da capa (por nervura)

$$PP_{\text{capa}} = \frac{0,04 \cdot 2,5 \cdot 25 \cdot 8}{4} = 5,00 \text{ kN}$$

- Revestimento + Divisórias + Forro (por nervura)

$$PERM_{\text{laje}} = \frac{2,5 \cdot (0,60 + 0,50 + 0,45) \cdot 8}{4} = 7,75 \text{ kN}$$

- Pele de vidro

$$PERM_{\text{vidro}} = 0,5 \text{ kN/m}$$

- Acidental (por nervura)

$$ACID = \frac{2,5 \cdot 3,00 \cdot 8}{4} = 15,00 \text{ kN}$$

Para determinação dos esforços de cálculo no estado limite último foi considerado a combinação normal. De acordo com a ABNT NBR 6118:2014, para este tipo de combinação, o coeficiente de ponderação para as ações permanentes e acidentais é  $\gamma_f = 1,4$ . Como há somente uma carga acidental, não é necessário computar o coeficiente  $\psi_0$ . Para o peso próprio de estruturas pré-moldadas, a norma permite reduzir o coeficiente de ponderação para  $\gamma_f = 1,3$ . Sendo assim, as combinações normais foram:

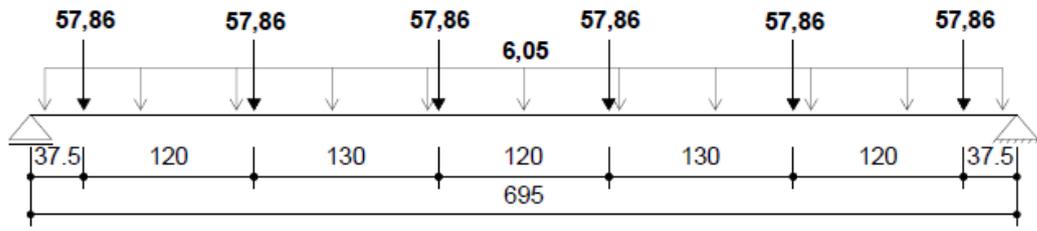
$$Q_{\text{linear}} = 1,3 \cdot PP_{\text{viga}} + 1,4 \cdot PERM_{\text{vidro}} = 1,3 \cdot 4,12 + 1,4 \cdot 0,50 = 6,05 \text{ kN/m}$$

$$F_{\text{nervura}} = 1,3 \cdot (PP_{\text{laje}} + PP_{\text{capa}}) + 1,4 \cdot (PERM_{\text{laje}} + ACID)$$

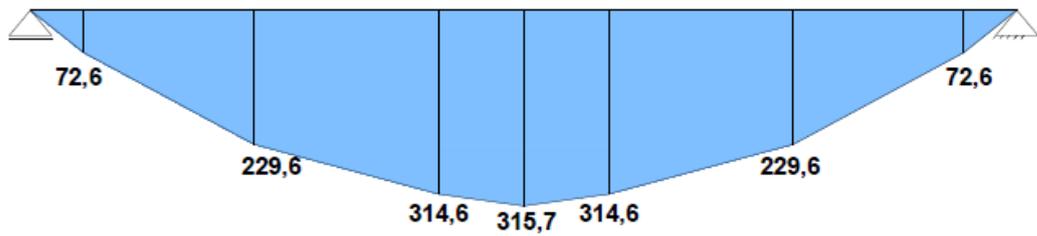
$$F_{\text{nervura}} = 1,3 \cdot (15,01 + 5,00) + 1,4 \cdot (7,75 + 15,00) = 57,86 \text{ kN}$$

Obtidos todos os carregamentos de cálculos na viga e considerando que as forças aplicadas pela laje duplo “T” estejam no centro da aba lateral, a uma distância de aproximadamente 15 cm do centro geométrico da alma, é possível traçar os diagramas de esforços internos de cálculo da viga conforme ilustra a Figura 5.5.

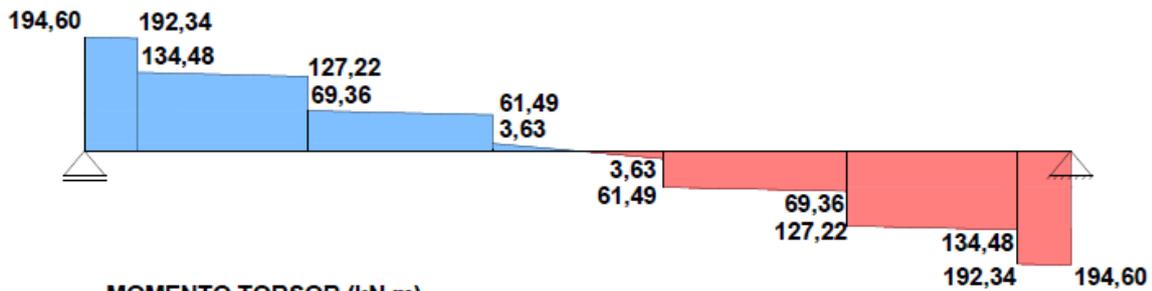
**Figura 5.5 – Diagramas de esforços internos de cálculo**  
**CARREGAMENTO (kN; kN/m)**



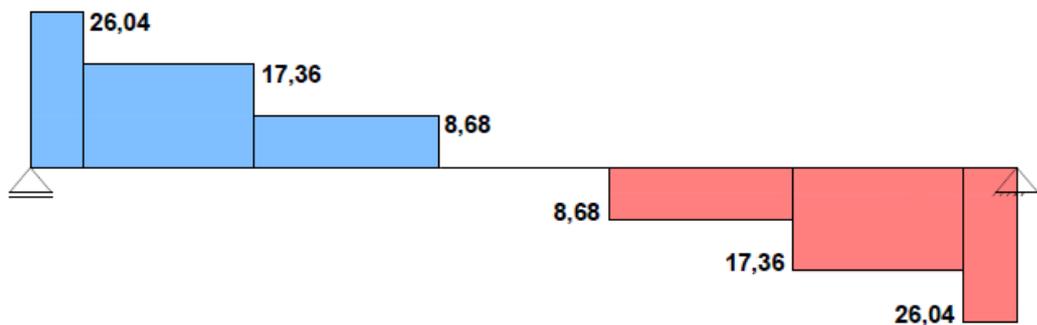
**MOMENTO FLETOR (kN.m)**



**FORÇA CORTANTE (kN)**



**MOMENTO TORSOR (kN.m)**



Fonte: Autor (2020)

### 5.3 DIMENSIONAMENTO PELO MÉTODO DAS BIELAS

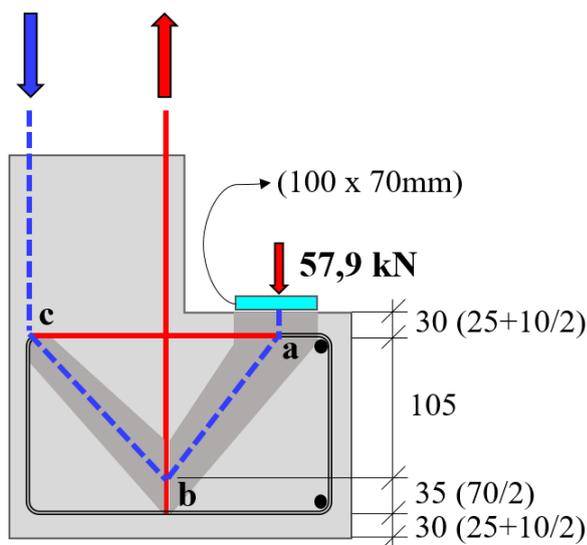
A análise e dimensionamento utilizando o Método das Bielas foi feita com auxílio do software CAST segundo às recomendações presentes no item 22.3 da ABNT NBR 6118:2014. Para tanto as configurações do software foram adaptadas às recomendações da norma brasileira, conforme foi apresentado no item 4.5 deste trabalho. A abordagem e a determinação dos

modelos de treliças a serem utilizados no dimensionamento foram feitas com base no trabalho de Marti (1985).

### 5.3.1 Dimensionamento da Aba Lateral

Para o dimensionamento da aba lateral é necessário inicialmente determinar as dimensões do modelo de treliça resistente. Considerando que a estrutura está inserida na classe de agressividade ambiental CAA II, com o concreto (C40) superior ao mínimo exigido, o cobrimento das armaduras adotado foi de 2,5 cm. Para o diâmetro das armaduras, estimou-se barras de 10,0 mm para os estribos horizontais (tirantes) e verticais (suspensão). A Figura 5.6 apresenta as dimensões do modelo de treliça adotado para transferência da força aplicada na aba lateral.

**Figura 5.6 – Modelo de treliça para transferência da força aplicada na aba lateral**

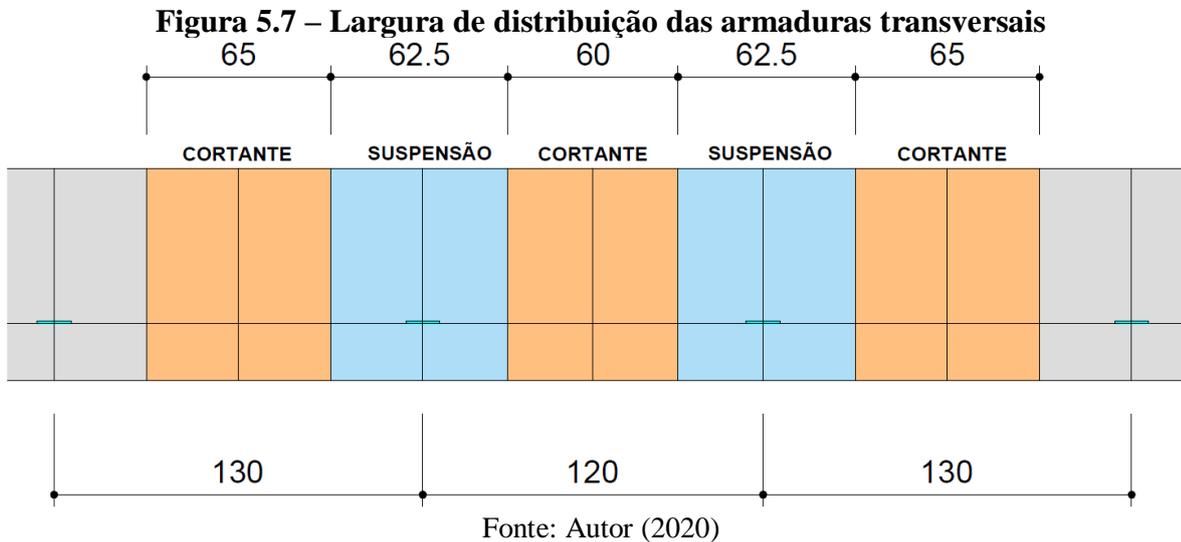


**DIMENSÕES EM MM**

Fonte: Autor (2020)

Definidas as dimensões do modelo de treliça, parte-se para o software CAST onde foram obtidos os esforços solicitantes nas barras e verificadas a capacidade resistente das escoras, tirantes e regiões nodais. Seguindo os passos apresentados no item 4.5 deste trabalho, inicialmente foram feitas as configurações gerais do software. Como o espaçamento entre forças aplicadas pela laje duplo “T” é de 120 cm na região da laje e 130 cm na região entre lajes, no campo “*D-Region Thickness*” foi considerado a espessura aproximada de 60 cm, que corresponde à metade da distância entre as forças aplicadas. Essa largura aproximada de

distribuição para as armaduras transversais foi adotada tanto para o tirante do modelo de treliça em corte (armadura de suspensão) como para o tirante do modelo de treliça em elevação (cortante), conforme ilustra a Figura 5.7.



Nos campos “*Concrete Compressive Strength*” e “*Non-Prestressed Reinforcement Yield Strength*” foram adotados os valores característicos de resistência, 40 MPa para o concreto e 500 MPa para o aço. Neste exemplo, como a viga está sendo dimensionada no estado limite último, não se pretende contar com a resistência a tração do concreto, logo, o campo “*Concrete Tensile Strength*” foi mantido com valor zero.

Para o cadastro das escoras e regiões nodais em conformidade com as recomendações da ABNT NBR 6118:2014, também foram seguidos os passos apresentados no item 4.5 deste trabalho. Os valores limites para as tensões nas escoras e regiões nodais, considerando a resistência a compressão de cálculo do concreto  $f_{cd} = 28,6$  MPa e o fator  $\alpha_{v2} = 1 - (40/250) = 0,84$ , foram:

$$f_{cd1} = 0,85 \cdot 0,84 \cdot 28,6 = 20,4 \text{ MPa}$$

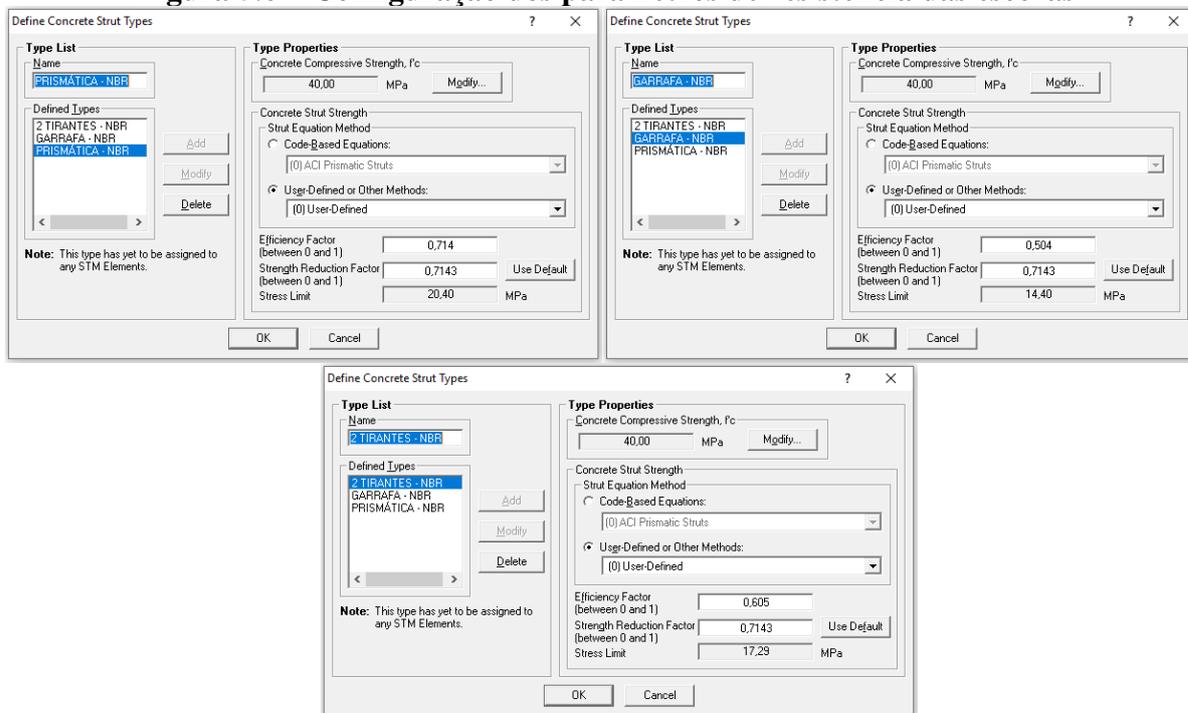
$$f_{cd2} = 0,60 \cdot 0,84 \cdot 28,6 = 14,4 \text{ MPa}$$

$$f_{cd3} = 0,72 \cdot 0,84 \cdot 28,6 = 17,3 \text{ MPa}$$

Conforme abordado nos itens 4.2.1 e 4.2.2 o parâmetro  $f_{cd1}$  foi destinado às escoras prismáticas, escoras do tipo leque e aos nós do tipo CCC. O parâmetro  $f_{cd2}$  foi destinado às escoras do tipo garrafa, escoras atravessadas por mais de um tirante e nós do tipo CTT e TTT. Por fim, o parâmetro  $f_{cd3}$  foi destinado às escoras atravessadas por um único tirante e nós do

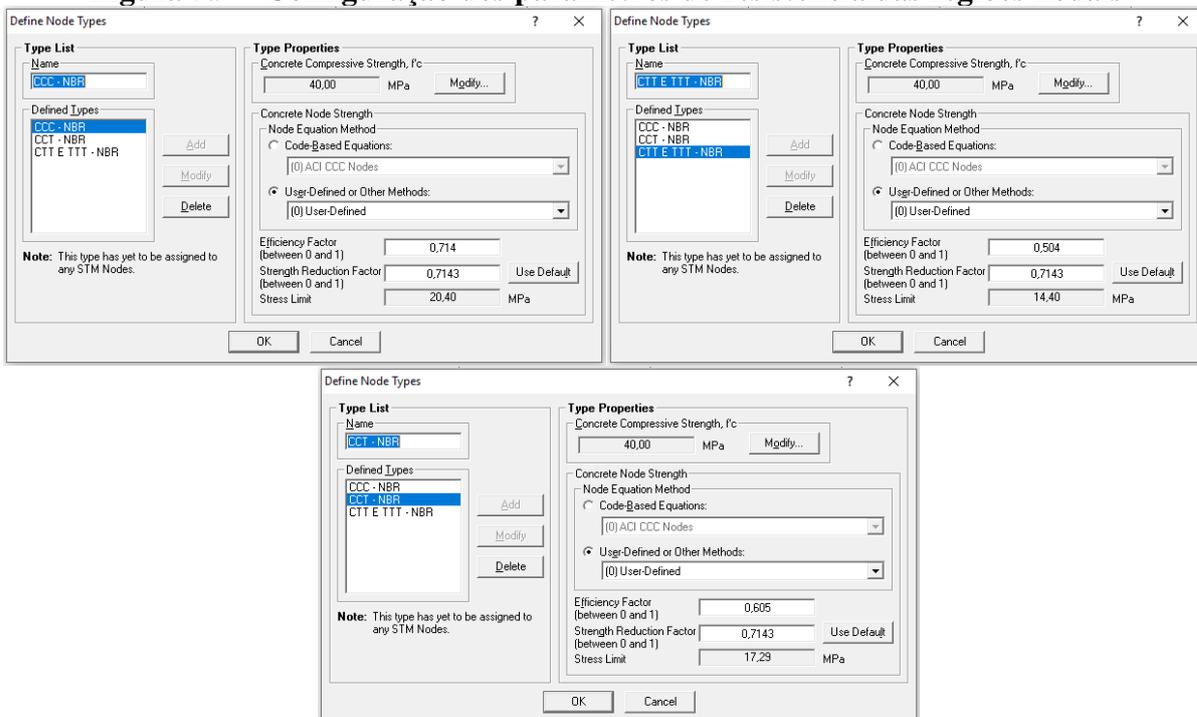
tipo CCT. A Figura 5.8 e Figura 5.9 apresentam a configuração dos parâmetros de resistência para as escoras e regiões nodais feitas no software.

**Figura 5.8 – Configuração dos parâmetros de resistência das escoras**



Fonte: Autor (2020)

**Figura 5.9 – Configuração dos parâmetros de resistência das regiões nodais**

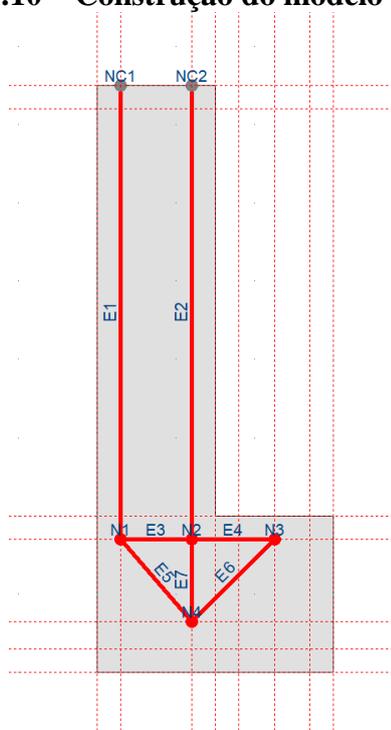


Fonte: Autor (2020)

Afim de se garantir a ductilidade da viga no estado limite último, optou-se por realizar o cadastro dos tirantes somente após a obtenção dos esforços solicitantes, uma vez que estes serão os elementos que se manterão mais próximos das tensões limites.

Definidas as configurações iniciais parte-se para a construção do modelo de treliça. Neste exemplo optou-se por utilizar a ferramenta “*Guidelines*” do software CAST que permite a criação de eixos horizontais e verticais que auxiliam no lançamento tanto da região de concreto da aba lateral quanto das barras do modelo de treliça. A Figura 5.10 ilustra os eixos utilizados, o contorno da região de concreto e o modelo de treliça adotado .

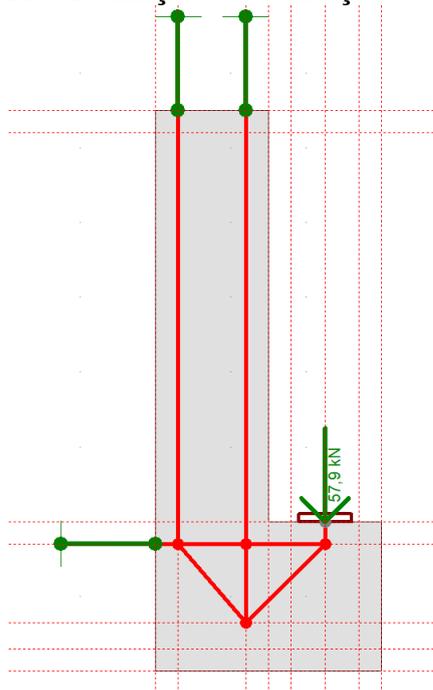
**Figura 5.10 – Construção do modelo de treliça**



Fonte: Autor (2020)

A próxima etapa é a definição das condições de contorno da aba lateral. Como a obtenção dos esforços solicitantes pelo Software CAST é feita através de modelos isostáticos, para a aba lateral das vigas de seção “L”, essa condição é obtida através da inserção de três pontos de apoio que restringem os deslocamentos nas duas direções do plano. O lançamento dos apoios no software é feito nas bordas da seção de concreto, prolongando-se os elementos de barra até as extremidades da seção. O lançamento do aparelho de apoio e da força solicitante também é feito nas bordas da seção de concreto, prolongando-se os elementos de barra, da mesma forma como nos apoios. A Figura 5.11 ilustra o modelo de treliça com a condições de contorno definidas.

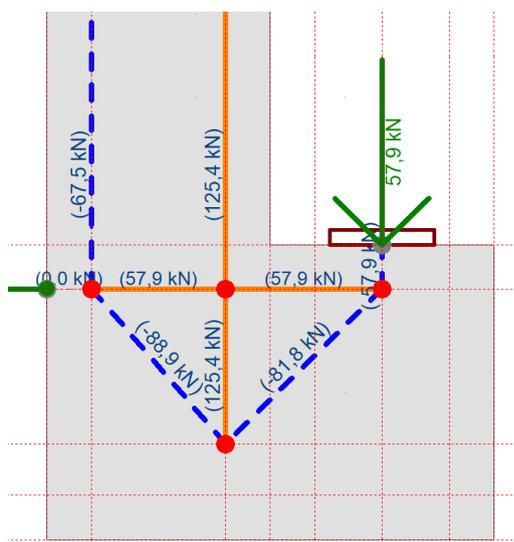
**Figura 5.11 – Definição das condições de contorno**



Fonte: Autor (2020)

Finalizado a construção do modelo de treliça e a definição das condições de contorno, é possível obter os esforços solicitantes na aba lateral conforme ilustra a Figura 5.12.

**Figura 5.12 – Obtenção dos esforços solicitantes no modelo de treliça para aba lateral**



Fonte: Autor (2020)

O dimensionamento da armadura de suspensão (estribos verticais) e do tirante horizontal (estribos horizontais) foi feito como base nas forças de tração obtidas nos elementos de barra da treliça, obtendo-se as seguintes áreas de aço:

$$A_{s,sus} = \frac{125,4}{43,48} = 2,88 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,tir} = \frac{57,9}{43,48} = 1,33 \text{ cm}^2$$

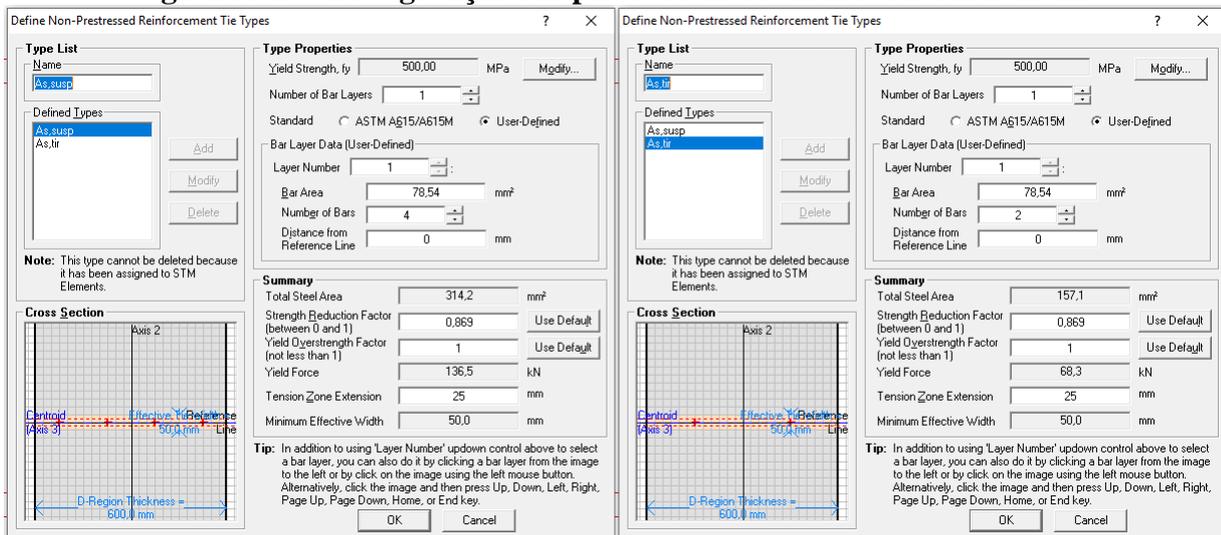
Considerando a área de influência para armadura de suspensão igual a 60,0 cm:

$$A_{s,sus} = \frac{2,88}{0,6} = 4,80 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{s,tir} = \frac{1,33}{0,6} = 2,21 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Determinadas as quantidades necessárias de armadura, procedeu-se com a configuração dos parâmetros de resistências dos tirantes no software CAST seguindo os passos apresentados no item 4.5 deste trabalho. Foram adotadas barras em uma única camada e no campo “*Tension Zone Extension*”, que representa a extensão da zona tracionada do tirante, adotou-se o valor de 2,5 cm que corresponde ao cobrimento da armadura para os dois lados da armadura. A Figura 5.13 apresenta as configurações realizadas tanto para armadura de suspensão quanto para o tirante horizontal.

**Figura 5.13 – Configuração dos parâmetros de resistência dos tirantes**



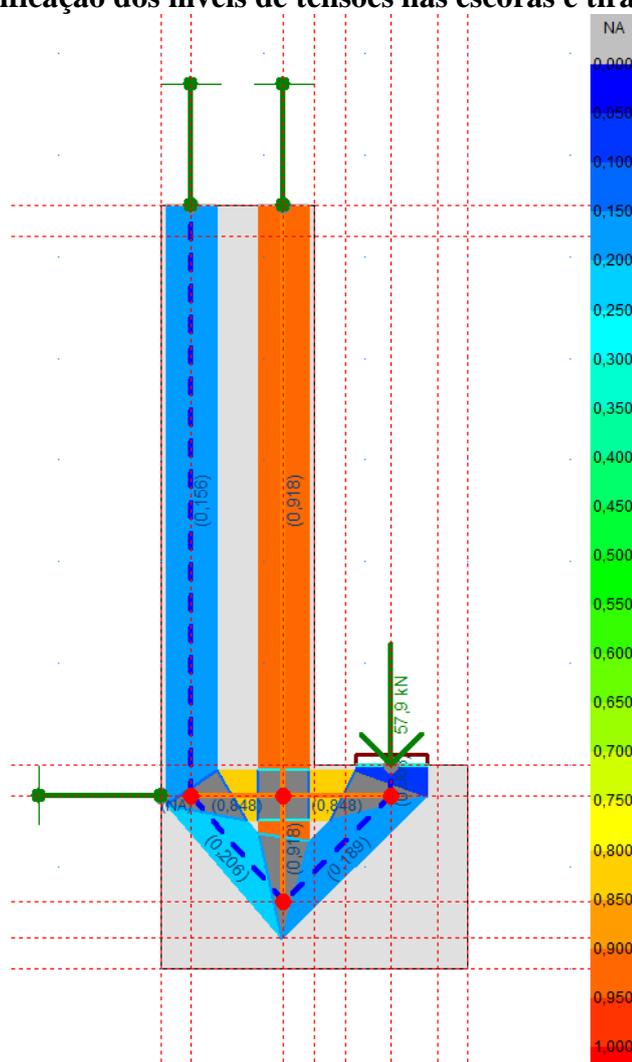
Fonte: Autor (2020)

Configurados todos os parâmetros necessários para a realização das verificações de resistência da aba lateral, realizou-se a atribuição dos parâmetros. Afim de manter o dimensionamento a favor da segurança para o estado limite último, considerou-se todas as

escoras como sendo do tipo garrafa, por apresentarem o menor limite de resistência. Em relação a largura das escoras, foi adotado o valor de 5,0 cm para todas escoras afim de se manterem próximos os níveis de tensões entre escoras e para que as escoras inclinadas ficassem limitadas geometricamente pelo final do estribo vertical, conforme modelo apresentado por Marti (1985). Para a determinação do tipo das regiões nodais, observa-se pela Figura 5.12 que a aba lateral apresentou três nós do tipo CCT (N1, N3 e N4) e um nó do tipo TTT (N2).

A Figura 5.14 apresenta através de uma escala de cores os resultados obtidos para os níveis de tensões em relação às resistências de cálculo nas escoras e tirantes.

**Figura 5.14 – Verificação dos níveis de tensões nas escoras e tirantes da aba lateral**



A verificação das regiões nodais é feita uma a uma separadamente, uma vez que cada nó possui pelo menos três faces. A Figura 5.15 apresenta de maneira resumida, através de tabelas apresentadas pelo software, os níveis de tensão em cada face de cada nó.

**Figura 5.15 – Verificação dos níveis de tensões nas regiões nodais da aba lateral**

STM Node N1 Stress Info			
Node Side	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio
E5	-88,9	2,96	0,171
E3	57,9	1,93	0,112
E1	-67,5	2,25	0,130

STM Node N2 Stress Info			
Node Side	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio
E4	57,9	1,93	0,134
E3	57,9	1,93	0,134
E7	125,4	4,18	0,290
E2	125,4	4,18	0,290

STM Node N3 Stress Info			
Node Side	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio
E6	-81,8	2,73	0,158
E4	57,9	1,93	0,112
E14	-57,9	1,38	0,080

STM Node N4 Stress Info			
Node Side	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio
E6	-81,8	2,73	0,158
E5	-88,9	2,96	0,171
E7	125,4	4,18	0,242

Fonte: Autor (2020)

De acordo com Marti (1985) no dimensionamento das abas laterais devem ser adotadas ainda barras longitudinais nos cantos dos estribos. O efeito de pino (“*dowel action*”) promovido pelas barras longitudinais ajuda a transferir as forças dos estribos ao concreto entre estribos. O autor não faz maiores recomendações a respeito do dimensionamento dessas barras, sendo utilizadas duas barras nos cantos dos estribos com o mesmo diâmetro adotado para os tirantes que neste caso foram barras de 10,0mm.

### 5.3.2 Dimensionamento à Torção

Marti (1985) demonstra, através de conceitos da resistência dos materiais, uma hipótese que valida o modelo resistente a torção utilizando estribos fechados por meio do equilíbrio existente entre os fluxos de tensões de cisalhamento presentes na seção transversal. A força de tração de 125,4 kN no ramo direito do estribo vertical irá diminuir linearmente ao longo da altura da viga até o valor de aproximadamente 29 kN, que corresponde à metade da força aplicada. Considerando a altura e a largura da seção relativa o eixo dos estribos (84,0 x 9,0 cm), essa diferença de forças provocará um fluxo de tensões de cisalhamento no ramo esquerdo do estribo que corresponde a:

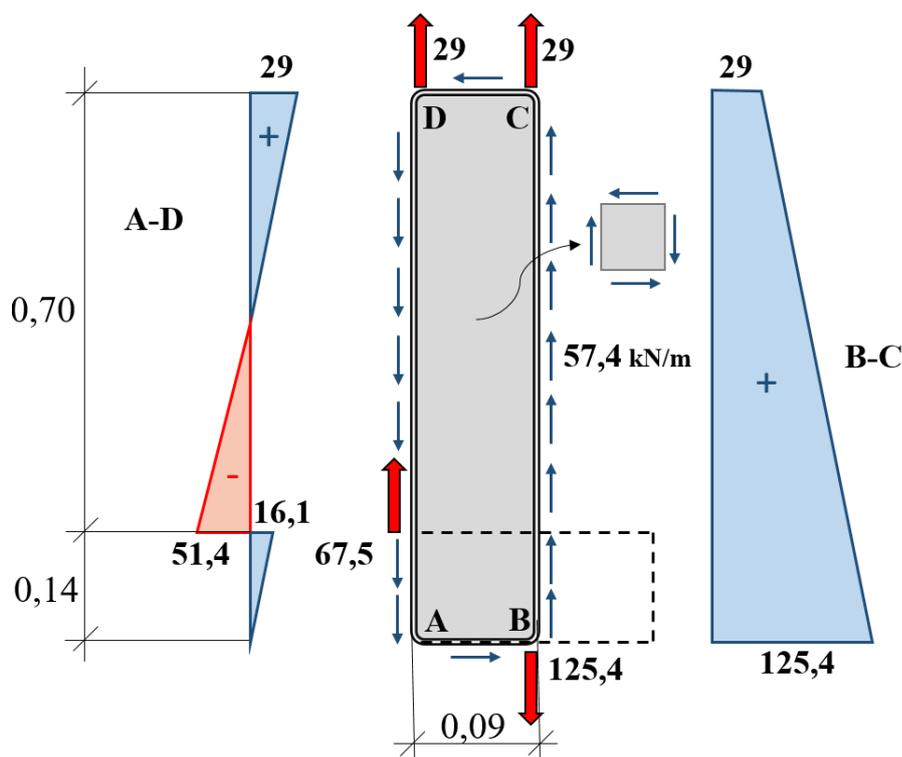
$$f_c = \frac{125,4 - 29}{0,84} = 114,8 \text{ kN/m}$$

Metade desse fluxo estará em equilíbrio com o fluxo de cisalhamento torsional de:

$$f_t = \frac{57,9 \cdot 0,15}{2 \cdot 0,84 \cdot 0,09} = 57,4 \text{ kN/m}$$

Uma vez que em um determinado ponto, o cisalhamento não pode ocorrer apenas em um plano, deve sempre existir uma tensão de cisalhamento de igual valor em outro plano perpendicular, logo, a outra metade do fluxo de cisalhamento é transferida através de tensões de cisalhamento transversais no concreto entre os ramos do estribo vertical. As resultantes dessas tensões de cisalhamento transversais estarão em equilíbrio com o fluxo de cisalhamento torsional ao longo da parte fechada do estribo vertical. Ao longo do ramo esquerdo a resultante das tensões de cisalhamento transversais e das tensões de cisalhamento torsional estarão em equilíbrio com a força de compressão de 67,5 kN introduzida acima do ponto A e com a força de 29 kN no ponto D. A Figura 5.16 ilustra o modelo de equilíbrio exposto.

**Figura 5.16 – Modelo de equilíbrio da seção transversal**



Fonte: Autor (2020)

Conforme Marti (1985), para o equilíbrio da seção à torção, analisando a viga em elevação, assume-se que o momento torsor seja transportado até os apoios por um campo de concreto comprimido em espiral através de uma “parede” exterior com o eixo central assumido

com sendo coincidente com o eixo do estribo. A espessura necessária para essa “parede” é tomada assumindo-se que as tensões principais de compressão são iguais ao  $f_{ck}$  do concreto.

Inicialmente, deve-se adotar barras longitudinais para resistir aos esforços de tração oriundos da torção. Neste caso, assume-se que resistência a torção será promovida somente pela alma da viga. Considerando-se inicialmente barras de 10,0 mm, com área igual a 0,785 cm<sup>2</sup>, espaçadas a cada 20 cm, totalizando 7,69 cm<sup>2</sup> no perímetro dos estribos, obteve-se uma resistência por metro de:

$$\rho_{sl} = \frac{100}{20} \cdot 0,785 \cdot 43,48 = 170,6 \text{ kN/m}$$

Tomando como base o diagrama de momentos torsores apresentado na Figura 5.5, o fluxo de cisalhamento torsional devido ao máximo momento torsor foi de:

$$\tau_{sd} = \frac{26,04}{2 \cdot 0,84 \cdot 0,09} = 172,2 \text{ kN/m}$$

Logo, de acordo com Marti (1985), este fluxo de cisalhamento torsional requer estribos fechados com uma resistência de:

$$\rho_{sw} = \frac{\tau_{sd}^2}{\rho_{sl}} = \frac{172,2^2}{170,6} = 173,8 \text{ kN/m}$$

Obtidas as resistências da armadura longitudinal e dos estribos fechados, é possível obter o ângulo de inclinação das diagonais comprimidas por meio da seguinte expressão:

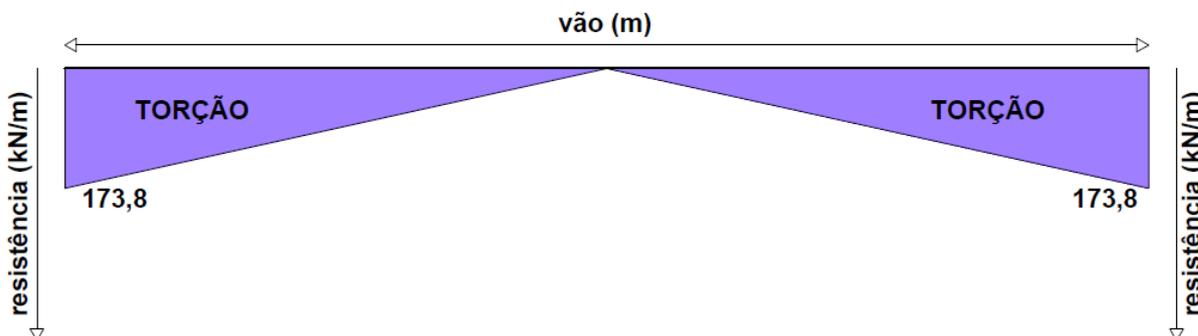
$$\theta = \tan^{-1} \sqrt{\frac{173,8}{170,6}} = 45,27^\circ$$

A espessura da “parede” exterior, considerando a recomendação da ABNT NBR 6118:2014 quanto a resistência à compressão do concreto no estado limite último igual a  $0,85 \cdot f_{cd}$ , foi de:

$$h_e = \frac{(170,6 + 173,8)}{0,85 \cdot 28571} = 0,0142 \text{ m} = 14,2 \text{ mm}$$

Deste modo, considerando barras longitudinais de 10,0 mm espaçadas a cada 20 cm, a resistência necessária aos estribos fechados é mostrada na Figura 5.17.

**Figura 5.17 – Diagrama de resistência à torção para os estribos fechados**



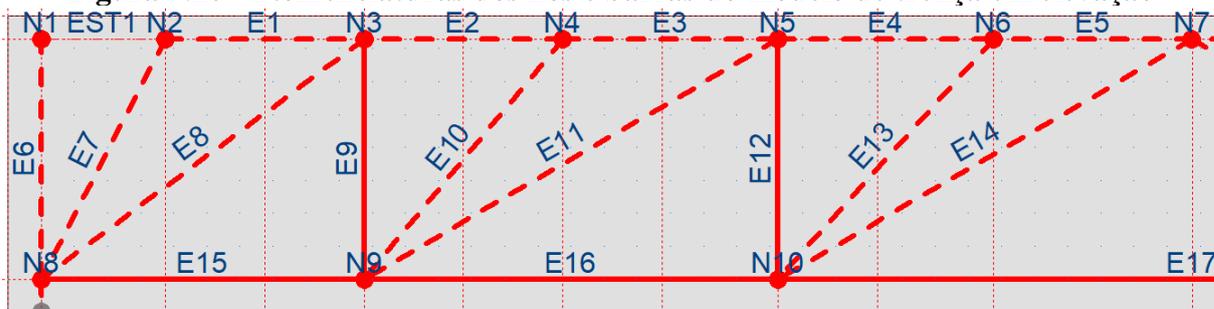
Fonte: Autor (2020)

Por simplificação e segurança, adota-se para o detalhamento das armaduras um diagrama linear de resistência à torção necessária, partindo do centro da viga.

### 5.3.3 Determinação da Armadura Longitudinal e Transversal

O dimensionamento à flexão e forças cortantes é feito por meio de um modelo de treliça em elevação responsável por conduzir a forças excêntricas até os apoios. Como a viga de seção “L” é um elemento essencialmente tridimensional, o modelo espacial foi desacoplado em dois modelos planos. O primeiro modelo, em corte, já foi analisado, dimensionado e verificado no item anterior. Neste segundo modelo, a concepção da treliça deve ser feita de tal modo que as barras verticais tracionadas fiquem posicionadas em pontos intermediários às barras lançadas anteriormente. Desse modo, os esforços obtidos nesta etapa não influenciarão o dimensionamento feito anteriormente, caso contrário, o processo se tornaria iterativo ao ponto de desestimular uma possível solução manual do problema. A Figura 5.18 apresenta as nomenclaturas adotadas para os elementos do modelo de treliça em elevação. Devido a simetria da treliça a imagem ilustra somente metade da viga

**Figura 5.18 – Nomenclaturas dos nós e barras do modelo de treliça em elevação**

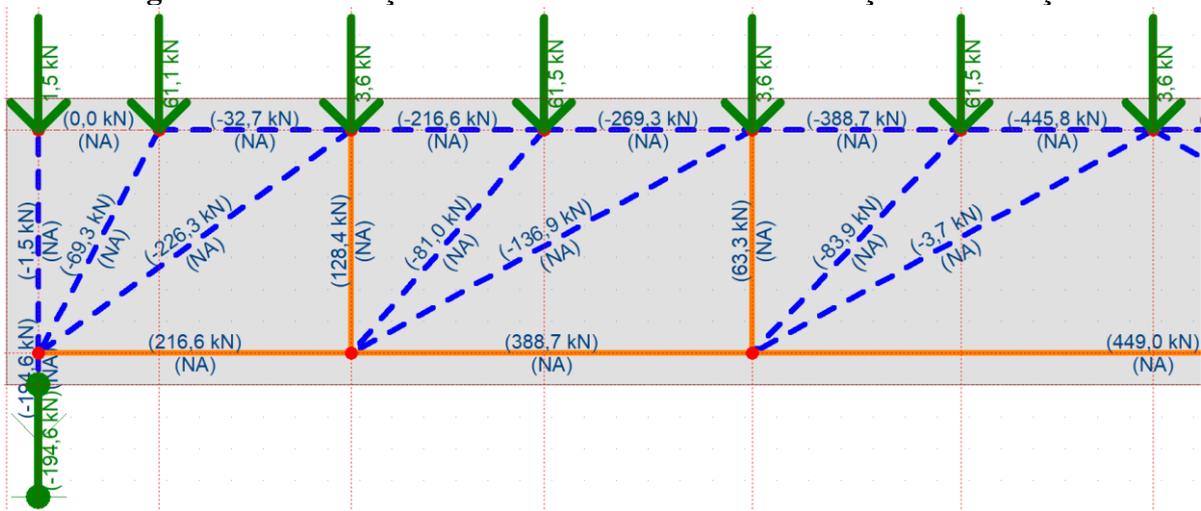


Fonte: Autor (2020)

Segundo a proposta mais conservadora apresentada por Marti (1985), uma região interna com largura de  $150 - 30 - 30 - 14,2 = 75,8$  mm e altura de  $900 - 30 - 30 - 14,2 = 825,8$  mm ficaria destinada a resistir à flexão e as forças cortantes. Todavia, neste exemplo, não será descontado o cobrimento da armadura pois pretende-se que, posteriormente, a comparação com os outros métodos analíticos seja a mais realista possível.

A Figura 5.19 apresenta a 1ª iteração do modelo de treliça em elevação já lançado no software CAST. Como em todo modelo de treliça as forças solicitantes devem ser lançadas nos nós, logo a carga de cálculo linearmente distribuída de 6,05 kN/m, devido ao peso próprio da viga e ao peso da pele de vidro, foi substituída por forças concentradas estaticamente equivalentes. Percebe-se pela figura que as reações de apoios coincidem com o cortante máximo obtido no diagrama de esforços solicitantes, indicando que o peso próprio foi corretamente inserido no modelo. Os passos para o lançamento no software são semelhantes aos explicados anteriormente para aba lateral, com a diferença que para o modelo em elevação, no campo “*D-Region Thickness*”, foi considerado a espessura de 150 mm que corresponde à largura da alma da seção.

**Figura 5.19 – Esforços solicitantes do modelo em elevação – 1ª iteração**

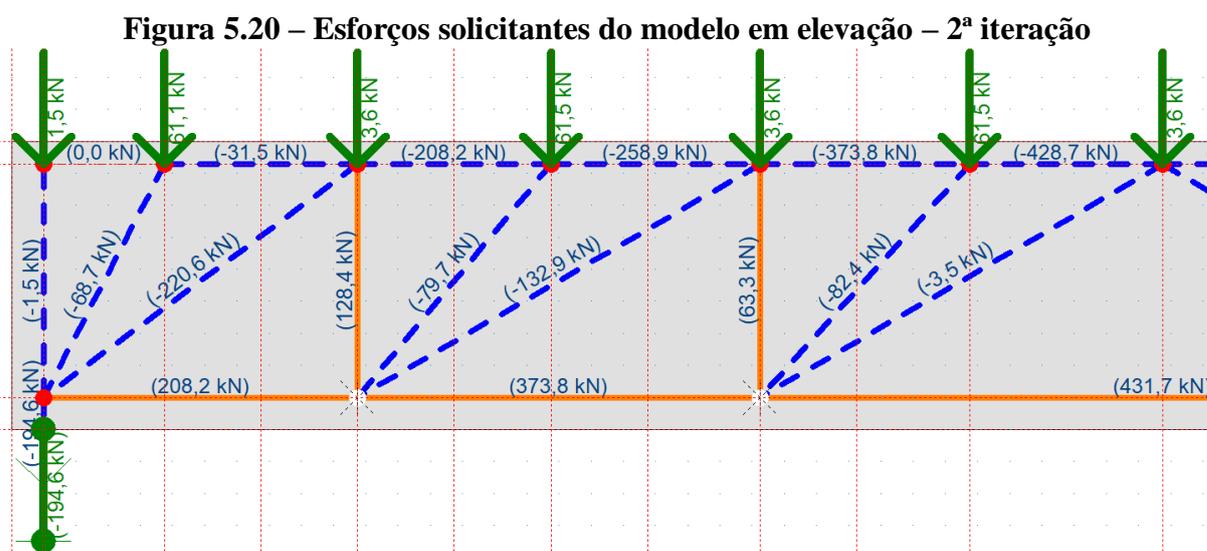


Para o lançamento do modelo de treliça, assumiu-se o centroide da armadura longitudinal principal no centro do estribo horizontal. Para que a inclinação mínima das escoras inclinadas fosse atendida, a distância entre banzos adotada na 1ª iteração foi de 70 cm.

Na 1ª iteração, considerando que na barra em que ocorre a máxima força de compressão haverá uma escora prismática com uma resistência igual a  $f_{cd1}$ , seria necessário um trecho comprimido com uma altura de:

$$x = \frac{445,8}{15 \cdot 0,85 \cdot 0,84 \cdot 2,86} = 14,55 \text{ cm}$$

Logo, a distância real entre os banzos da viga seria igual a  $90 - 10 - 14,55/2 = 72,7 \text{ cm}$ . Como o valor real ficou próximo, mas não bateu com o valor estimado, será feita uma nova iteração para fins didáticos. Mantendo-se o banzo inferior no centro dos estribos, o ajuste será feito no banzo superior passando a ter uma distância de  $72,8 \text{ cm}$  em relação ao banzo inferior. Após uma nova análise, obteve-se os resultados conforme mostra a Figura 5.20.



Na 2ª iteração, a força de compressão de  $428,7 \text{ kN}$  obtida no meio do vão, requer uma altura comprimida de:

$$x = \frac{428,7}{15 \cdot 0,85 \cdot 0,84 \cdot 2,86} = 14,00 \text{ cm}$$

Assim, a nova distância real entre banzos foi  $90 - 10 - 14/2 = 73,0 \text{ cm}$ . Como o valor real ficou muito próximo do valor estimado na segunda iteração, não há necessidade de se fazer novas iterações.

A força de tração de  $430,6 \text{ kN}$  no meio do vão requer uma armadura de tração longitudinal principal de:

$$A_s = \frac{431,7}{43,48} = 9,93 \text{ cm}^2$$

Adotando-se 9 barras de 12,5 mm serão necessárias três camadas com 3 barras em cada camada, sendo possível realizar a distribuição das barras por igual no interior do estribo horizontal.

Na região próxima aos apoios, a força de tração reduz para 207,7 kN. Em acréscimo a essa força, Marti (1985) recomenda somar a força de tração provocada pelo fluxo de cisalhamento torsional máximo que ocorre na região do apoio. Sendo assim, esse fluxo de 172,2 kN/m atuando em um perímetro de  $0,14 + 0,09 + 0,14 = 0,37$  m provocará um força de tração de complementar de 60 kN. Neste caso, como a soma entre a força atuante e o complemento  $208,2 + 60 = 268,2$  kN é inferior à força no meio do vão, o prolongamento das barras longitudinais adotadas no meio do vão até o final da viga foi suficiente para cobrir os esforços solicitantes.

Para a armadura transversal, embora o detalhamento final seja feito através da soma das resistências necessárias, de maneira semelhante ao apresentado na Figura 4.34, serão definidas armaduras para os tirantes transversais para que se garanta o equilíbrio do modelo de treliça em elevação e seja possível verificar as tensões nas regiões nodais. Desse modo, para as forças transversais de tração de 63,3 kN e 128,4 kN foi adotado um único estribo equivalente. Para um ramo dos estribos, obteve-se as seguintes armaduras:

$$A_{t,1} = \frac{0,5 \cdot 63,3}{43,48} = 0,723 \text{ cm}^2 \rightarrow \emptyset 10,0 \text{ mm}$$

$$A_{t,2} = \frac{0,5 \cdot 128,4}{43,48} = 1,476 \text{ cm}^2 \rightarrow \emptyset 16,0 \text{ mm}$$

Determinadas as armaduras de todos os tirantes, pôde-se atribuir os parâmetros de resistência aos elementos de barra e aos nós no software CAST conforme as recomendações da ABNT NBR 6118:2014. A largura das escoras no banzo superior foram determinadas para que se aproveitasse toda a área de concreto disponível (14,5 cm). Nas escoras inclinadas também foi mantido o valor de 14,5 cm pois tal valor foi suficiente para atender com segurança as tensões impostas. Para o tirante principal representado pelo banzo inferior foi adotada a largura de 20,0 cm que representa a zona de distribuição da armadura. Para os tirantes transversais adotou-se a largura de 30,0 cm para que fosse possível a verificação dos níveis de tensão nas regiões nodais. A Figura 5.21 e Figura 5.23 apresentam os parâmetros de resistência que foram atribuídos aos elementos e os resultados obtidos para os níveis de tensões em relação às





obtidos também foram contempladas análises, verificações e dimensionamentos complementares aos realizados pelo Método das Bielas.

#### 5.4.1 Dimensionamento da Aba Lateral

##### 5.4.1.1 Manual do BCA (2001) e BS 8110-1:1997

O dimensionamento da aba lateral segundo as recomendações o Manual do BCA (2001) e BS 8110-1:1997 contempla de maneira geral os seguintes critérios de dimensionamento: armadura horizontal de flexão ( $A_{s,tir}$ ), armadura vertical de suspensão ( $A_{s,sus}$ ) e uma verificação da resistência à punção.

A primeira etapa do dimensionamento é a definição dos parâmetros geométricos da aba lateral. Conforme ilustração apresentada pela Figura 3.21, para o estudo de caso em questão, os parâmetros geométricos adotados foram:

$$a_v = 3,0 + 0,5 + 7,5 + 3,0 = 14,0 \text{ cm}$$

$$b_n = 15,0 \text{ cm}$$

$$d = 20,0 - 3,0 = 17,0 \text{ cm}$$

$$b_e = 15,0 + 10,0 + 15,0 = 40,0 \text{ cm}$$

Considerando a força de cálculo  $V_d = 57,9 \text{ kN}$  aplicada no final do aparelho de apoio, o momento negativo que solicitará a aba à flexão é obtido através da seguinte equação:

$$M_d = V \cdot a_v$$

$$M_d = 57,9 \cdot 14 = 810,6 \text{ kN/cm}$$

A determinação da armadura horizontal para o momento fletor negativo depende essencialmente da posição da linha neutra na aba lateral que foi obtida pela seguinte expressão:

$$x = 1,25 \cdot d \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{M_d}{0,425 \cdot b_e \cdot d^2 \cdot f_{cd}}} \right)$$

$$x = 1,25 \cdot 17 \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{810,6}{0,425 \cdot 40 \cdot 17^2 \cdot 2,86}} \right) = 0,62 \text{ cm}$$

A aba lateral se encontra no Domínio II, logo, a armadura está em regime de escoamento, portanto, a armadura do tirante horizontal obtida foi:

$$A_{s,tir} = \frac{M_d}{(d - 0,4 \cdot x) \cdot f_{yd}} = \frac{810,6}{(17 - 0,4 \cdot 0,62) \cdot 43,48} = 1,11 \text{ cm}^2$$

Considerando a área de influência da armadura do tirante horizontal igual a 40,0 cm, a taxa de distribuição obtida foi:

$$A_{s,tir} = \frac{1,11}{0,40} = 2,77 \text{ cm}^2/\text{m}$$

De acordo com o Manual do BCA (2001), por questões práticas, a armadura horizontal deverá ser provida na forma de estribos horizontais, de modo que, para garantir a ancoragem desses estribos, recomenda-se a utilização de diâmetros inferiores a 12,0 mm.

O dimensionamento da armadura de suspensão considera que o comportamento da aba lateral semelhante a um dente de apoio, logo, os estribos verticais que atuarão como armadura de suspensão deverão ser resistentes no mínimo a aplicação direta da força  $V = 57,9 \text{ kN}$ . Desse modo, a armadura de suspensão obtida foi:

$$A_{s,sus} = \frac{V_d}{f_{yd}} = \frac{57,9}{43,48} = 1,33 \text{ cm}^2$$

Para armadura de suspensão, a área de influência considerada é distância entre os pontos de aplicação das forças, logo, a taxa de distribuição obtida foi:

$$A_{s,sus} = \frac{1,33}{1,20} = 1,11 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Vale ressaltar que a armadura de suspensão obtida não é a armadura transversal final a ser posicionada na região do apoio para laje. O manual recomenda que essa armadura seja colocada adicionalmente a qualquer outra armadura dimensionada para o cisalhamento (torção e cortante).

A última etapa do dimensionamento da aba lateral compreende a verificação complementar da capacidade resistente à punção da aba lateral. A largura efetiva considerada para o cálculo da resistência à punção será  $b_e = 40 \text{ cm}$ , todavia o manual faz a ressalva que caso

distância entre forças aplicadas na aba lateral seja inferior a 2.  $b_n = 30,0$  cm, as forças deverão ser consideradas em conjunto, o que não ocorre neste estudo de caso.

De acordo com a Tabela 3.8 da BS 8110-1:1997 o valor da resistência ao cisalhamento promovida pelo concreto  $V_c$  é calculada por meio da altura útil ( $d$ ) e da expressão  $(100 \cdot A_{s,tir}/b_e \cdot d) \leq 3,00$ .

$$\frac{100 \cdot A_{s,tir}}{b_e \cdot d} = \frac{100 \cdot 1,11}{40 \cdot 17} = 0,16$$

Considerando a altura útil da aba lateral  $d = 17,0$  cm, o valor de resistência ao cisalhamento aproximado obtido na Tabela 3.8 foi de 0,45 MPa. A norma britânica BS 8110-1:1997 ressalva que caso a resistência utilizada no concreto seja superior a 25 MPa os valores obtidos na tabela podem ser multiplicados pelo coeficiente:

$$\frac{f_{ck}^{1/3}}{25} = \frac{40^{1/3}}{25} = 1,17$$

Para o caso de abas laterais em específico, tanto o Manual do BCA (2001) quanto a BS 8110-1:1997 permitem que a resistência dada por  $V_c$  seja elevada multiplicando-se  $V_c$  por um fator  $2d/a_v$ . Logo, o valor final de  $V_c$  será dado por:

$$V_c = 0,45 \cdot 1,17 \cdot \frac{2 \cdot 17}{14} = 1,28 \text{ MPa}$$

Essa tensão corresponde a uma força resistente de:

$$V_{rd} = 0,128 \cdot 17 \cdot 40 = 87,04 \text{ kN}$$

Como a força solicitante de 57,9 kN é inferior à força resistente de 87,04 kN, portanto a verificação da resistência a punção foi atendida.

#### 5.4.1.2 Manual do PCI (2010)

O dimensionamento da aba lateral pelo Manual do PCI (2010) contempla de maneira geral os seguintes critérios: verificação da resistência à punção, armadura horizontal de flexão ( $A_{s,tir}$ ), armadura longitudinal de flexão da aba no sentido do comprimento da viga ( $A_{l,aba}$ ),

armadura vertical de suspensão ( $A_{s,sus}$ ) e um dimensionamento complementar das armaduras de flexão da alma fora do plano próximo aos apoios ( $A_{wl}$  e  $A_{wv}$ ).

A primeira etapa do dimensionamento da aba lateral compreende a verificação da resistência à punção. Como a distância entre as forças concentradas ( $s$ ) são superiores à soma da largura do aparelho de apoio ( $b_t$ ) com a altura da aba lateral ( $h_l$ ), foi adotado como resistência à punção o menor valor entre as Equações [3.87] e [3.88].

Os parâmetros geométricos utilizados foram:  $s = 120,0$  e  $130,0$  cm;  $b_t = 10,0$  cm;  $h_l = 20,0$  cm;  $b_1 = 30,0$  cm;  $b = 15,0$  cm;  $d_e = 47,5$  cm;  $\phi = 0,75$ .

Substituindo os parâmetros nas Equações [3.87] e [3.88], obteve-se:

$$\phi V_n = 0,25 \cdot 0,75 \cdot (\sqrt{40} \cdot 0,1) \cdot 20[2(30-15) + 10 + 20] = 142,30 \text{ kN}$$

$$\phi V_n = 0,083 \cdot 0,75 \cdot (\sqrt{40} \cdot 0,1) \cdot 20[2(30-15) + 10 + 20 + 2 \cdot 47,5] = 122,05 \text{ kN}$$

Como a força solicitante de  $57,9$  kN é inferior ao menor valor entre as duas equações ( $122,05$  kN), portanto a verificação da resistência a punção foi atendida.

A próxima etapa que segue é o dimensionamento da armadura horizontal na forma de estribos fechados responsável pela flexão existente na conexão entre a aba lateral e a alma da seção, apresentado na Equação [3.92]. Considerando a excentricidade  $a = 10,5$  cm, a altura útil  $d = 17,0$  cm, o coeficiente  $\phi = 0,87$  e desconsiderando quaisquer forças horizontais que por ventura possam ser aplicadas na aba lateral, a armadura horizontal obtida foi:

$$A_{s,tir} = \frac{V_d \cdot a}{d \cdot \phi \cdot f_{yk}} = \frac{57,9 \cdot 10,5}{17 \cdot 43,48} = 0,82 \text{ cm}^2$$

Segundo o Manual do PCI (2010), a armadura do tirante deve ser espaçada a uma distância de seis vezes a espessura da aba para cada lado do ponto de aplicação da carga, mas não deve exceder metade da distância entre os pontos de aplicação das cargas. O manual também recomenda que o espaçamento máximo não exceda a espessura da aba lateral. Desse modo, considerando a distribuição da armadura horizontal em um trecho igual a  $60$  cm para cada lado do ponto de aplicação da força obteve-se:

$$A_{s,tir} = \frac{0,82}{1,20} = 0,68 \text{ cm}^2/\text{m}$$

O passo seguinte é o dimensionamento da armadura longitudinal de flexão da aba no sentido do comprimento da viga. Diferente de Marti (1985) que faz somente recomendações sobre a necessidade da utilização dessa armadura, o Manual do PCI apresenta a Equação [3.94], que determina a soma da área de aço necessária para as barras longitudinais a serem posicionada nos cantos dos estribos. Considerando a distância entre o centroide da armadura longitudinal na aba e a base da viga  $d_l = 16,0$  cm e a resistência característica do aço em MPa, a armadura obtida foi:

$$A_{l,aba} = 1,38 \cdot (b_1 - b) \cdot \frac{d_l}{f_{yk}} = 1,38 \cdot (30 - 15) \cdot \frac{16}{500} = 0,66 \text{ cm}^2$$

A próxima etapa é o dimensionamento da armadura vertical de suspensão conforme a Equação [3.95]. De modo semelhante ao Manual do BCA (2001) considera-se que a força no tirante seja igual a força concentrada aplicada na aba lateral, todavia, o Manual do PCI (2010) considera ainda um fator complementar (m). Esse fator foi calculado pela Equação [3.96] adotando-se os seguintes parâmetros geométricos:  $d_s = 12,0$  cm;  $a = 10,5$  cm;  $h_l = 20,0$  cm;  $h = 90,0$  cm;  $b_l = 30,0$  cm;  $e = 15,0$  cm;  $\gamma_t = 1,0$ ;  $x_{aba} = 20,0$  cm;  $y_{aba} = 30,0$  cm;  $x_{alma} = 15,0$  cm;  $y_{alma} = 70,0$  cm.

$$m = \frac{\left[ (12 + 10,5) - \left( 3 - 2 \cdot \frac{20}{90} \right) \cdot \left( \frac{20}{90} \right)^2 \cdot \left( \frac{30}{2} \right) - 15 \cdot \frac{20^2 \cdot 30}{20^2 \cdot 30 + 15^2 \cdot 70} \right]}{12} = 1,18$$

Obtido o fator (m), procedeu-se com o dimensionamento da armadura de suspensão através da seguinte expressão:

$$A_{s,sus} = \frac{V_d}{\phi \cdot f_{yk}} \cdot (m) = \frac{57,9}{43,48} \cdot 1,18 = 1,57 \text{ cm}^2$$

De acordo com o manual, a armadura de suspensão deve ser espaçada do mesmo modo como foi espaçada a armadura do tirante, logo, considerando a distribuição da armadura de suspensão em um trecho igual a 60 cm para cada lado do ponto de aplicação da força obteve-se:

$$A_{s,sus} = \frac{1,57}{1,20} = 1,31 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Vale ressaltar que, segundo o Manual do PCI (2010), deverá ser posicionada na região dos apoios somente a maior entre a armadura de suspensão e a armadura transversal destinada à torção e cortante combinadas.

Por fim, a última etapa é o dimensionamento de armaduras complementares para flexão fora do plano na região dos apoios. As armaduras destinadas para esse fim foram calculadas pela Equação [3.97] e devem ser distribuídas, tanto na horizontal como na vertical, em um trecho equivalente a distância entre a reação de apoio horizontal superior e a base da viga. Os parâmetros geométricos adotados foram:  $e = 15,0$  cm e  $d_w = 11,0$  cm.

$$A_{wv} = A_{wl} = \frac{V_d \cdot e}{2 \cdot \phi \cdot f_{yk} \cdot d_w} = \frac{194,6 \cdot 15}{2 \cdot 43,48 \cdot 11} = 3,05 \text{ cm}^2$$

Considerando que as ligações da viga no pilar serão feitas por meio de chapas de aço soldadas no topo da seção, o trecho de distribuição da armadura será igual à altura da viga (90 cm), logo, a taxa obtida foi:

$$A_{wv} = A_{wl} = \frac{3,05}{0,90} = 3,39 \text{ cm}^2/\text{m}$$

#### 5.4.1.3 Notas do PCA (2013)

O dimensionamento segundo as recomendações das Notas do PCA (2013) se diferencia dos modelos abordados anteriormente por considerar uma análise complementar pelo modelo de atrito-cisalhamento da aba lateral. Desse modo, serão abordados os seguintes critérios de dimensionamento: conexão da aba lateral com a alma (atrito-cisalhamento), armadura horizontal (atrito-cisalhamento), armadura horizontal (flexão), armadura horizontal (cisalhamento), verificação da resistência à punção e armadura vertical de suspensão.

Como neste estudo de caso, em específico, não estão sendo consideradas a atuação de forças horizontais aplicadas na aba lateral, não será calculada a armadura horizontal de tração direta da aba lateral.

Desse modo, a primeira etapa do dimensionamento é a verificação de resistência à ruptura pelo modelo de atrito-cisalhamento da aba lateral. Nesta etapa, através de verificações apresentadas pela Equação [3.98], garante-se que a resistência do concreto e as dimensões adotadas para aba lateral são suficientes para resistir à força aplicada pela laje. Os parâmetros

geométricos adotados para tal verificação estão ilustrados na Figura 3.25 e para este estudo de caso foram:  $a_v = 7,5$  cm,  $d = 17,0$  cm,  $W_{\text{eff}} = 10 + 4.7,5 = 40$  cm.

$$V_d \leq \begin{cases} 0,2 \cdot 40 \cdot 40 \cdot 17 \cdot 0,1 = 544 \text{ kN} \\ (3,3 + 0,08 \cdot 40) \cdot 40 \cdot 17 \cdot 0,1 = 442 \text{ kN} \\ 11 \cdot 17 \cdot 40 \cdot 0,1 = 748 \text{ kN} \end{cases}$$

Adotando o menor valor entre os três valores de resistência acima e aplicando o coeficiente minorador  $\phi = 0,75$ , o valor de cálculo obtido foi:

$$V_d \leq 0,75 \cdot 442 = 331,5 \text{ kN}$$

Como a força solicitante de 57,9 kN é inferior à resistência de cálculo (331,5 kN), portanto a verificação da resistência da aba lateral pelo modelo de atrito-cisalhamento foi atendida.

A armadura horizontal necessária ao modelo de cálculo por atrito-cisalhamento foi calculada de acordo com a Equação [3.101], considerando a concretagem da aba lateral monolítica com  $\mu = 1,4$ . Sendo assim, obteve-se:

$$A_{vf} = \frac{V_d}{\mu \cdot f_{yd}} = \frac{57,9}{1,4 \cdot 43,48} = 0,95 \text{ cm}^2$$

A próxima etapa do dimensionamento é determinação da armadura horizontal de flexão da aba lateral ( $A_f$ ) conforme a Equação [3.102]. Segundo as Notas do PCA (2013), a armadura horizontal de flexão pode ser obtida utilizando os métodos convencionais de dimensionamento à flexão ou pela recomendação de Mirza e Furlong (1985) que prevê a utilização de um braço de alavanca igual a  $0,8d$  na vigas de seção “L”, em que  $d = 17,0$  cm. Considerando a excentricidade de aplicação da força  $a_f = 10,5$  cm e desconsiderando quaisquer forças horizontais que por ventura possam ser aplicadas na aba lateral, a armadura horizontal obtida foi:

$$A_f = \frac{V_d \cdot a_f}{0,8 \cdot d \cdot f_{yd}} = \frac{57,9 \cdot 10,5}{0,8 \cdot 17 \cdot 43,48} = 1,03 \text{ cm}^2$$

Segundo as Notas do PCA (2013) a armadura horizontal total a ser utilizada na aba lateral ( $A_{s,tir}$ ) não deverá ser inferior ao maior dos seguintes valores apresentados pela Equação [3.104]:

$$A_{s,tir} \geq \begin{cases} \text{I. } A_f = 1,03 \text{ cm}^2 \\ \text{II. } (2/3) \cdot A_{vf} = 0,63 \text{ cm}^2 \\ \text{III. } 0,04 \cdot (40/500) \cdot 17 \cdot (10 + 5 \cdot 10,5) = 3,40 \text{ cm}^2 \\ \text{IV. } 0,08 \cdot (40/500) \cdot 17 \cdot 47,5 = 5,2 \text{ cm}^2 \leq 0,02 \cdot (40/500) \cdot 17 \cdot (10 + 5 \cdot 10,5) = 1,70 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

Desconsiderando as Equações III e IV que são verificações normativas referentes a armadura mínima, a armadura horizontal obtida foi  $1,03 \text{ cm}^2$ . A distribuição deverá ser feita em um trecho igual a  $W + 5 \cdot a_f = 62,5 \text{ cm}$ , conforme apresentado na Figura 3.26, não podendo ser superior a distância entre as forças aplicadas pela laje. Portanto a taxa de distribuição da armadura horizontal total será:

$$A_{s,tir} = \frac{1,03}{0,625} = 1,65 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Considerando a utilização da armadura mínima necessária, a taxa de distribuição obtido foi:

$$A_{s,tir} = \frac{3,40}{0,625} = 5,44 \text{ cm}^2/\text{m}$$

As Notas do PCA (2013) ainda recomendam a utilização de uma armadura de cisalhamento na aba lateral, semelhante a utilizada em consolos. Neste caso, como não foi calculada armadura para tração direta, essa armadura será igual a:

$$A_{s,cis} = 0,5 \cdot A_{s,tir} = 0,5 \cdot 5,44 = 2,72 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Definida a armadura horizontal, a próxima etapa é a verificação da resistência à punção da aba lateral de acordo com a Equação [3.106]. Neste estudo de caso, não foi verificada a resistência a punção próximo às extremidades pois a aba lateral é apoiada sobre o consolo. Os parâmetros geométricos adotados para o cálculo do perímetro crítico, conforme a Figura 3.27, foram:  $d_f = 17,0 \text{ cm}$ ;  $W = 10,0 \text{ cm}$  e  $L = 7,00 \text{ cm}$ . Desse modo, a resistência a punção obtida foi:

$$V_d \leq 0,33 \cdot \phi \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot d_f \cdot (W + 2L + 2d_f)$$

$$V_d \leq 0,33 \cdot 0,75 \cdot \sqrt{40} \cdot 0,1 \cdot 17 \cdot (10 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 17) = 154,34 \text{ kN}$$

Como a força solicitante de 57,9 kN é inferior à resistência de cálculo (154,34 kN), portanto a verificação da resistência à punção da aba lateral foi atendida.

Por fim, a última etapa do dimensionamento da aba lateral e a determinação da armadura de suspensão. As Notas do PCA (2013) abordam duas situações distintas para o dimensionamento. A primeira é referente à resistência no estado limite último, que deve atender à Equação [3.108]. Considerando somente o espaçamento entre forças aplicadas  $S = 1,20 \text{ m}$ , obteve-se a seguinte taxa de distribuição da armadura de suspensão:

$$A_{s,sus} \geq \frac{V_d}{f_{yd} \cdot S} = \frac{57,9}{43,48 \cdot 1,20} = 1,11 \text{ cm}^2/\text{m}$$

A segunda situação, apresentada pela Equação [3.109], é referente ao dimensionamento para atender ao estado limite de serviço, principalmente nas situações em que ocorrem um grande número de repetição de cargas acidentais, como em edifícios garagem e pontes por exemplo. Embora o presente estudo de caso não contemple este tipo de situação, o dimensionamento será realizado afim de se obter resultados para comparação com o Método das Bielas. Logo, considerando a força aplicada com valor característico  $V_k = 42,8 \text{ kN}$ , obteve-se a seguinte taxa de distribuição da armadura de suspensão:

$$A_{s,sus} \geq \frac{V_k \cdot s}{0,5 \cdot f_{yk} \cdot (W + 3 \cdot a_v)} = \frac{42,8}{0,5 \cdot 50 \cdot (0,10 + 3 \cdot 0,075)} = 5,26 \text{ cm}^2/\text{m}$$

#### 5.4.1.4 Verificação da Resistência à Punção – Nafadi et al. (2018a)

O dimensionamento da aba lateral proposto por Nafadi et al. (2018a), baseado em ensaios experimentais em escala real, segue basicamente os mesmos princípios do manual de dimensionamento do PCI (2010), todavia, à verificação da capacidade resistente à punção foi reformulada passando a considerar fatores complementares que podem reduzir a resistência obtida utilizando o manual.

A primeira etapa é a definição do fator  $\beta$  que corresponde à relação existente entre as máximas solicitações e as respectivas resistências, tanto para o momento fletor quanto para as

forças cortantes. Segundo Nafadi et al. (2018a), para situações típicas, essas relações provavelmente serão superiores a 0,6, logo o coeficiente  $\beta$  pode ser sempre assumido de modo conservador igual a 1,0.

Como neste estudo de caso não há protensão, não foi computado o fator  $\gamma$  que também promoveria um ganho de resistência na verificação à punção.

Desse modo, a verificação da resistência à punção da aba lateral pode ser feita a partir das Equações [3.114], [3.115], [3.116] e [3.117]. Considerando os parâmetros geométricos:  $d_e = 50,0$  cm;  $b_t = 10,0$  cm;  $h_l = 20,0$  cm e  $L_p = 15,0$  cm. Como  $d_e$  é superior a  $0,5b_t + h_l + L_p = 40,0$  cm, a resistência à punção da aba lateral adotada será o menor valor entre as Equações [3.116] e [3.117].

$$V_n = \phi \cdot 0,083 \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot h_l \cdot (b_t + 2h_l + 2L_p)$$

$$V_n = 0,75 \cdot 0,083 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot (\sqrt{40} \cdot 0,1) \cdot 20 \cdot (10 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 15) = 62,99 \text{ kN}$$

$$V_n = \phi \cdot 0,041 \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot h_l \cdot (0,5b_t + h_l + d_e + s + L_p)$$

$$V_n = 0,75 \cdot 0,041 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot (\sqrt{40} \cdot 0,1) \cdot 20 \cdot (0,5 \cdot 10 + 20 + 50 + 120 + 15) = 81,68 \text{ kN}$$

Como a força solicitante de 57,9 kN é inferior ao menor valor entre as resistências de cálculo obtidas (62,99 kN), portanto a verificação da resistência à punção da aba lateral foi atendida.

## 5.4.2 Dimensionamento da Viga em Elevação

### 5.4.2.1 Modelo de Viga Convencional – ABNT NBR 6118:2014

A primeira etapa do dimensionamento segundo as prescrições da ABNT NBR 6118:2014 para o modelo de viga convencional foi a determinação das armaduras longitudinais de flexão. Como as tensões de tração no concreto, que ocorrem abaixo da linha neutra, devem ser desprezadas no estado limite último, a viga de seção “L” foi dimensionada à flexão desprezando-se a aba lateral, logo as dimensões adotadas foram 15x90 cm. De acordo com as conclusões apresentadas por Pastore (2015), como neste estudo a relação  $h/b = 6$  é superior a 2,5, a análise da viga a flexão segundo os eixos principais de inércia pode ser dispensada.

Do mesmo modo como foi feito no Método das Bielas, adotando-se o centroide da armadura longitudinal no centro do estribo horizontal, a altura útil adotada no cálculo foi  $d = 80,0$  cm. Considerando o máximo momento fletor atuante na viga igual a  $315,7$  kN.m, a posição da linha neutra obtida para a seção foi:

$$x = 1,25 \cdot d \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{M_d}{0,425 \cdot b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}}} \right)$$

$$x = 1,25 \cdot 80 \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{317,5 \cdot 100}{0,425 \cdot 15 \cdot 80^2 \cdot 2,86}} \right) = 14,6 \text{ cm}$$

Conforme os domínios de deformações apresentados pela norma brasileira, o limite para posição da linha neutra para ocorrência do domínio III é de  $0,259 \cdot d = 20,72$  cm, portanto, a seção ainda se encontra no domínio II. Nesta situação, considera-se que o aço tracionado está em regime de escoamento com deformação específica igual a  $10,0$  %. Logo, a resistência adotada para as barras longitudinais foi  $f_{yd} = 43,48$  kN/cm<sup>2</sup>.

Desse modo, a armadura longitudinal obtida foi:

$$A_s = \frac{M_d}{(d - 0,4 \cdot x) \cdot f_{yd}} = \frac{317,5 \cdot 100}{(80 - 0,4 \cdot 14,6) \cdot 43,48} = 9,8 \text{ cm}^2 \rightarrow 8 \text{ } \varnothing 12,5 \text{ mm (9,82 cm}^2\text{)}$$

O cálculo da armadura mínima necessária para seção foi feito com base no item 17.3.5.2.1 da ABNT NBR 6118:2014 que prescreve que a armadura mínima de tração deve ser determinada pelo dimensionamento da seção a um momento fletor mínimo dado pela seguinte expressão:

$$M_{d,\min} = 0,8 \cdot W_o \cdot f_{ctk,\text{sup}}$$

Em que:

$W_o$ : módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto (fibra mais tracionada)

$f_{ctk,\text{sup}}$ : resistência característica superior a tração do concreto

Sendo:

$$W_o = \frac{b_w \cdot h^2}{6} = \frac{15 \cdot 90^2}{6} = 20250 \text{ cm}^3$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} = 1,3 \cdot 0,3 \cdot 40^{2/3} = 4,56 \text{ MPa} = 0,456 \text{ kN/cm}^2$$

O momento fletor mínimo obtido foi:

$$M_{d,min} = 0,8 \cdot 20250 \cdot 0,456 = 7387,2 \text{ kN.cm}$$

Dimensionando a seção ao momento fletor mínimo, foi obtido o seguinte valor para a posição da linha neutra:

$$x = 1,25 \cdot 80 \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{7387,2}{0,425 \cdot 15 \cdot 80^2 \cdot 2,86}} \right) = 3,22 \text{ cm}$$

Como a seção se encontra no domínio II, as barras longitudinais estão em regime de escoamento, logo a resistência à tração adotada foi  $f_{yd} = 43,48 \text{ kN/cm}^2$ . Sendo assim, obteve-se o seguinte valor para a armadura mínima necessária:

$$A_{s,min} = \frac{M_d}{(d - 0,4 \cdot x) \cdot f_{yd}} = \frac{7387,2}{(80 - 0,4 \cdot 3,22) \cdot 43,48} = 2,16 \text{ cm}^2$$

A norma ainda prevê que seja respeitada uma armadura mínima absoluta que corresponde a:

$$A_{s,min} = \frac{0,15}{100} \cdot A_c = \frac{0,15}{100} \cdot (15 \cdot 90) = 2,02 \text{ cm}^2$$

Como a armadura obtida para o momento fletor solicitante foi superior à armadura mínima necessária, foi adotado para flexão 8 Ø 12,5 mm (9,82 cm<sup>2</sup>).

A segunda etapa compreende o dimensionamento da seção à força cortante. Optou-se por escolher o Modelo de cálculo I para que o ângulo de inclinação das diagonais comprimidas a ser utilizado posteriormente no dimensionamento a torção (45°) ficasse o mais próximo possível do ângulo de inclinação obtido pela abordagem proposta por Marti (1985) igual a 45,27°.

Embora a ABNT NBR 6118:2014 permita reduzir a força cortante de cálculo na região próxima aos apoios, neste estudo de caso foi utilizada a máxima força cortante obtida na seção afim de tornar possível a comparação dos resultados entre os métodos sob as mesmas condições

de esforços solicitantes, uma vez que cada método apresenta uma distância diferente dos apoios para consideração dos esforços solicitantes.

O primeiro passo para o dimensionamento é a verificação da força resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto, conforme a Equação [3.44]. Considerando os seguintes parâmetros:  $\alpha_{v2} = (1 - f_{ck}/250) = (1 - 40/250) = 0,84$ ,  $b_w = 15,0$  cm,  $d = 80,0$  cm e  $f_{cd} = 2,86$  kN/cm<sup>2</sup>. A resistência de cálculo obtida foi:

$$V_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d$$

$$V_{Rd2} = 0,27 \cdot 0,84 \cdot 2,86 \cdot 15 \cdot 80 = 778,4 \text{ kN}$$

Como a força solicitante de 194,6 kN é inferior ao valor de resistências de cálculo obtida (778,4 kN), portanto a verificação relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto foi atendida.

O segundo passo do dimensionamento da seção à força cortante é a determinação da armadura transversal. Conforme a Equação [3.45], a força resistente de cálculo relativa à ruína por tração diagonal ( $V_{Rd3}$ ), que é composta pela soma das parcelas  $V_c$  e  $V_{sw}$ , deve ser, pelo menos, igual à força cortante solicitante de cálculo ( $V_{sd}$ ). Como neste estudo a viga está sujeita à flexão simples com a linha neutra cortando a seção transversal, a parcela relativa a  $V_c$  foi obtida igualando  $V_c$  com  $V_{c0}$ . Logo, considerando a resistência a tração de cálculo do concreto  $f_{ctd} = 0,15 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0,15 \cdot 40^{2/3} = 1,75$  MPa (0,175 kN/cm<sup>2</sup>), obteve-se o seguinte resultado para parcela  $V_c$ :

$$V_c = V_{c0} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d$$

$$V_c = 0,6 \cdot 0,175 \cdot 15 \cdot 80 = 126,3 \text{ kN}$$

A parcela de força a ser resistida pela armadura transversal ( $V_{sw}$ ) é obtida pela diferença entre a força solicitante ( $V_{sd}$ ) e a parcela  $V_c$ , resultado em um valor igual a:

$$V_{sw} = 194,6 - 126,3 = 68,3 \text{ kN}$$

Adotando-se estribos verticais com ângulo de inclinação igual a 90° em relação a armadura longitudinal da viga, e considerado a tensão no aço igual a 43,48 kN/cm<sup>2</sup>, a armadura transversal necessária obtida para os dois ramos foi:

$$A_{v,90} = \frac{V_{sw} \cdot s}{0,9 \cdot d \cdot f_{ywd}} = \frac{68,3 \cdot 100}{0,9 \cdot 80 \cdot 43,48} = 2,18 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Por fim, a norma brasileira prevê que a viga deve conter uma armadura transversal mínima constituída por estribos, com a seguinte taxa geométrica:

$$\frac{(A_{v,\alpha})_{\text{mín}}}{s} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \cdot b_w \cdot \text{sen } \alpha$$

Considerando os seguintes valores para  $f_{ctm}$  e  $f_{ywk}$ :

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0,3 \cdot 40^{2/3} = 3,51 \text{ MPa (0,351 kN/cm}^2\text{)}$$

$$f_{ywk} = 500 \text{ MPa (50 kN/cm}^2\text{)}$$

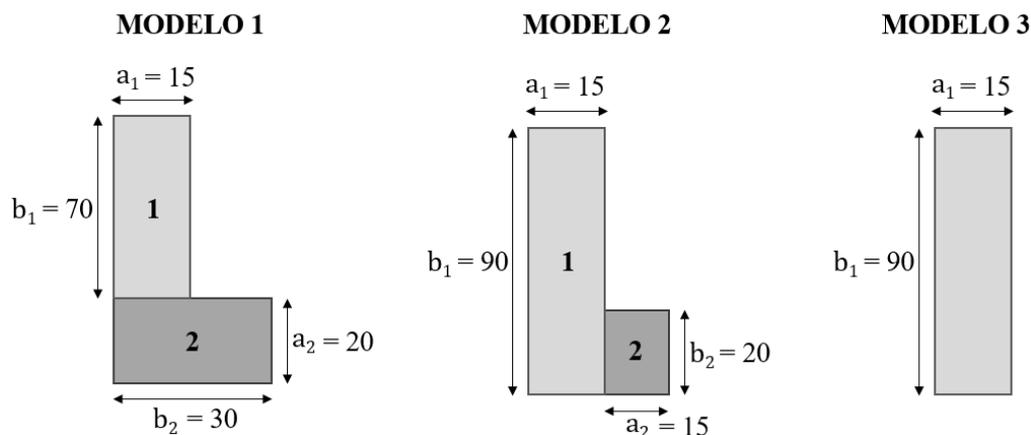
A taxa mínima obtida foi:

$$(A_{v,90})_{\text{mín}} \geq 0,2 \cdot \frac{0,351}{50} \cdot 15 \cdot \text{sen } 90^\circ \cdot 100 = 2,11 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Como a armadura transversal obtida para a máxima força cortante foi superior à armadura mínima necessária, foi adotado a taxa de 2,18 cm<sup>2</sup>/m.

A terceira etapa compreende o dimensionamento da seção à torção. Como neste estudo trata-se de uma viga de seção “L”, optou-se por fazer o cálculo considerando que a seção transversal seja composta por retângulos, em conformidade com o item 17.5.1.4.2 da ABNT NBR 6118:2014. Sendo assim, o momento torsor solicitante total foi distribuído entre os retângulos conforme a rigidez elástica linear de cada retângulo (Equação [3.68]), de modo que, cada retângulo foi verificado isoladamente com a mesma seção vazada equivalente utilizada para calcular as seções poligonais cheias convexas. Para fins de comparação também foi analisado um modelo hipotético simplificado considerando que somente a alma da seção irá resistir à torção.

A Figura 5.24 apresenta dois modelos diferentes para divisão dos retângulos e um terceiro modelo onde foi considerado somente a alma da seção (dimensões em cm).

**Figura 5.24 – Modelos adotados para o dimensionamento à torção**

Fonte: Autor (2020)

Por questão de brevidade, o equacionamento será demonstrado somente para o Retângulo 1 do Modelo 1, todavia, os resultados sempre serão apresentados para todos os retângulos dos Modelos 1 e 2 e para o Modelo 3, para que se seja possível comparar as diferenças obtidas entre cada um.

A distribuição do momento torsor solicitante  $T_{sd,i}$ , referente aos Retângulos 1 e 2, para o Modelo 1, será:

$$T_{sd1,1} = T_{sd} \cdot \frac{a_1^3 \cdot b_1}{(a_1^3 \cdot b_1) + (a_2^3 \cdot b_2)} = 26,04 \cdot \frac{15^3 \cdot 70}{(15^3 \cdot 70) + (20^3 \cdot 30)} = 12,92 \text{ kN.m}$$

$$T_{sd1,2} = T_{sd} \cdot \frac{a_2^3 \cdot b_2}{(a_1^3 \cdot b_1) + (a_2^3 \cdot b_2)} = 26,04 \cdot \frac{20^3 \cdot 30}{(15^3 \cdot 70) + (20^3 \cdot 30)} = 13,12 \text{ kN.m}$$

Para o Modelo 2, a distribuição será:

$$T_{sd2,1} = T_{sd} \cdot \frac{a_1^3 \cdot b_1}{(a_1^3 \cdot b_1) + (a_2^3 \cdot b_2)} = 26,04 \cdot \frac{15^3 \cdot 90}{(15^3 \cdot 90) + (15^3 \cdot 20)} = 21,30 \text{ kN.m}$$

$$T_{sd2,2} = T_{sd} \cdot \frac{a_2^3 \cdot b_2}{(a_1^3 \cdot b_1) + (a_2^3 \cdot b_2)} = 26,04 \cdot \frac{15^3 \cdot 20}{(15^3 \cdot 90) + (15^3 \cdot 20)} = 4,74 \text{ kN.m}$$

Após realizar a distribuição dos momentos torsores, inicia-se as verificações das resistências isoladamente para cada retângulo. Percebe-se que a soma dos momentos torsores dos retângulos sempre deve corresponder ao momento torsor total solicitante ( $12,92 + 13,12 = 26,04 \text{ kN.m}$  e  $21,30 + 4,74 = 26,04 \text{ kN.m}$ ), ou seja, a rigidez elástica linear de cada retângulo é responsável por ponderar as parcelas absorvidas da solicitação total.

A primeira verificação a ser realizada é referente ao limite dado pela resistência das diagonais comprimidas de concreto ( $T_{Rd2}$ ), obtida pela Equação [3.71]. Para tal verificação, é necessário definir os parâmetros geométricos  $h_e$  que corresponde a espessura equivalente da parede de seção vazada e  $A_e$  que corresponde a área delimitada pela linha média da parede da seção vazada, incluindo a parte vazada;

Conforme a Equação [3.66] e adotando-se os seguintes parâmetros geométricos para o Retângulo 1 do Modelo 1:  $c_1 = 4,0$  cm;  $A = 1050,0$  cm<sup>2</sup>;  $u = 170$  cm. A espessura da parede equivalente é obtida foi :

$$2.4 \leq h_{e1,1} \leq \frac{1050}{170}$$

$$8 \leq h_{e1,1} \leq 6,18$$

Como  $2 \cdot c_1 = 8,00$  cm é superior a  $A/u = 6,2$  cm, adota-se para o valor de  $h_{e1,1}$ :

$$h_{e1,1} = A/u \leq b_w - 2 \cdot c_1$$

$$h_{e1,1} = 1050/170 \leq 15 - 2 \cdot 4 = 6,18 \text{ cm}$$

Adotando o mesmo procedimento para os outros retângulos e para o Modelo 3 obteve-se as seguintes espessuras:

$$h_{e1,2} = 6,00 \text{ cm}$$

$$h_{e2,1} = 6,42 \text{ cm}$$

$$h_{e2,2} = 4,30 \text{ cm}$$

$$h_{e3} = 6,42 \text{ cm}$$

De posse das espessuras equivalentes dos retângulos, foi possível obter as áreas delimitadas pela linha média da parede da seção vazada, incluindo a parte vazada:

$$A_{e1,1} = (a_{1,1} - h_{e1,1}) \cdot (b_{1,1} - h_{e1,1})$$

$$A_{e1,1} = (15 - 6,18) \cdot (70 - 6,18) = 563,15 \text{ cm}^2$$

Adotando o mesmo procedimento para os outros retângulos obteve-se as seguintes áreas:

$$A_{e_{1,2}} = 336,00 \text{ cm}^2$$

$$A_{e_{2,1}} = 716,33 \text{ cm}^2$$

$$A_{e_{2,2}} = 336,00 \text{ cm}^2$$

$$A_{e_3} = 716,33 \text{ cm}^2$$

Considerando o ângulo de inclinação das diagonais comprimidas igual a  $45^\circ$  e adotando os parâmetros de resistência  $\alpha_{v2} = (1 - f_{ck}/250) = (1 - 40/250) = 0,84$  e  $f_{cd} = 2,86 \text{ kN/cm}^2$ , obteve-se os seguintes limites de resistência para diagonais comprimidas de concreto ( $T_{Rd2}$ ):

$$T_{Rd2_{1,1}} = 0,50 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot A_e \cdot h_e \cdot \text{sen } 2\theta$$

$$T_{Rd2_{1,1}} = 0,50 \cdot 0,84 \cdot 2,86 \cdot 563,15 \cdot 6,18 \cdot \text{sen}(2 \cdot 45)/100 = 41,8 \text{ kN.m} > 12,92 \text{ kN.m} \therefore \text{OK!}$$

Adotando o mesmo procedimento para os outros retângulos obteve-se as seguintes resistências:

$$T_{Rd2_{1,2}} = 24,2 \text{ kN.m} > 13,12 \text{ kN.m} \therefore \text{OK!}$$

$$T_{Rd2_{2,1}} = 55,2 \text{ kN.m} > 21,30 \text{ kN.m} \therefore \text{OK!}$$

$$T_{Rd2_{2,2}} = 8,6 \text{ kN.m} > 4,74 \text{ kN.m} \therefore \text{OK!}$$

$$T_{Rd2_3} = 55,2 \text{ kN.m} > 26,04 \text{ kN.m} \therefore \text{OK!}$$

Como as parcelas dos momentos torsores solicitantes foram inferiores aos valores das resistências em todos os retângulos, portanto a verificação relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto para torção foi atendida em ambos os modelos.

Conforme as prescrições do item 17.7.2 da ABNT NBR 6118:2014, quando há a combinação de forças cortantes com a torção, a norma prevê que a resistência das diagonais comprimidas de concreto seja verificada de maneira combinada, devendo satisfazer à seguinte expressão:

$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{sd}}{T_{Rd2}} \leq 1$$

Considerando que a seção transversal foi calculada por retângulos, a verificação combinada da resistência das diagonais comprimidas foi feita da seguinte forma:

Modelo 1:

$$\frac{196,4}{778,4} + \frac{12,92}{41,8} \leq 1 \rightarrow 0,561 \leq 1 \therefore \text{OK!}$$

$$\frac{196,4}{778,4} + \frac{13,12}{24,2} \leq 1 \rightarrow 0,794 \leq 1 \therefore \text{OK!}$$

Modelo 2:

$$\frac{196,4}{778,4} + \frac{21,30}{55,2} \leq 1 \rightarrow 0,638 \leq 1 \therefore \text{OK!}$$

$$\frac{196,4}{778,4} + \frac{4,74}{8,6} \leq 1 \rightarrow 0,768 \leq 1 \therefore \text{OK!}$$

Modelo 3:

$$\frac{196,4}{778,4} + \left( \frac{26,04}{55,2} \right) \leq 1 \rightarrow 0,724 \leq 1 \therefore \text{OK!}$$

O próximo passo é o dimensionamento da armadura transversal. A área de aço de um ramo do estribo, para cada retângulo, foi obtida pela Equação [3.75]. Considerando a tensão na armadura transversal limitada ao valor de 43,48 kN/cm<sup>2</sup>, obteve-se a seguinte taxa para o Retângulo 1 do Modelo 1:

$$\left( \frac{A_t}{s} \right) = \frac{T_{sd}}{f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot \cotg \theta}$$

$$A_{t1,1} = \frac{12,92 \cdot 100}{43,48 \cdot 2 \cdot 563,15 \cdot \cotg 45} \cdot 100 = 2,64 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Adotando o mesmo procedimento para os outros retângulos e para o Modelo 3, obteve-se as seguintes taxas de armadura transversal:

$$A_{t1,2} = 4,49 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{t2,1} = 3,42 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{t2,2} = 3,24 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{t3} = 4,18 \text{ cm}^2/\text{m}$$

De modo análogo às forças cortantes, a norma brasileira prevê que a viga deve conter uma armadura transversal mínima, com a seguinte taxa geométrica:

$$\rho_{sw} = \frac{A_{t,90,mín}}{b_w \cdot s} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}}$$

Para o Retângulo 1 do Modelo 1, considerando os seguintes valores para  $f_{ctm}$  e  $f_{ywk}$ :

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0,3 \cdot 40^{2/3} = 3,51 \text{ MPa (0,351 kN/cm}^2\text{)}$$

$$f_{ywk} = 500 \text{ MPa (50 kN/cm}^2\text{)}$$

A taxa mínima obtida foi:

$$A_{t,mín_{1,1}} = 0,2 \cdot \frac{0,351}{50} \cdot 15 \cdot 100 = 2,11 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Adotando o mesmo procedimento para os outros retângulos e para o Modelo 3, obteve-se as seguintes taxas mínima para armadura transversal:

$$A_{t,mín_{1,2}} = 2,81 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{t,mín_{2,1}} = 2,11 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{t,mín_{2,2}} = 2,11 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{t,mín_3} = 2,11 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Como as armaduras transversais obtidas para o máximo momento torsor foram superiores à armadura mínima necessária em todos os retângulos e no Modelo 3, não houve a necessidade de adotar a armadura mínima. Desse modo, distribuindo a armadura transversal de maneira uniforme para os estribos verticais, de maneira análoga às outras metodologias, obteve-se os seguintes resultados para os Modelos 1, 2 e 3:

Modelo 1:

$$A_{t_1} = A_{t_{1,1}} + A_{t_{1,2}} = 2,64 + 4,49 = 7,13 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Modelo 2:

$$A_{t_2} = A_{t_{2,1}} + A_{t_{2,2}} = 3,42 + 3,24 = 6,66 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Modelo 3:

$$A_{t_3} = 4,18 \text{ cm}^2/\text{m}$$

O item 17.7.2.3 da ANBT NBR 6118:2014 prevê que a armadura transversal total seja calculada pela soma das armaduras obtidas para força cortante e para torção. Como a parcela da força cortante foi calculada para os dois ramos do estribo e a parcela da torção somente para um ramo, a armadura final será obtida somando-se a armadura calculada para torção com metade da armadura calculada para força cortante. Sendo assim, o resultado final obtido para um ramo dos estribos foi:

Modelo 1:

$$A_{v,90} + A_{t_1} = \frac{2,18}{2} + 7,13 = 8,22 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Modelo 2:

$$A_{v,90} + A_{t_2} = \frac{2,18}{2} + 6,66 = 7,75 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Modelo 3:

$$A_{v,90} + A_{t_3} = \frac{2,18}{2} + 4,18 = 5,27 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Por fim a última etapa do dimensionamento à torção é a determinação da armadura longitudinal, sendo a área de aço total obtida pela Equação [3.75]. Dentre os parâmetros geométricos necessários para o dimensionamento está o perímetro da área  $A_e$ , que ainda não foi calculado. Para o Retângulo 1 do Modelo 1 o perímetro  $u_e$  obtido foi:

$$u_{e1,1} = 2.(a_{1,1} - h_{e1,1}) + 2.(b_{1,1} - h_{e1,1})$$

$$u_{e1,1} = 2.(15 - 6,18) + 2.(70 - 6,18) = 145,28 \text{ cm}^2$$

Logo, conforme a Equação [3.78], a armadura longitudinal obtida para o retângulo foi:

$$A_{sl1,1} = \frac{T_{sd} \cdot u_e}{f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot \text{tg } \theta}$$

$$A_{sl1,1} = \frac{(12,92 \cdot 100) \cdot 145,28}{43,48 \cdot 2 \cdot 563,15 \cdot \text{tg } 45} = 3,83 \text{ cm}^2$$

Adotando o mesmo procedimento para os outros retângulos e para o Modelo 3, obteve-se os seguintes resultados:

$$A_{sl_{1,2}} = 3,41 \text{ cm}^2$$

$$A_{sl_{2,1}} = 6,30 \text{ cm}^2$$

$$A_{sl_{2,2}} = 1,71 \text{ cm}^2$$

$$A_{sl_3} = 7,70 \text{ cm}^2$$

Para as armaduras longitudinais também deve-se respeitar uma quantidade de armadura mínima necessária, dada pela seguinte equação:

$$\frac{A_{sl,mín}}{h_e \cdot u_e} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}}$$

Para o Retângulo 1 do Modelo 1, a armadura longitudinal mínima obtida foi:

$$A_{sl,mín_{1,1}} = 0,2 \cdot \frac{0,351}{50} \cdot 6,18 \cdot 145,28 = 1,26 \text{ cm}^2$$

Adotando o mesmo procedimento para os outros retângulos e para o Modelo 3, foram obtidos os seguintes resultados para a armadura longitudinal mínima:

$$A_{sl,mín_{1,2}} = 0,64 \text{ cm}^2$$

$$A_{sl,mín_{2,1}} = 1,66 \text{ cm}^2$$

$$A_{sl,mín_{2,2}} = 0,30 \text{ cm}^2$$

$$A_{sl,mín_3} = 1,66 \text{ cm}^2$$

Como as armaduras longitudinais obtidas para o máximo momento torsor foram superiores à armadura mínima necessária em todos os retângulos e no Modelo 3, não houve a necessidade de adotar a armadura mínima na seção calculada. Desse modo, a armadura longitudinal total adotada para cada modelo foi:

Modelo 1:

$$A_{sl_1} = 3,83 + 3,41 = 7,24 \text{ cm}^2$$

Modelo 2:

$$A_{sl_2} = 6,30 + 1,71 = 8,01 \text{ cm}^2$$

Modelo 3:

$$A_{sl_3} = 7,70 \text{ cm}^2$$

#### 5.4.2.2 “Compression Field Theory” – Collins e Mitchell (1980)

A primeira etapa do dimensionamento a força cortante e torção pelo método analítico proposto por Collins e Mitchell (1980) é a determinação dos esforços que provocam a fissuração na peça de maneira combinada, conforme a Equação [3.2]. Esses valores servirão de base para determinação do atendimento ou não da armadura mínima necessária na seção.

Desconsiderando os efeitos da protensão na peça e adotando os seguintes parâmetros geométricos:  $A_c = 1650,0 \text{ cm}^2$ ;  $p_c = 240,0 \text{ cm}^2$ ;  $b_w = 15,0 \text{ cm}$ ;  $d = 80,0 \text{ cm}$ ;  $I = 1,22 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$ ;  $y_t = 38,64 \text{ cm}$ . Foram obtidos os seguintes esforços de fissuração isolados para torção, força cortante e momento fletor:

$$T_{ocr} = \frac{A_c^2}{p_c} \cdot 0,33 \cdot \sqrt{f_{ck}}$$

$$T_{ocr} = \frac{1650^2}{240} \cdot 0,33 \cdot (\sqrt{40} \cdot 0,1) = 2367 \text{ kN.cm} = 23,67 \text{ kN.m}$$

$$V_{ocr} = b_w \cdot d \cdot 0,33 \cdot \sqrt{f_{ck}}$$

$$V_{ocr} = 15 \cdot 80 \cdot 0,33 \cdot (\sqrt{40} \cdot 0,1) = 250,04 \text{ kN}$$

$$M_{ocr} = \frac{I}{y_t} (0,6 \cdot \sqrt{f_{ck}})$$

$$M_{ocr} = \frac{1,22 \cdot 10^6}{38,64} (0,6 \cdot \sqrt{40} \cdot 0,1) = 11981 \text{ kN.cm} = 119,81 \text{ kN.m}$$

Resolvendo a Equação [3.2] de maneira analítica, por meio das simplificações apresentadas no item 3.2.1.2, obteve-se os seguintes resultados para os esforços de fissuração combinados:

$$T_{cr} = 9,88 \text{ kN.m}$$

$$V_{cr} = 73,85 \text{ kN.m}$$

$$M_{cr} = 119,81 \text{ kN.m}$$

Como os esforços solicitantes máximos são superiores a 1,2 vezes os esforços que provocam a fissuração na peça de forma combinada, considera-se que a armadura mínima está verificada.

A próxima etapa do dimensionamento é a verificação do esmagamento do concreto próximo aos apoios, de maneira a validar as dimensões da seção transversal adotada. Para tal verificação, deverá ser escolhido um ângulo para a inclinação das diagonais comprimidas que esteja entre dois limites que levam em consideração uma envoltória das resistências ao cisalhamento por forças cortantes e por torção combinadas dada pela Expressão [3.6].

Considerando os seguintes parâmetros geométricos:

$$b_v = b_w - 2.c - \emptyset_{est} = 15 - 2.2,5 - 1,00 = 9,00 \text{ cm}$$

$$d_v = h - 2.c - \emptyset_{long} = 90 - 2.2,5 - 1,25 = 83,5 \text{ cm}$$

$$p_h = 2.(h - 2.c - \emptyset_{est}) + 2.(2.b_w - 2.c - \emptyset_{est})$$

$$p_h = 2.(90 - 2.2,5 - 1) + 2.(2.15 - 2.2,5 - 1) = 216,0 \text{ cm}$$

$$A_{oh} = [(h - 2.c - \emptyset_{est}).b_v] + b_w . (h_{aba} - 2.c - \emptyset_{est})$$

$$A_{oh} = [(90 - 2.2,5 - 1).9] + 15.(20 - 2.2,5 - 1) = 966,0 \text{ cm}^2$$

A tensão de cisalhamento de cálculo ( $\tau_n$ ) obtida foi:

$$\tau_n = \frac{V_n}{b_v \cdot d_v} + \frac{T_n \cdot p_h}{A_{oh}^2} = \frac{(V_{sd}/0,85)}{b_v \cdot d_v} + \frac{(T_{sd}/0,85) \cdot p_h}{A_{oh}^2}$$

$$\tau_n = \frac{(194,6/0,85)}{9 \cdot 83,5} + \frac{(26,04 \cdot 100/0,85) \cdot 216}{966^2} = 1,01 \text{ kN/cm}^2$$

Considerando a deformação máxima por tração da armadura longitudinal  $\epsilon_l = 10,0 \text{ ‰}$ , os limites obtidos para o ângulo de inclinação das diagonais comprimidas foi:

$$10 + 35 \frac{\tau_n/f_{ck}}{(0,42 - 50 \cdot \epsilon_l)} < \theta < 80 - 35 \frac{\tau_n/f_{ck}}{(0,42 - 50 \cdot \epsilon_l)}$$

$$10 + 35 \frac{1,01/4,00}{(0,42 - 50 \cdot 0,001)} < \theta < 80 - 35 \frac{1,01/4,00}{(0,42 - 50 \cdot 0,001)}$$

$$34^\circ < \theta < 55^\circ$$

Como os limites encontrados são válidos, considera-se que a seção transversal é adequada aos esforços solicitantes.

A próxima etapa compreende as verificações referentes ao controle das fissuras diagonais. Neste estudo este requisito foi atendido pois está sendo respeitado simultaneamente os seguintes critérios:

- As deformações na armadura transversal sob à ação dos esforços solicitantes em serviço não excedem 0,001;
- O espaçamento da armadura transversal não será superior a 30,0 cm;
- O espaçamento entre as barras longitudinais nas faces fissuradas do elemento não será superior a 30,0 cm.

O dimensionamento da armadura transversal é feito considerando uma combinação entre as armaduras para forças cortantes e para torção. Como pretende-se comparar os resultados obtidos entre os métodos, o dimensionamento será realizado para os máximos esforços solicitantes, logo, não serão consideradas as distâncias em relação aos apoios para obtenção destes esforços.

O cálculo é iniciado pela armadura transversal para resistir ao cisalhamento por torção, sendo adotados estribos fechados no dimensionamento. Atendendo aos limites calculados anteriormente, o ângulo de inclinação adotando para as diagonais comprimidas foi igual a 45°, logo, o parâmetro  $a_o$  pôde ser obtido por meio da seguinte expressão:

$$a_o = \frac{A_{oh}}{p_h} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{T_n \cdot p_h}{0,85 \cdot f_{ck} \cdot A_{oh}^2} \left( \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right)} \right]$$

$$a_o = \frac{966}{216} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{(30,63 \cdot 100) \cdot 216}{0,85 \cdot 4 \cdot 966^2} \left( \tan 45 + \frac{1}{\tan 45} \right)} \right] = 1,06 \text{ cm}$$

Após a determinação do parâmetro  $a_o$ , foi possível determinar a área interna ao caminho do fluxo de cisalhamento por torção:

$$A_o = A_{oh} - \frac{a_o}{2} \cdot p_h \quad [5.1]$$

$$A_o = 966 - \frac{1,06}{2} \cdot 216 = 851,75 \text{ cm}^2$$

Obtidos os parâmetros geométricos necessários, o dimensionamento da armadura transversal ao cisalhamento por torção, para 1 ramo do estribo, foi feito pela seguinte expressão:

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_n \cdot \tan \theta}{2 \cdot A_o \cdot f_{yd}}$$

$$A_t = \frac{(30,63 \cdot 100) \cdot \tan 45 \cdot 100}{2 \cdot 870,96 \cdot 43,48} = 4,14 \text{ cm}^2/\text{m}$$

O dimensionamento da armadura transversal ao cisalhamento por forças cortantes, para os dois ramos do estribo, foi feito pela seguinte expressão:

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_n \cdot \tan \theta}{d_v \cdot f_{yd}}$$

$$A_v = \frac{228,94 \cdot \tan 45 \cdot 100}{83,5 \cdot 43,48} = 6,31 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Como a parcela da torção foi calculado para um ramo e a parcela da força cortante foi os dois ramos do estribo, a armadura final será obtida somando-se a armadura calculada para torção com metade da armadura calculada para força cortante. Sendo assim, o resultado final obtido para um ramo dos estribos foi:

$$A_{v+t} = 4,14 + \frac{6,31}{2} = 7,29 \text{ cm}^2/\text{m}$$

A próxima etapa é a determinação da armadura longitudinal destinada às tensões de cisalhamento, que segundo Collins e Mitchell (1980), deverá levar em conta a combinação entre as forças cortantes e a torção. A força axial provocada pelas tensões de cisalhamento foi obtida pela Equação [3.13]. Considerando o perímetro do caminho do fluxo de cisalhamento por torção  $p_o$  igual a:

$$p_o = p_h - 4 \cdot a_o = 216 - 4 \cdot 1,06 = 211,8 \text{ cm}$$

A força axial provocada pelas tensões de cisalhamento ( $\Delta N_u$ ) obtida foi:

$$\Delta N_u = \frac{1}{\tan \theta} \sqrt{V_{sd}^2 + \left( \frac{T_{sd} \cdot p_o}{2 \cdot A_o} \right)^2}$$

$$\Delta N_u = \frac{1}{\tan 45} \sqrt{194,6^2 + \left( \frac{26,04 \cdot 100 \cdot 211,8}{2 \cdot 851,75} \right)^2} = 377,7 \text{ kN}$$

Portanto a armadura longitudinal necessária para resistir a força axial provocada pelas tensões de cisalhamento foi:

$$A_{sl} = \frac{\Delta N_u}{f_{yd}} = \frac{377,7}{43,48} = 8,69 \text{ cm}^2$$

Além dimensionamento ao cisalhamento por forças cortantes e torção combinadas, Collins e Mitchell (1980) também apresentam procedimentos de cálculo para o dimensionamento da aba lateral. A primeira armadura a ser dimensionada é a armadura longitudinal posicionada nos cantos dos estribos horizontais da aba lateral. O diâmetro necessário para essa armadura é dado pela seguinte expressão:

$$\phi_{aba} = s \cdot \frac{\tan \theta}{16}$$

Afim de se fazer uma estimativa, adotando barras de 10,0 mm para os estribos verticais, o espaçamento necessário para este exemplo seria  $\phi 10 \text{ c}/10 \text{ cm}$  ( $7,85 \text{ cm}^2/\text{m}$ ), logo, o diâmetro necessário para as barras longitudinais na aba lateral seria:

$$\phi_{aba} = 10 \cdot \frac{\tan 45}{16} = 0,625 \text{ cm} \therefore 6,3 \text{ mm}$$

A próxima etapa é a verificação do esmagamento da escora de concreto na aba lateral. Assume-se que as forças aplicadas pela laje na aba lateral se encaminharão para alma da seção através de um escora de concreto comprimida com um ângulo  $\theta_{aba}$ , em relação ao ramo inferior do estribo horizontal, definido por:

$$\theta_{aba} = \tan^{-1} \left( \frac{h_e}{e_c} \right)$$

Considerando a altura entre ramos do estribo horizontal  $h_e = 14,0$  cm e a excentricidade do ponto de aplicação da carga ao centro da alma da viga  $e_c = 15,0$  cm, o ângulo obtido foi:

$$\theta_{aba} = \tan^{-1} \left( \frac{14}{15} \right) = 43,02^\circ$$

A verificação da capacidade resistente da escora comprimida foi feita conforme a Equação [3.19], considerando os parâmetros geométricos  $b_v = 10,0$  cm e  $d_{ve} = 10,0$  cm, ilustrados na Figura 3.10.

$$\frac{V_{sd}}{0,85 \cdot b_v \cdot d_{ve}} \leq 0,012 (\theta_{aba} - 10) f_{ck}$$

$$\frac{57,09}{0,85 \cdot 10 \cdot 10} \leq 0,012 (43,02 - 10) \cdot 4$$

$$0,671 \leq 1,584 \therefore \text{OK!}$$

A próxima etapa é a determinação do conjunto de armaduras necessárias para equilibrar a aba lateral, composta pela armadura horizontal (estribos horizontais) que conectam a aba lateral na alma da seção e a armadura vertical (estribos verticais) responsáveis por suspender as cargas aplicadas na parte inferior da viga.

O dimensionamento da armadura horizontal foi feito através da Equação [3.20]. Considerando a distância do ramo superior da armadura horizontal à base da seção  $d_{est} = 3,0$  cm, obteve-se a seguinte armadura:

$$A_{s,tir} = \frac{F_d \cdot \left( \frac{e_c}{0,9 \cdot (h_e + d_{est})} \right)}{f_{yd}}$$

$$A_{s,tir} = \frac{57,09}{0,9} \cdot \left( \frac{15}{0,9 \cdot (14 + 3)} \right) = 1,43 \text{ cm}^2$$

O dimensionamento da armadura de suspensão foi feito através da Equação [3.21]. Segundo Collins e Mitchell (1980) o posicionamento da armadura de suspensão é complementar, ou seja, deve ser adicionado à armadura transversal para força cortante e torção calculada anteriormente.

$$A_{s,susp} = \frac{F_d \cdot \left(\frac{h - h_{ab}}{h}\right)}{f_{yd}} \quad [5.2]$$

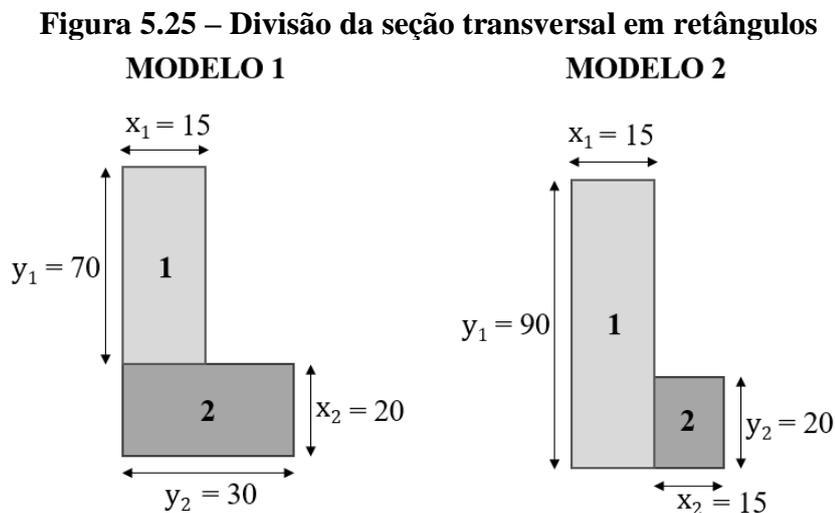
$$A_{s,susp} = \frac{57,09 \cdot \left(\frac{90-20}{90}\right)}{43,48} = 1,13 \text{ cm}^2 \quad [5.3]$$

Nesta hipótese de cálculo, os autores consideram que a força é suspensa pelos dois ramos do estribo vertical, ou seja, para o detalhamento da final da armadura deve-se dividir a área de aço pela metade para dimensionar cada ramo.

Vale salientar que, diferente dos outros métodos apresentados, a distribuição tanto da armadura horizontal como da armadura vertical é concentrada nos pontos de aplicação das forças, não havendo um comprimento de propagação das forças.

#### 5.4.2.3 Resultados Experimentais – Zia e Hsu (2004)

A primeira etapa do dimensionamento ao cisalhamento por forças cortante e torção através do método analítico proposto por Zia e Hsu (2004) é a determinação do parâmetro  $C_t$ , conforme a Equação [3.24]. Este parâmetro depende exclusivamente das propriedades geométricas da seção, sendo calculado através da divisão da seção transversal em retângulos, de maneira análoga ao procedimento recomendado pela ABNT NBR 6118:2014. A Figura 5.25 apresenta a divisão da seção transversal em retângulos em que  $x$  e  $y$  é a menor e maior dimensão de cada retângulo respectivamente.



Fonte: Autor (2020)

O método analítico proposto por Zia e Hsu (2004), diferente da norma brasileira, prevê que o modelo de divisão da seção em retângulos a ser adotado deve ser aquele que obtiver o máximo valor para propriedade torsional da seção  $\sum(x^2 \cdot y)$ , logo, a divisão dos retângulos não fica a critério do projetista. Para o estudo em questão, os valores para propriedade torsional obtidos foram:

Modelo 1:

$$\sum(x^2 \cdot y) = 15^2 \cdot 70 + 20^2 \cdot 30 = 27750 \text{ cm}^3$$

Modelo 2:

$$\sum(x^2 \cdot y) = 15^2 \cdot 90 + 15^2 \cdot 20 = 24750 \text{ cm}^3$$

Como a propriedade torsional do Modelo 1 foi a máxima encontrada, todo o procedimento de cálculo será realizado somente para o referido modelo. Considerando os parâmetros geométricos  $b_w = 15,0 \text{ cm}$  e  $d = 80,0 \text{ cm}$ , o parâmetro  $C_t$  obtido para o Modelo 1 foi:

$$C_t = \frac{b_w \cdot d}{\sum(x^2 \cdot y)} = \frac{15 \cdot 80}{27750} = 0,0432 / \text{cm}$$

A etapa seguinte compreende a verificação do mínimo e do máximo momento torsor permitido para viga, conforme as Equações [3.25] e [3.26]. Caso o momento torsor solicitante seja menor que o mínimo calculado, o dimensionamento à torção pode ser desconsiderado, adotando-se somente uma quantidade mínima de armadura. Caso o momento torsor solicitante seja superior ao máximo permitido, será necessário redimensionar a peça.

Desconsiderando a tensão média de compressão devido aos efeitos da protensão, obteve-se o seguinte fator de cálculo  $\gamma$ :

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{10 \cdot \sigma}{f_{ck}}} = \sqrt{1 + \frac{10 \cdot 0}{40}} = 1,00$$

Logo, o valor obtido para o momento torsor mínimo o qual a viga não necessita ser dimensionada a torção foi:

$$T_{\min} = \emptyset \cdot 0,041 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \gamma \cdot \sum(x^2 \cdot y)$$

$$T_{\min} = 0,75 \cdot 0,041 \cdot (\sqrt{40} \cdot 0,1) \cdot 1,00 \cdot 27750 = 539,7 \text{ kN.m} = 5,40 \text{ kN.m}$$

Como o momento torsor solicitante (26,04 kN.m) é superior ao momento torsor mínimo (5,40 kN.m), pode-se concluir que a torção não poderá ser desconsiderada no dimensionamento ao cisalhamento da seção.

Para o limite superior, a expressão que fornece o valor do máximo momento torsor suportado pela viga é a seguinte:

$$T_{\max} = \frac{0,028 \cdot C \cdot \gamma \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \Sigma(x^2 \cdot y)}{\sqrt{1 + \left( \frac{C \cdot V_{sd}}{30 \cdot C_t \cdot T_{sd}} \right)^2}}$$

Obtendo-se o parâmetro C:

$$C = 12 - 10 \left( \frac{\sigma}{f_{ck}} \right) = 12 - 10 \left( \frac{0}{40} \right) = 12$$

O valor obtido para o máximo momento torsor foi:

$$T_{\max} = \frac{0,028 \cdot 12 \cdot 1,00 \cdot (\sqrt{40} \cdot 0,1) \cdot 27750}{\sqrt{1 + \left( \frac{12 \cdot 194,6}{30 \cdot 0,0432 \cdot (26,04 \cdot 100)} \right)^2}} = 4848,27 \text{ kN.m} = 48,50 \text{ kN.m}$$

Como o momento torsor solicitante (26,04 kN.m) é inferior ao máximo momento torsor permitido na seção (48,50 kN.m), pode-se concluir que a viga será capaz de resistir às solicitações impostas.

A próxima etapa consiste em calcular as parcelas de resistência do concreto frente às forças cortantes ( $V_c$ ) e aos momentos torsores ( $T_c$ ) atuando de maneira combinada. Para que se obtenha esses valores, primeiramente é necessário calcular as parcelas puras de resistência do concreto  $V_c'$  e  $T_c'$ , ou seja, com as forças cortantes e a torção atuando de maneira isolada.

A primeira parcela, relativa a resistência promovida pelo concreto frente às forças cortantes ( $V_c'$ ) de maneira isolada, foi obtida de conforme a seguinte expressão simplificada apresentada pelo ACI 318:2019:

$$V_c' = \left( 0,17 \cdot \sqrt{f_{ck}} + \frac{N_{sd}}{6 \cdot A_c} \right) \cdot b_w \cdot d \leq 0,42 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot b_w \cdot d$$

Desconsiderando a presença de forças axiais de tração ou compressão, foi obtido o seguinte resultado:

$$V_c' = \left( 0,17 \cdot \sqrt{40} \cdot 0,1 + \frac{0}{6 \cdot 1650} \right) \cdot 15 \cdot 80 \leq 0,42 \cdot \sqrt{40} \cdot 0,1 \cdot 15 \cdot 80$$

$$V_c' = 129,02 \text{ kN} \leq 318,75 \text{ kN}$$

É possível observar que o resultado de  $V_c' = 129,02 \text{ kN}$  obtido pelo ACI 318:2019 foi muito próximo do valor de  $V_c = 126,30 \text{ kN}$  calculado pela ABNT NBR 6118:2014. Como este estudo visa atender aos requisitos da norma brasileira, optou-se por prosseguir com os cálculos adotando o valor  $V_c' = 126,30 \text{ kN}$ .

A segunda parcela, relativa a resistência promovida pelo concreto frente à torção ( $V_c'$ ) de maneira isolada, foi obtida pela seguinte expressão recomendada por Zia e Hsu (2004):

$$T_c' = 0,066 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \sum(x^2 \cdot y) \cdot (2,5 \cdot \gamma - 1,5)$$

$$T_c' = 0,066 \cdot (\sqrt{40} \cdot 0,1) \cdot 27750 \cdot (2,5 \cdot 1,00 - 1,5) = 1158,34 \text{ kN.cm} = 11,58 \text{ kN.m}$$

Obtidas as parcelas puras de resistência do concreto  $V_c'$  e  $T_c'$ , parte-se para determinação das parcelas de resistência do concreto  $V_c$  e  $T_c$  que contemplam os efeitos combinados das tensões de cisalhamento por forças cortantes e por torção. A determinação destes parâmetros é feita por meio das Equações [3.32] e [3.33].

$$V_c = \frac{V_c'}{\sqrt{1 + \left( \frac{V_c' \cdot T_{sd}}{T_c' \cdot V_{sd}} \right)^2}} = \frac{126,30}{\sqrt{1 + \left( \frac{126,30 \cdot 26,04 \cdot 100}{11,58 \cdot 100 \cdot 194,6} \right)^2}} = 71,40 \text{ kN}$$

$$T_c = \frac{T_c'}{\sqrt{1 + \left( \frac{T_c' \cdot V_{sd}}{V_c' \cdot T_{sd}} \right)^2}} = \frac{11,58 \cdot 100}{\sqrt{1 + \left( \frac{11,58 \cdot 100 \cdot 194,6}{126,30 \cdot 26,04 \cdot 100} \right)^2}} = 955,27 \text{ kN.cm} = 9,55 \text{ kN.m}$$

Calculadas as parcelas de resistência promovidas pelo concreto, parte-se para a determinação da armadura transversal composta por estribos fechados, que em ambos os casos,

deverão ser suficientes para resistir a diferença entre os esforços solicitantes e a parcela resistida pelo concreto.

O dimensionamento da armadura transversal ao cisalhamento por torção, para um ramo do estribo, foi feito pela seguinte expressão:

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_{sd}/0,75 - T_c}{\alpha_t \cdot x_1 \cdot y_1 \cdot f_{yd}}$$

Considerando  $x_1 = 9,00$  cm e  $y_1 = 84,0$  cm como sendo a menor e a maior dimensão entre eixos do estribo respectivamente, obteve-se o parâmetro adimensional  $\alpha_t$ :

$$\alpha_t = 0,66 + 0,33 (y_1/x_1) \leq 1,5$$

$$\alpha_t = 0,66 + 0,33 (84/9) \leq 1,5$$

$$\alpha_t = 3,74 \leq 1,5$$

O valor obtido para armadura transversal foi:

$$A_t = \frac{(26,04/0,75 - 9,55) \cdot 100 \cdot 100}{1,5 \cdot 9 \cdot 84 \cdot 43,48} = 5,10 \text{ cm}^2/\text{m}$$

O dimensionamento da armadura transversal ao cisalhamento por forças cortantes, para os dois ramos do estribo, é feito por meio seguinte equação:

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_{sd}/0,75 - V_c}{d \cdot f_{yd}}$$

$$A_v = \frac{(194,6/0,75 - 71,4) \cdot 100}{80 \cdot 43,48} = 5,41 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Como a parcela da torção foi calculada para um ramo e a parcela da força cortante foi calculada para dois ramos do estribo, a armadura final será obtida somando-se a armadura calculada para torção com metade da armadura calculada para força cortante. Sendo assim, o resultado final obtido para um ramo dos estribos foi:

$$A_{v+t} = 5,10 + \frac{5,41}{2} = 7,80 \text{ cm}^2/\text{m}$$

A próxima etapa é a determinação da armadura transversal mínima necessária para prevenir uma possível ruptura frágil da seção. A equação que prevê a armadura mínima necessária, para os dois ramos dos estribos, é a seguinte:

$$\left(\frac{A_{v+t}}{s}\right)_{\min} = 0,34 \left(1 + 12 \frac{\sigma}{f_{ck}}\right) \frac{b_w}{f_{yd}} \leq 1,38 \cdot \frac{b_w}{f_{yd}}$$

$$A_{v+t\min} = 0,34 \left(1 + 12 \cdot \frac{0}{40}\right) \frac{15}{434,8} \cdot 100 \leq 1,38 \cdot \frac{15}{434,8} \cdot 100$$

$$A_{v+t\min} = 1,17 \text{ cm}^2/\text{m} \leq 4,76 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Como as armaduras transversais obtidas para os máximos esforços solicitantes foram superiores à armadura mínima necessária, não houve a necessidade de adotar a armadura mínima na seção calculada.

Por fim, a última etapa do dimensionamento é a determinação da armadura longitudinal destinada a resistir às componentes horizontais das tensões aplicadas na diagonal comprimida. O valor adotado deverá ser o maior entre as seguintes expressões:

$$A_l = \frac{2 \cdot A_t \cdot (x_1 + y_1)}{s} \quad [5.4]$$

$$A_l = \left[ \frac{2,76 \cdot x \cdot s}{f_{yd}} \left( \frac{T_{sd}}{T_{sd} + \frac{V_{sd}}{3 \cdot C_t}} \right) - 2 \cdot A_t \right] \cdot \left( \frac{x_1 + y_1}{s} \right) \quad [5.5]$$

Considerando  $x = 15,0$  cm a menor dimensão do retângulo adotado para alma da seção, obteve-se os seguintes resultados para armadura longitudinal:

$$A_l = \frac{2 \cdot 5,10 \cdot (9 + 84)}{100} = 9,48 \text{ cm}^2$$

$$= \left[ \frac{2,76 \cdot 15 \cdot 100}{434,8} \left( \frac{26,04 \cdot 100}{26,04 \cdot 100 + \frac{194,6}{3 \cdot 0,0432}} \right) - 2 \cdot 5,10 \right] \cdot \left( \frac{9 + 84}{100} \right) = - 3,87 \text{ cm}^2$$

Como o valor obtido para segunda expressão foi negativo, a armadura longitudinal adotada foi  $9,48 \text{ cm}^2$ .

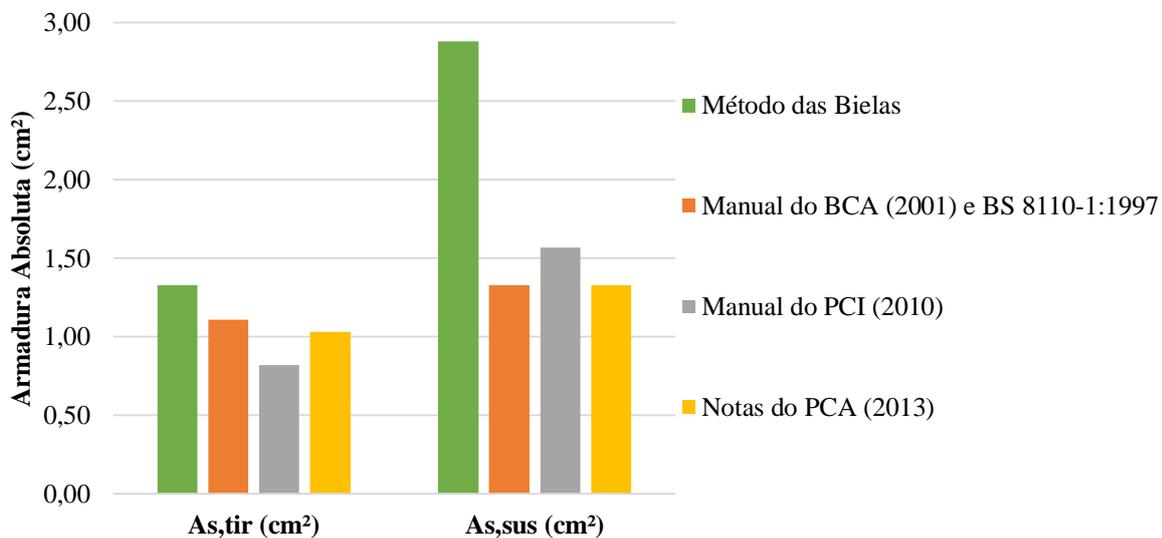
## 5.5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Afim de se apresentar os resultados obtidos de maneira mais resumida, bem como as comparações entre os diferentes métodos abordados para o dimensionamento, tanto da aba lateral como da seção em elevação, serão apresentados a seguir gráficos e tabelas que darão subsídio às discussões e conclusões.

### 5.5.1 Aba Lateral

Na Figura 5.26 e na Tabela 4, os resultados obtidos pelo Método das Bielas para a armadura horizontal ( $A_{s,tir}$ ) e para armadura de suspensão ( $A_{s,sus}$ ) foram comparados com os resultados obtidos pelos métodos analíticos apresentados pelo Manual do BCA (2001) e BS 8110:1997, manual de dimensionamento do PCI (2010) e Notas do PCA (2013). Os resultados apresentados são em termos da armadura absoluta para um ramo dos estribos ( $cm^2$ ).

**Figura 5.26 – Resultados obtidos para o conjunto de armaduras da aba lateral em termos da armadura absoluta ( $cm^2$ )**



Fonte: Autor (2020)

**Tabela 4 – Comparação entre os resultados obtidos para o conjunto de armaduras da aba lateral em termos da armadura absoluta (cm<sup>2</sup>)**

Método	Armadura Horizontal (A <sub>s,tir</sub> ) – cm <sup>2</sup>	Diferença relativa	Armadura Suspensão (A <sub>s,sus</sub> ) – cm <sup>2</sup>	Diferença Relativa
Método das Bielas	1,33	0,0%	2,88	0,0%
Manual do BCA (2001) e BS 8110-1:1997	1,11	-16,5%	1,33	-53,8%
Manual do PCI (2010)	0,82	-38,3%	1,57	-45,5%
Notas do PCA (2013)	1,03	-22,6%	1,33	-53,8%

Fonte: Autor (2020)

É possível observar que a utilização do Método das Bielas, a partir do modelo de treliça adotado, apresentou bons resultados para a armadura horizontal (A<sub>s,tir</sub>) quando comparado com os outros métodos analíticos, ficando a favor da segurança em todos os casos. Todavia, é importante salientar que, embora não esteja exposto no gráfico, no manual do PCA (2013), foi necessário calcular uma quantidade mínima de armadura horizontal, o valor obtido foi 3,40 cm<sup>2</sup>, sendo superior aos resultados obtidos em todos os métodos estudados.

Caso fosse adotada uma armadura mínima de flexão conforme as recomendações da Tabela 17.3 da ABNT NBR 6118:2014 e considerando uma largura de propagação igual a 60,0 cm, a mesma adotada para o Método das Bielas, o valor para armadura horizontal mínima (A<sub>s,mín,tir</sub>) seria:

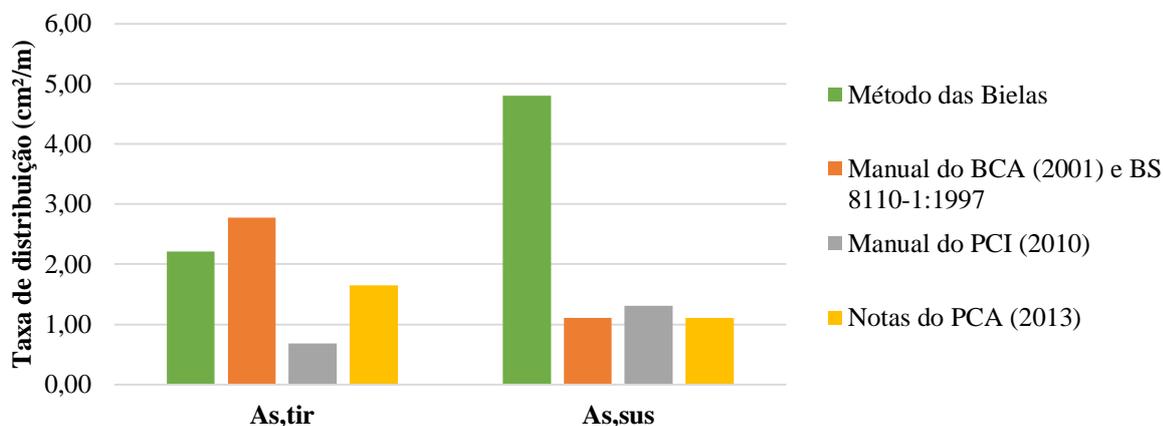
$$A_{s,mín,tir} = \frac{0,179}{100} \cdot 60 \cdot 20 = 2,14 \text{ cm}^2$$

Para as armaduras de suspensão (A<sub>s,sus</sub>), analisando a aba lateral isoladamente, o Método das Bielas apresentou resultados muito superiores a todos os outros. A principal diferença se deu pelo fato de que todos os outros métodos adotam a hipótese de que a força a ser suspensa pela armadura vertical é da mesma ordem de grandeza da força aplicada pela laje, semelhante a um dente de apoio. Já no Método da Bielas essa força foi 116,6% superior à força aplicada pela laje, o que justifica a diferença apresentada nas armaduras de suspensão.

A Figura 5.27 e a Tabela 5 apresentam o conjunto de armaduras da aba lateral em termos da taxa de distribuição (cm<sup>2</sup>/m) conforme as recomendações propostas por cada método. Nesta situação, as armaduras obtidas pelo método apresentado por Collins e Mitchell (1980) não serão

apresentadas pois os autores concentram as armaduras horizontais e de suspensão no ponto de aplicação da força.

**Figura 5.27 – Resultados obtidos para o conjunto de armaduras da aba lateral em termos da taxa de distribuição ( $\text{cm}^2/\text{m}$ )**



Fonte: Autor (2020)

**Tabela 5 – Comparação entre os resultados obtidos para o conjunto de armaduras da aba lateral em termos da taxa de distribuição**

Método	Armadura Horizontal ( $A_{s,tir}$ ) – $\text{cm}^2/\text{m}$	Diferença relativa	Armadura Suspensão ( $A_{s,sus}$ ) – $\text{cm}^2/\text{m}$	Diferença Relativa
Método das Bielas	2,21	0,0%	4,8	0,0%
Manual do BCA (2001) e BS 8110-1:1997	2,77	25,3%	1,11	-76,9%
Manual do PCI (2010)	0,68	-69,2%	1,31	-72,7%
Notas do PCA (2013)	1,65	-25,3%	1,11	-76,9%

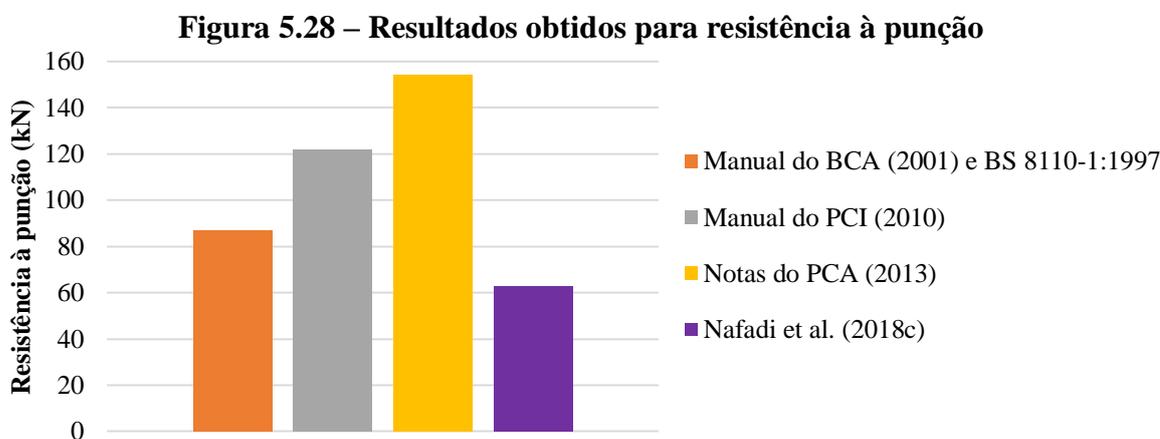
Fonte: Autor (2020)

Nota-se que quando o dimensionamento é tratado em termos da taxa de distribuição das armaduras ( $\text{cm}^2/\text{m}$ ), as diferenças apresentadas para as armaduras horizontais ( $A_{s,tir}$ ) se mantiveram proporcionais, a não ser a armadura obtida pelo Manual do PCI (2010) que houve uma diferença de 31% em relação à armadura absoluta obtida.

Avaliando as armaduras de suspensão ( $A_{s,sus}$ ), as diferenças entre os valores obtidos pelos métodos analíticos e pelo Método das Bielas aumentaram significativamente quando comparados com a armadura absoluta. Tal fato se deve às diferenças entre as larguras de propagação das cargas que cada método adota. Esses valores são diferentes para armadura horizontal e para armadura de suspensão. Para armadura horizontal ( $A_{s,tir}$ ), os valores variaram

de 40,0 a 120,0 cm, por outro lado, para armadura de suspensão ( $A_{s,sus}$ ), a largura de propagação adotada para o Método das Bielas (60,0 cm) foi metade da largura adotada nos outros métodos (120,0 cm), o que gerou uma concentração maior na taxa de distribuição. Entretanto, é importante ressaltar que esse valor não é o valor final a ser adotado na seção transversal, uma vez que diversos documentos recomendam que essa armadura seja somada às armaduras dimensionadas ao cisalhamento por forças cortantes e por torção.

Embora a abordagem apresentada para a utilização do Método das Bielas não contemple a determinação da resistência à punção da aba lateral, são apresentados na Figura 5.28 e na Tabela 6 os resultados obtidos pelos métodos analíticos de forma complementar ao dimensionamento pelo Método das Bielas.



Fonte: Autor (2020)

**Tabela 6 – Comparação entre os resultados obtidos para resistência à punção**

Método	Força solicitante (kN)	Resistência à punção (kN)	Diferença relativa à força solicitante
Manual do BCA (2001) e BS 8110-1:1997	57,9	87,04	47,4%
Manual do PCI (2010)	57,9	122,05	106,6%
Notas do PCA (2013)	57,9	154,34	161,3%
Nafadi et al. (2018a)	57,9	62,99	6,6%

Fonte: Autor (2020)

Observa-se que o recente método analítico proposto por Nafadi et al. (2018a) foi o que apresentou a menor previsão de resistência à punção quando comparado com os outros métodos. O forte embasamento experimental que deu origem às equações propostas por Nafadi et al.

(2018a) demonstra que, para uma mesma seção transversal, com as mesmas propriedades dos materiais, as diferenças na previsão da capacidade resistente à punção da aba lateral podem chegar a 154,7%. Esse pode ser um indício de que, além do manual de dimensionamento do PCI (2010) abordado por Nafadi et al (2018a), outros documentos também podem estar superestimando a capacidade resistente à punção das abas laterais de vigas de seção “L”.

Com relação aos parâmetros fundamentais necessários às verificações pelo Método das Bielas, as Figura 5.29 e Figura 5.30 apresentam um resumo das relações entre a tensão resistente e a tensão atuante (“*Stress Ratio*”) nas barras e nas regiões nodais da aba lateral.

**Figura 5.29 – Resumo das relações entre a tensão resistente e a tensão atuante (“*Stress Ratios*”) nas barras da aba lateral**

Element ID	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio
E6	-81,8	2,73	0,189
E4	57,9	368,35	0,848
E5	-88,9	2,96	0,206
E3	57,9	368,35	0,848
E7	125,4	399,04	0,918
E1	-67,5	2,25	0,156
E2	125,4	399,04	0,918
E8	-57,9	1,38	0,068
Estabilizador	0,0	NA	NA

Fonte: Autor (2020)

**Figura 5.30 – Resumo das relações entre a tensão resistente e a tensão atuante (“*Stress Ratios*”) nas regiões nodais da aba lateral**

Node ID	Node Side	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio
N3	E6	-81,8	2,73	0,158
	E4	57,9	1,93	0,112
	E8	-57,9	1,38	0,080
N4	E6	-81,8	2,73	0,158
	E5	-88,9	2,96	0,171
	E7	125,4	4,18	0,242
N2	E4	57,9	1,93	0,134
	E3	57,9	1,93	0,134
	E7	125,4	4,18	0,290
N1	E2	125,4	4,18	0,290
	E5	-88,9	2,96	0,171
	E3	57,9	1,93	0,112
N13	E1	-67,5	2,25	0,130
	Estabilizador	0,0	NA	NA
	NC1	E1	-67,5	NA
NC2	E2	125,4	NA	NA
N14	E8	-57,9	1,38	0,068
N14	Estabilizador	0,0	NA	NA

Fonte: Autor (2020)

Percebe-se que os níveis de tensões máximos obtidos pelo Método das Bielas foram nos tirantes E2, E3, E4 e E7, mostrando que, para este estudo, a determinação do conjunto de armaduras foi o fator determinante no dimensionamento da aba lateral. Nota-se, portanto, que por este fato, analisando a aba lateral de maneira isolada, somente o dimensionamento das armaduras em conjunto com a resistência a punção apresentadas pelos métodos analíticos seriam capazes de refletir a resistência última da aba lateral. Nos outros elementos, tanto as escoras quanto as regiões nodais apresentaram um “*Stress Ratio*” inferior a 0,30.

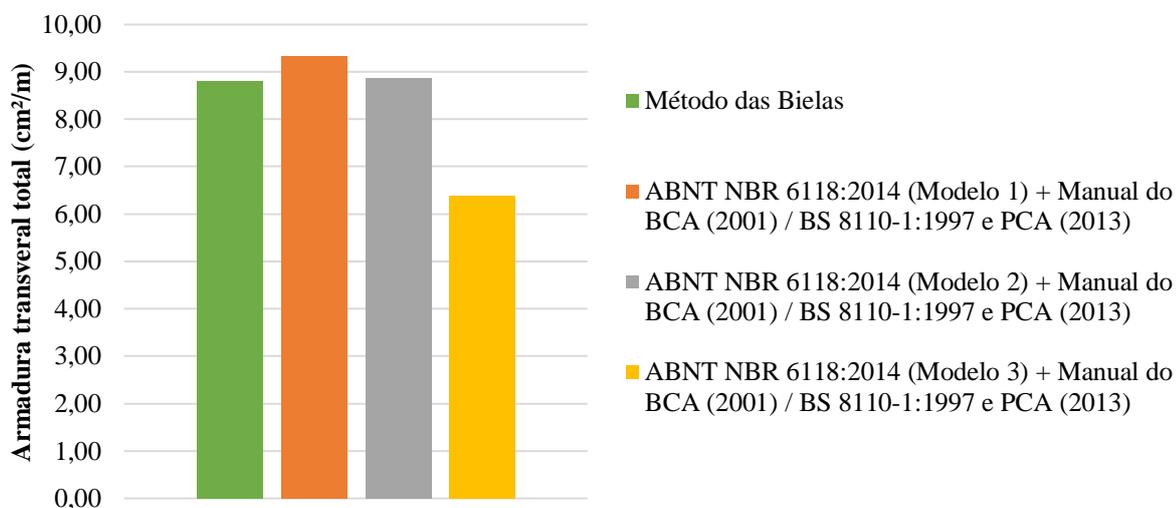
### 5.5.2 Modelo em Elevação

O dimensionamento da armadura longitudinal principal foi feito somente pelo Método das Bielas e pelo modelo de viga convencional segundo as recomendações da ABNT NBR 6118:2014, uma vez que os outros métodos analíticos estudados só contemplam o dimensionamento ao cisalhamento. Os resultados obtidos para armadura longitudinal principal foram de 9,93 cm<sup>2</sup> utilizando o Método das Bielas e 9,82 cm<sup>2</sup> utilizando o modelo convencional de viga. A diferença percentual da armadura longitudinal principal foi de 1,1%, mostrando, para este estudo, um alto grau de convergência entre os métodos.

Como a abordagem utilizando o Método das Bielas para armadura transversal é feita de maneira acoplada, através da soma das resistências necessárias à torção, às forças cortantes e armaduras de suspensão, os resultados serão apresentados por meio de combinações que somam as taxas de distribuição da armadura transversal e de suspensão considerando os diferentes métodos analíticos abordados, conforme recomendação obtida na literatura. Desse modo, foi possível comparar, na seção próxima aos apoios, as diferenças existentes entre o dimensionamento completo pelo Método das Bielas e o que seria um dimensionamento completo utilizando os métodos analíticos.

A Figura 5.31 e a Tabela 7 apresentam os resultados obtidos para o Métodos das Bielas e para soma da armadura transversal obtida pela ABNT NBR 6118:2014, Modelos 1, 2 e 3, com a armadura de suspensão obtida pelo Manual do BCA (2001) / BS 8110-1:1997 e pelo manual do PCA (2013), uma vez que a armadura de suspensão obtida nos dois métodos foi a mesma.

**Figura 5.31 – Resultados obtidos para armadura transversal total pelo Método das Bielas e ABNT NBR 6118:2014 + BCA (2001) e BS 8110-1:1997 ou PCA (2013)**



Fonte: Autor (2020)

**Tabela 7 – Comparação entre os resultados obtidos para armadura transversal total pelo Método das Bielas e ABNT NBR 6118:2014 + BCA (2001) / BS 8110-1:1997 e PCA (2013)**

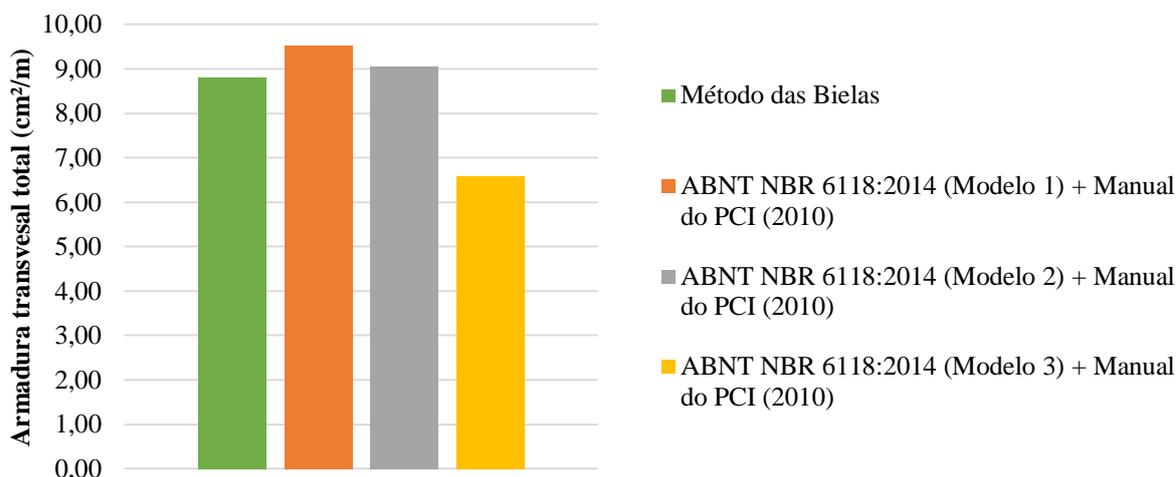
Método	Armadura Transversal Total (cm²/m)	Diferença relativa
Método das Bielas	8,80	0,0%
ABNT NBR 6118:2014 (Modelo 1) + Manual do BCA (2001) / BS 8110-1:1997 e PCA (2013)	9,33	6,0%
ABNT NBR 6118:2014 (Modelo 2) + Manual do BCA (2001) / BS 8110-1:1997 e PCA (2013)	8,86	0,7%
ABNT NBR 6118:2014 (Modelo 3) + Manual do BCA (2001) / BS 8110-1:1997 e PCA (2013)	6,38	-27,5%

Fonte: Autor (2020)

Avaliando os resultados obtidos, é possível notar que apesar das diferenças encontradas na armadura de suspensão para análise da aba lateral de maneira isolada, quando a armadura transversal total é comparada, os resultados obtidos pelo Método das Bielas foram muito próximos dos resultados obtidos para soma entre a armadura transversal pelo modelo de viga convencional da ABNT NBR 6118:2014, Modelos 1 e 2, com a armadura de suspensão pelo Manual do BCA (2001) / BS 8110-1:1997 e pelo manual do PCA (2013). Por outro lado, na comparação com o Modelo 3, criado como uma simplificação hipotética, a diferença apresentada foi de -27,6%.

A Figura 5.32 e a Tabela 8 apresentam os resultados obtidos para o Método das Bielas e para soma da armadura transversal obtida pela ABNT NBR 6118:2014, Modelos 1, 2 e 3, com a armadura de suspensão obtida pelo Manual do PCI (2010).

**Figura 5.32 – Resultados obtidos para armadura transversal total pelo Método das Bielas e ABNT NBR 6118:2014 + Manual do PCI (2010)**



Fonte: Autor (2020)

**Tabela 8 – Comparação entre os resultados obtidos para armadura transversal total pelo Método das Bielas e ABNT NBR 6118:2014 + Manual do PCI (2010)**

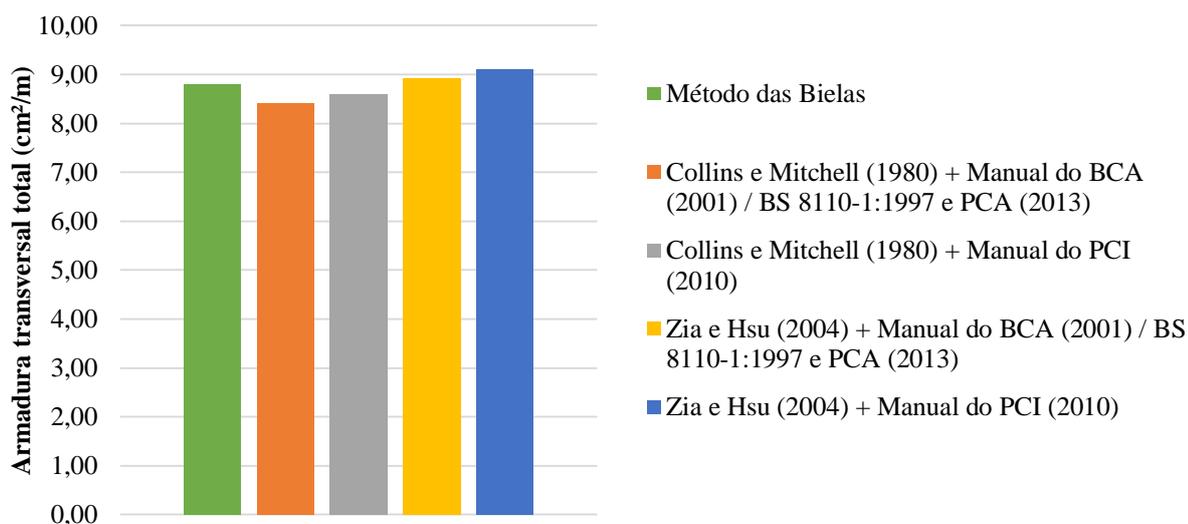
Método	Armadura Transversal Total (cm²/m)	Diferença relativa
Método das Bielas	8,80	0,0%
ABNT NBR 6118:2014 (Modelo 1) + Manual do PCI (2010)	9,53	8,3%
ABNT NBR 6118:2014 (Modelo 2) + Manual do PCI (2010)	9,06	3,0%
ABNT NBR 6118:2014 (Modelo 3) + Manual do PCI (2010)	6,58	-25,2%

Fonte: Autor (2020)

Comparando os resultados obtidos para o Método das Bielas com a soma entre a armadura transversal pelo modelo de viga convencional da ABNT NBR 6118:2014, Modelos 1, 2 e 3, com a armadura de suspensão pelo manual PCI (2010), nota-se que o Método das Bielas foi inferior aos resultados obtidos para o Modelos 1 e 2, sendo a diferença máxima igual a 8,3%. Na comparação com o Modelo 3, a diferença apresentada foi de -25,2%.

A Figura 5.33 e a Tabela 8 apresentam os resultados obtidos para o Método das Bielas e para soma da armadura transversal obtida pelos métodos analíticos alternativos propostos por Collins e Mitchell (1980) e Zia e Hsu (2004) com as armaduras de suspensão obtidas tanto pelo Manual do BCA (2001) / BS 8110-1:1997 e Notas do PCA (2013) quanto pelo Manual do PCI (2010).

**Figura 5.33 – Resultados obtidos para armadura transversal total pelo Método das Bielas e por métodos analíticos alternativos**



Fonte: Autor (2020)

**Tabela 9 – Comparação entre os resultados obtidos para armadura transversal total pelo Método das Bielas e por métodos analíticos alternativos**

Método	Armadura Transversal Total (cm²/m)	Diferença relativa
Método das Bielas	8,80	0,0%
Collins e Mitchell (1980) + Manual do BCA (2001) / BS 8110-1:1997 e PCA (2013)	8,40	-4,5%
Collins e Mitchell (1980) + Manual do PCI (2010)	8,60	-2,3%
Zia e Hsu (2004) + Manual do BCA (2001) / BS 8110-1:1997 e PCA (2013)	8,91	1,3%
Zia e Hsu (2004) + Manual do PCI (2010)	9,11	3,5%

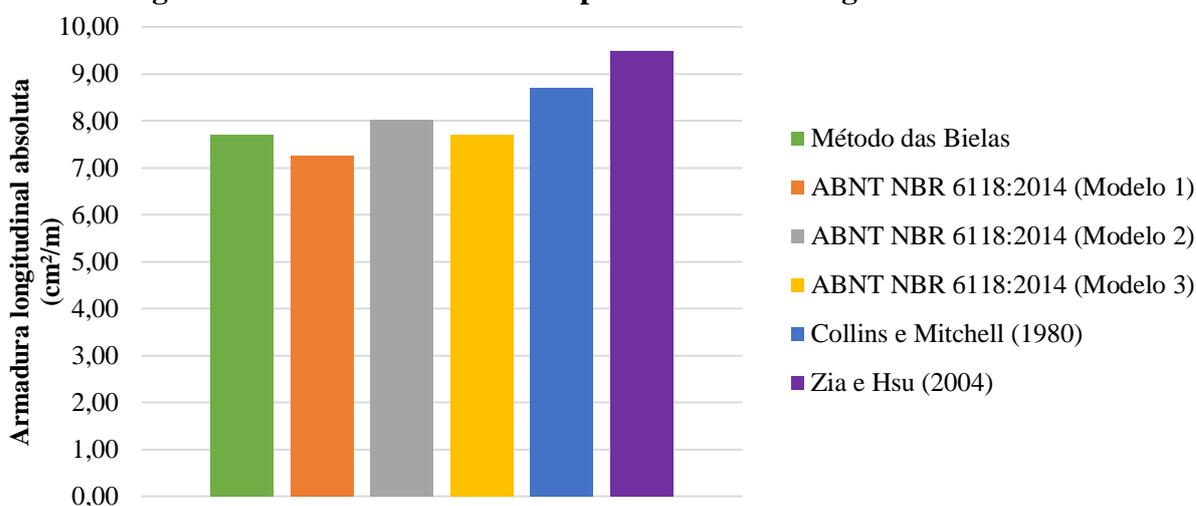
Fonte: Autor (2020)

Comparando os resultados obtidos pelo Método das Bielas com os métodos analíticos alternativos propostos por Collins e Mitchell (1980) e Zia e Hsu (2004) somados com a armadura de suspensão obtidas pelo Manual do BCA (2001) / BS 8110-1:1997, Notas do PCA

(2013) e Manual do PCI (2001), percebe-se que o dimensionamento pelo Método das Bielas ficou muito próximo dos modelos analíticos alternativos. A máxima diferença observada foi de 4,5% comparando com o método proposto por Collins e Mitchell (1980) e 3,5% comparando com o método proposto por Zia e Hsu (2004). É possível observar também o que o Modelo 3 da ABNT NBR 6118:2014, onde se considera que a torção é resistida somente pela alma da seção, foi o modelo que mais se distanciou de todos os métodos estudados.

Para armadura longitudinal, os resultados obtidos em todos os métodos são apresentados na Figura 5.34 e na Tabela 10.

**Figura 5.34 – Resultados obtidos para armadura longitudinal absoluta**



Fonte: Autor (2020)

**Tabela 10 – Comparação entre os resultados obtidos para armadura longitudinal**

Método	Armadura Transversal Total (cm²/m)	Diferença relativa
Método das Bielas	7,69	0,0%
ABNT NBR 6118:2014 (Modelo 1)	7,24	-5,9%
ABNT NBR 6118:2014 (Modelo 2)	8,01	4,2%
ABNT NBR 6118:2014 (Modelo 3)	7,70	0,1%
Collins e Mitchell (1980)	8,69	13,0%
Zia e Hsu (2004)	9,48	23,3%

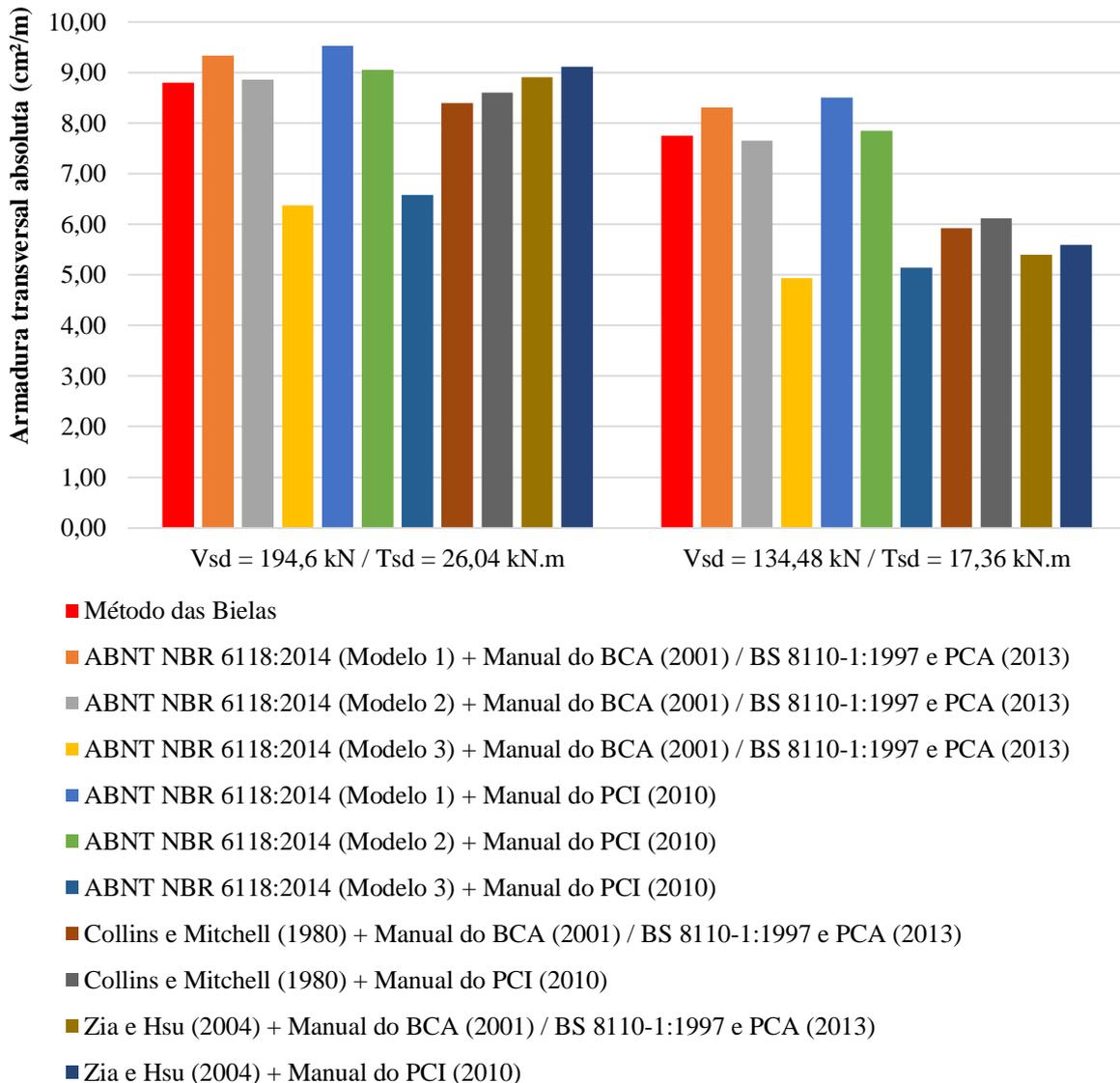
Fonte: Autor (2020)

Os resultados apresentados mostram que para armadura longitudinal o dimensionamento pelo Método das Bielas ficou próximo dos valores obtidos pelo modelo de viga convencional apresentado pela ABNT NBR 6118:2014. Comparando com os métodos

analíticos alternativos, tanto o método proposto por Collins e Mitchell (1980) como o método proposto por Zia e Hsu (2004) apresentaram resultados superiores aos obtidos pelo Método das Bielas.

Afim de se obter um panorama comparativo mais generalizado, foi realizado o dimensionamento da armadura transversal para as demais faixas de esforços solicitantes. A Figura 5.35 apresenta de maneira resumida somente os resultados obtidos para armadura transversal no primeiro e segundo ponto de aplicação da força concentrada, pois a partir do terceiro ponto, as armaduras mínimas predominaram em todos os métodos, dificultando qualquer tipo de análise comparativa.

**Figura 5.35 – Resultados obtidos para os esforços na região do primeiro e segundo ponto de aplicação da força concentrada**



Fonte: Autor (2020)

Nota-se que para a segunda faixa de esforços solicitantes, o Método das Bielas apresentou resultados da mesma ordem de grandeza quando comparado com os Modelos 1 e 2 da ABNT NBR 6114:2014 e resultados superiores quando comparado com os outros métodos analíticos alternativos.

Embora os resultados obtidos pelo Métodos das Bielas tenham sido inferiores aos resultados apresentados pelos Modelos 1 e 2 da ABNT NBR 6118:2014 nas duas faixas, é importante ressaltar que as armaduras apresentadas para estes modelos são resultado de uma simplificação feita a favor da segurança para armadura transversal em que os valores obtidos para cada retângulo foram somados e aplicados de maneira uniforme na alma da viga.

Um outro ponto a se observar é que diferente da primeira faixa de esforços, a simplificação no dimensionamento pelo Modelo 3 da norma brasileira apresentou resultados da mesma ordem de grandeza dos métodos analíticos propostos por Collins e Mitchell (1980) e Zia e Hsu (2004), indicando uma convergência entre resultados fora da região de máximos esforços solicitantes.

Com relação aos parâmetros fundamentais necessários às verificações pelo Método das Bielas as Figura 5.36 e Figura 5.37 apresentam um resumo das relações entre a tensão resistente e a tensão atuante (“*Stress Ratio*”) nas barras e nas regiões nodais para o modelo em elevação.

**Figura 5.36 – Resumo das relações entre a tensão resistente e a tensão atuante (“*Stress Ratios*”) nas barras do modelo em elevação**

Element ID	Force [kN]	Stress [MPa]	Stress Ratio
E1	-31,5	1,45	0,071
E2	-208,2	9,57	0,469
E3	-258,9	11,90	0,584
E4	-373,8	17,18	0,842
E5	-428,7	19,71	0,966
E6	-1,5	0,07	0,003
E7	-68,7	3,16	0,219
E8	-220,6	10,14	0,704
E9	128,4	319,37	0,735
E10	-79,7	3,66	0,254
E11	-132,9	6,11	0,424
E12	63,3	402,94	0,927
E13	-82,4	3,79	0,263
E14	-3,5	0,16	0,011
E15	208,2	188,54	0,434
E16	373,8	338,41	0,779
E17	431,7	390,91	0,900

Fonte: Autor (2020)

**Figura 5.37 – Resumo das relações entre a tensão resistente e a tensão atuante (“*Stress Ratios*”) nas barras do modelo em elevação**

Node ID	Node Side	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio
N1	E6	-1,5	0,07	0,003
	Estabilizador	0,0	NA	NA
N2	E7	-68,7	3,16	0,155
	E1	-31,5	1,45	0,071
	Estabilizador	0,0	NA	NA
N3	E9	128,4	2,85	0,165
	E8	-220,6	10,14	0,587
	E1	-31,5	1,45	0,084
	E2	-208,2	9,57	0,554
N4	E10	-79,7	3,66	0,180
	E2	-208,2	9,57	0,469
	E3	-258,9	11,90	0,584
N5	E12	63,3	1,41	0,081
	E11	-132,9	6,11	0,353
	E3	-258,9	11,90	0,689
	E4	-373,8	17,18	0,994
N6	E13	-82,4	3,79	0,186
	E4	-373,8	17,18	0,842
	E5	-428,7	19,71	0,966
N7	E49	-428,6	19,71	0,966
	E5	-428,7	19,71	0,966
	E14	-3,5	0,16	0,008
N8	APOIO	-194,6	8,95	0,518
	E7	-68,7	3,16	0,183
	E8	-220,6	10,14	0,587
	E15	208,2	6,94	0,402
N9	E9	128,4	2,85	0,198
	E11	-132,9	6,11	0,424
	E10	-79,7	3,66	0,254
	E15	208,2	6,94	0,482
	E16	373,8	12,46	0,865
N10	E12	63,3	1,41	0,098
	E13	-82,4	3,79	0,263
	E16	373,8	12,46	0,865
	E17	431,7	14,39	0,999
	E14	-3,5	0,16	0,011

Fonte: Autor (2020)

Percebe-se que os níveis de tensões máximas obtidos para as escoras e regiões nodais no modelo em elevação foram preponderantes no dimensionamento da viga. Os valores próximos ao limite máximo de resistência foram alcançados principalmente pela metodologia adotada por Marti (1985) para definição da distância dos banzos, que inicialmente faz uma previsão de resistência da região comprimida da viga antes da obtenção dos esforços solicitantes no modelo de treliça, limitando, de certa forma, a zona de concreto disponível.

## 6 CONCLUSÕES

As vigas de seção “L” de concreto pré-moldado estão entre os tipos mais comuns de vigas para pisos em construções pré-moldadas, sendo extensamente utilizadas no perímetro das edificações (bordas e fachadas). Pelo fato de apresentarem características geométricas essencialmente tridimensionais e serem solicitadas à torção tanto na seção quanto nas ligações, são consideradas um dos elementos mais complexos da indústria do concreto pré-moldado.

As principais vantagens desse modelo de seção é a redução da espessura total dos subsistemas de piso e pelo de já possuir a lateral externa acabada não necessitam de formas para concretagem e solidarização com a laje. Além disso, as vigas de seção “L” também são extensamente utilizadas com a função de peitoril ou como barreira para veículos em edifícios garagem.

Sendo assim, este trabalho teve como objetivo apresentar a utilização do Método das Bielas na análise e dimensionamento de vigas de seção “L” de concreto pré-moldado segundo as recomendações da ABNT NBR 6118:2014, como uma alternativa ao modelo convencional de viga. A utilização do método, a partir da proposta feita por Marti (1985), permitiu desacoplar o modelo tridimensional em dois modelos planos possibilitando a realização do dimensionamento completo das armaduras necessárias ao equilíbrio da seção, tanto em corte como em elevação. Para avaliar a segurança da metodologia apresentada foi desenvolvido um estudo de caso utilizando lajes duplo “T” que permitiu comparar os resultados obtidos para o conjunto de armaduras da aba lateral e da viga em elevação.

Para a armadura horizontal da aba lateral, os resultados mostraram que a quantidade absoluta ( $\text{cm}^2$ ) obtida pelo Método das Bielas foi superior aos três métodos analíticos comparados. Todavia, quando essa armadura foi analisada em termos da taxa de distribuição ( $\text{cm}^2/\text{m}$ ), os resultados foram diferentes pois cada método apresenta uma largura diferente para propagação das forças concentradas, de modo que, nesta situação, o Método das Bielas apresentou resultados inferiores somente ao Manual do BCA (2001) / BS 8110-1:1997.

No dimensionamento da armadura horizontal também é importante ressaltar a importância da verificação da armadura mínima necessária na aba lateral. Este critério foi apresentado somente pelas Notas do PCA (2013) e os resultados obtidos foram superiores a todos os métodos utilizados no estudo, inclusive o Método das Bielas, mostrando a necessidade de se fazer essa verificação. Para este estudo, caso fosse considerada uma armadura mínima

conforme as recomendações da Tabela 17.3 da ABNT NBR 6118:2014, essa armadura também teria sido superior a todos os outros métodos utilizados, corroborando com as recomendações feitas por Pastore (2015).

Para as armaduras de suspensão ( $A_{s,tir}$ ), a quantidade absoluta ( $cm^2$ ) obtida pelo Método das Bielas também foi superior a todos os outros métodos utilizados com uma diferença máxima de 53,8% em relação ao Manual do BCA (2001) / BS 8110-1:1997 e Notas do PCA (2013). Essa diferença se deve principalmente pelo valor da força de tração que atua no tirante, que foi 116,6% superior à força aplicada na aba lateral. Nos outros métodos a força no tirante é sempre da mesma ordem de grandeza da força aplicada na aba lateral, semelhante ao comportamento de um dente de apoio. Quando essa armadura foi analisada em termos da taxa de distribuição ( $cm^2/m$ ), a diferença máxima foi ainda maior devido a largura de propagação das forças recomendadas por cada método.

Sendo assim, os resultados para armadura horizontal e para armadura de suspensão apresentados neste estudo mostraram que o dimensionamento da aba lateral pelo Método das Bielas, de forma isolada, sem considerar a viga com um todo, conduziu a resultados conservadores quando comparados com os outros métodos analíticos. As principais diferenças observadas foram nos valores da força de tração nos tirantes e na largura de propagação considerada que variam conforme o método adotado, não havendo um consenso para tais fatores.

Como fator complementar ao dimensionamento da aba lateral pelo Método das Bielas, também foi apresentado o cálculo da resistência à punção devido à aplicação das forças concentradas advindas das lajes duplo “T”. Os resultados mostraram que o recente método, calibrado por ensaios experimentais, proposto por Nafadi et al. (2018a) foi o que apresentou os menores valores de resistência, mostrando que há uma grande possibilidade de que, além do Manual do PCI (2010), outros manuais de dimensionamento internacionais também estejam superestimando a resistência à punção da aba lateral.

Os níveis de tensão obtidos para as escoras e regiões nodais da aba lateral foram todos inferiores a 30% da capacidade resistente dos elementos. O motivo pelos baixos níveis de tensão é principalmente o comprimento disponível para o desenvolvimento das escoras inclinadas e regiões nodais, uma vez que as abas laterais são contínuas nas vigas. Este fato demonstra um dos possíveis motivos para os manuais de dimensionamento utilizados neste trabalho mostrarem a presença de uma escora inclinada, mas não apresentarem recomendações para

verificação da resistência, assim como a metodologia proposta por Marti (1980) que também não demonstra de maneira clara essa necessidade. Deste modo, para este estudo de caso, pôde-se concluir que somente o dimensionamento das armaduras em conjunto com a verificação da resistência a punção seriam suficientes para dimensionar a aba lateral com segurança.

Para o modelo em elevação, as armaduras longitudinais principais dimensionadas pelo Método das Bielas ficaram muito próximas do modelo de viga convencional da ABNT NBR 6118:2014. A diferença de 1,1% a favor da segurança evidencia que, para o estudo de caso proposto, o Método das Bielas apresentou um alto nível de convergência. O bom resultado se deve principalmente ao processo iterativo adotado para a definição da distância real entre os banzos do modelo de treliça. A abordagem feita por Marti (1985), fez com o que o valor determinado para distância entre banzos se aproximasse muito do braço de alavanca adotado na flexão do modelo convencional de viga.

Para as armaduras transversais totais, as taxas de distribuição ( $\text{cm}^2/\text{m}$ ) obtidas pelo Método das Bielas também ficaram muito próximas dos métodos analíticos comparados, principalmente na região de ocorrência dos máximos esforços solicitantes, onde observou-se uma diferença máxima de 8,3% em relação a utilização do modelo de viga convencional da ANBT NBR 6118:2014 e 4,5% em relação aos métodos analíticos alternativos. Para a simplificação feita no Modelo 3 utilizando a norma brasileira, as diferenças foram as maiores observadas, ficando evidente que, para o estudo de caso proposto, não seria recomendável adotar tal simplificação para as regiões de esforços solicitantes máximos.

Como relação à armadura longitudinal dimensionada para torção, a metodologia apresentada por Marti (1985) apresentou resultados muito próximos aos obtidos pela ABNT NBR 6118:2014 sendo a diferença máxima observada igual a 5,9%. Por outro lado, quando comparado com os métodos analíticos alternativos, os resultados apresentados foram inferiores, sendo as diferenças iguais a 13% e 23,3%. Como a metodologia de dimensionamento à torção apresentada por Marti (1985) para o Método das Bielas permite uma flexibilidade na determinação das armaduras longitudinais, esse valor poderia ser facilmente ajustado no dimensionamento.

Por fim, os resultados obtidos para as escoras e regiões nodais do modelo em elevação mostram que, diferentemente da aba lateral, os níveis de tensão nestes elementos foram preponderantes no dimensionamento. Pode-se concluir, portanto, que, para o estudo de caso proposto, apesar da metodologia apresentada por Marti (1985) não contemplar a verificação

dos níveis de tensões nas escoras e regiões nodais no modelo em elevação, as verificações destes critérios foram essenciais para o dimensionamento da viga avaliada.

De maneira geral, este trabalho mostra que a utilização do Método das Bielas segundo as recomendações da ABNT NBR 6118:2014 se apresentou como uma forma alternativa altamente competitiva para o dimensionamento de vigas de seção “L” de concreto pré-moldado submetidas à torção de equilíbrio. O fato das diferenças na armadura longitudinal e nas taxas de distribuição da armadura transversal total terem sido inferiores a 8,3% em relação aos métodos analíticos demonstra que o método está alinhado com as diferentes metodologias presente na literatura internacional, inclusive calibradas por extensos programas experimentais, o que reforça ainda mais a viabilidade da utilização do método neste tipo de elemento.

As vantagens relacionadas a flexibilização no caminhamento das tensões, permitindo tratar furos, aberturas e dentes de apoio em um único modelo, por exemplo, colocam o Método das Bielas à frente das outras metodologias que se limitaram ao dimensionamento de seções com geometrias mais simples. Um outro ponto forte também foi opção pela utilização de softwares como o CAST, que permitiu a automatização do processo de verificação dos elementos, alavancando a produtividade destes projetos.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACI COMMITTEE 318. **Building Code Requirements for Structural Concrete** (ACI 318-19) and Commentary (ACI 318R-2019). Detroit, MI: ACI Comitee 318, 2019.

ALTOQI. **QiSuporte – Estruturas Pré-Moldadas**. AltoQi - Tecnologia Aplicada à Engenharia, Florianópolis. Disponível em: < <https://suporte.altoqi.com.br/hc/pt-br/sections/115000369153-Estruturas-Pr%C3%A9-Moldadas>> Acesso em: 15 mar. 2019.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

\_\_\_\_\_. **NBR 8681: Ações e segurança nas estruturas - Procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT, 2004.

\_\_\_\_\_. **NBR 8800: Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios - Procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT, 2008.

\_\_\_\_\_. **NBR 9062: Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado**. Rio de Janeiro: ABNT, 2017.

\_\_\_\_\_. **NBR 6120: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações**. Rio de Janeiro: ABNT, 2019.

BUILDING AND CONSTRUCTION AUTHORITY (BCA). **Structural Precast Concrete Handbook**. 2. ed. Singapura: Technology Development Division of the Building and Construction Authority. 2001.

BRITISH STANDARDS INSTITUTION. **BS 8110-1: The structural use of concrete. Part 1: Code of practice for design and construction**. London, 1997.

CAMPIONE, G.; CUCCHIARA, C.; MINAFÒ, G. Effects of circular openings on the compressive behaviour of R.C. columns. **Materials and Structures**, v. 48, n. 7, p. 1995–2008, 2015.

CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION. **CSA A23.3: Design of concrete structures**. Mississauga, Canada, 2014.

CERUTTI, R. M.; SANTOS, S. H. C. Impacts in the structural design of the 2014 revision of the brazilian standard ABNT NBR 6118. **IBRACON Structures and Materials Journal**. São Paulo, v. 8, n. 4, p. 547-566, 2015.

COLLINS, M. P.; MITCHELL, D. Shear and torsion design of prestressed and non-prestressed concrete beams. **PCI Journal**, v. 25, n. 4, 1980.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **fib Model Code for Concrete Structures 2010**. Berlin, Germany, 2013.

ELLIOTT, K. S. **Precast Concrete Structures**. 2. ed. Boca Raton: Taylor & Francis, CRC Press, 2017.

EL DEBS, M. K. **Concreto Pré-Moldado: Fundamentos e Aplicações**. 2. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2017.

EL-METWALLY, S.; CHEN, W. **Structural Concrete: Strut-and-Tie Models for Unified Design**. 1st. ed. Boca Raton: CRC Press, 2018.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1991: Eurocode 1: Actions on structures (EC1) Part 1-1: General actions – densities, self-weight and imposed loads (EC1 Part 1-1)**. Brussels: European Committee For Standardization, 2002.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON (FIB). **Structural connections for precast concrete buildings**. Guide to good practice. Bulletin d'Information, n. 242. February, 2008.

FERREIRA, M. A. **Deformabilidade de ligações viga-pilar de concreto pré-moldado**. São Carlos, 231 f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1999.

FRANTOVÁ, M.; ŠTEMBERK, P.; VALA, V. Application of strut-and-tie model on eccentric columns. **Mechanika**, v. 17, n. 2, p. 126-131, 2011.

GUNER, S.; CARRIÈRE, J. Analysis and strengthening of caisson foundations for uplift loads. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 43, n. 5, p. 411–419, 2016.

HARIHARAN, V. **Behavior of Precast L-Shaped Spandrel Beams**. 203 f. Master of Science - North Carolina State University, Raleigh, 2008.

HARIHARAN, V.; LUCIER, G.; RIZKALLA, S.; ZIA, P.; KLEIN, G; GLEICH, H. Behavior of compact L-shaped spandrel beams with alternative web reinforcement. **PCI Journal**, v. 64, p. 39–54, March - April, 2019.

HASSAN, T.; LUCIER, G.; RIZKALLA, S.; ZIA, P. Modeling of L-shaped, precast, prestressed concrete spandrels. **PCI Journal**, v. 52, n. 2, 2007.

HOLMBERG, E.; TORSTENFELT, B.; KLARBRING, A. Stress constrained topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, n. 1, p. 33–47, 2013.

HE, Z. Q.; LIU, Z.; MA, Z.J. Investigation of load-transfer mechanisms in deep beams and corbels. **ACI Structural Journal**, v. 109, n. 4, p. 467- 476, 2012.

HU, Q.; LEY, M. T.; RUSSELL, B. W. Determining Efficient Strut-and-Tie Models for Simply Supported Beams Using Minimum Strain Energy. **ACI Structural Journal**, n. 111, p. 1015–1026, 2014.

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE. **FIB BULLETIN 61**: Design examples for strut-and-tie models. Switzerland, 2011.

KLEIN, G. J. Design of spandrel beams. **PCI Journal**, v. 31, n. 5, p. 76-124, 1986.

LOGAN, D. R. L-spandrels: Can torsional distress be induced by eccentric vertical loading? **PCI Journal**, v. 52, n. 2, p. 46-61, 2007.

LUCIER, G.; RIZKALLA, S.; ZIA, P.; KLEIN, G. Precast concrete, L-shaped spandrels revisited: Full-scale tests. **PCI Journal**, v. 52, n. 2, p. 62-76, 2007.

LUCIER, G.; WALTER, C.; RIZKALLA, S.; ZIA, P.; KLEIN, G. Development of a rational design methodology for precast concrete slender spandrel beams: Part 1, experimental results. **PCI Journal**, p. 88-112, 2011a.

LUCIER, G.; WALTER, C.; RIZKALLA, S.; ZIA, P.; KLEIN, G. Development of a rational design methodology for precast concrete slender spandrel beams: Part 2, analysis and design guidelines. **PCI Journal**, p. 106-133, 2011b.

MARTI, P. **Truss Models in Detailing**. Concrete International, v.82, n.1, p. 66-73, 1985.

MARTI, P. Dimensioning and detailing. In: IABSE Colloquium Structural Concrete. Stuttgart, 1991. **Proceedings... IABSE v.62**, pp. 411-443, 1991.

MERCAN, B. **Modeling and behavior of prestressed concrete spandrel beams**. 178 f. Thesis (Ph.D.) - Universidade de Minnesota, Minnesota Twins, 2011.

MERCAN, B.; SCHULTZ, A. E.; STOLARSKI, H. K. Finite element modeling of prestressed concrete spandrel beams. **Engineering Structures**, v. 32, n. 9, p. 2804–2813, 2010.

MERCAN, B.; SCHULTZ, A. E.; STOLARSKI, H. K.; MAGAÑA R. A.; LORIG, M. J. Elastic Solutions for Eccentrically Loaded, Slender, Rectangular Spandrel Beams. **Journal of Structural Engineering**, v. 138, n. 7, p. 911–921, 2012.

MOEHLE, J. P. **Key Changes in the 2019 Edition of the ACI Building Code (ACI 318-19)**. Concrete International, August, 2019.

NAFADI, M. K. **Analytical Modeling and Behavior of Ledges of L-shaped Beams**. 125 p. Master of Science - North Carolina State University, Raleigh, 2013.

NAFADI, M. K.; LUCIER, G. W.; RIZKALLA, S.; ZIA, P.; KLEIN, G. J. Development of design guidelines for ledges of L-shaped beams. **PCI Journal**, v. 63, p. 32–49, April, 2018.

NAFADI, M. K.; LUCIER, G. W.; RIZKALLA, S.; ZIA, P.; KLEIN, G. J. Ledge behavior and strength of long-span L-shaped beams. **PCI Journal**, v. 63, p. 50–66, April, 2018.

NAFADI, M. K.; LUCIER, G. W.; RIZKALLA, S.; ZIA, P.; KLEIN, G. J. Ledge behavior and strength of short-span L-shaped beams. **PCI Journal**, v. 63, p. 67–86, April, 2018.

- MIRZA, S. A.; FURLONG, R. W. Serviceability Behavior and Failure Mechanisms of Concrete Inverted T-Beam Bridge Bentcaps. **Journal of the American Concrete Institute**, v. 80, n. 4, 1983.
- MIRZA, S. A.; FURLONG, R. W. Strength Criteria for Concrete Inverted T-Girders. **ASCE Journal of Structural Engineering**, v. 109, n. 8, 1983.
- MIRZA, S. A.; FURLONG, R. W. Design of Reinforced and Prestressed Concrete Inverted T-Beams for Bridge Structures. **PCI Journal**, v. 30, n. 4, p. 112-136, 1985.
- PANTOJA, J. C. **Geração automática via otimização topológica e avaliação de segurança de modelos de bielas e tirantes**. 240 f. Tese (Doutorado) - Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2012.
- PASTORE, M. V. F. **Contribuição ao projeto de vigas delgadas de seção “L” de concreto pré-moldado**. 180 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- PICELLI, R.; TOWNSEND, S.; BRAMPTON, C.; NORATO, J.; KIM, H. A. Stress-based shape and topology optimization with the level set method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 29, p. 1-23, February, 2017.
- PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE. **PCI Connections Manual for precast and prestressed concrete construction**. MNL- 138-08. 1st ed. 2008.
- PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE. **PCI Design Handbook: Precast and Prestressed Concrete**. MNL- 120. 7th ed. 2010.
- PORTLAND CEMENT ASSOCIATION (PCA). **Notes on ACI 318-11 Building Code Requirements for Structural Concrete with Design Applications**. 12th ed. U.S.A, 2013.
- RATHS, C. H. Spandrel beam behavior and design. **PCI Journal**, v. 29, n. 2, p. 62-131, 1984.
- RIZKALLA, S.; NAFADI, M.; LUCIER, G.; ZIA, P.; KLEIN, G. **Behavior and Design of Directly-Loaded L-Shaped Beam Ledges**. Technical report RD-16-03. North Carolina State University, Raleigh, 2016.
- SADEGHIAN, V.; VECCHIO, F. The modified compression field theory: Then and now. **ACI Structural Journal**, v. SP-318, p 3.1 – 3.20, 2018.
- SCHÄFER, K.; SCHLAICH, J. Design and Detailing of Structural Concrete Using Strut-and-Tie Models. **The Structural Engineer**, v. 69, n. 06, p.113-125, 1991.
- SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K.; JENNEWEIN, M. Toward a consistent design of structural concrete. **PCI Journal**, v. 32, n. 3, p.75-150, 1987.
- SILVA, R. C.; GIONGO, J. S. **Modelos de Bielas e Tirantes Aplicados a Estruturas de Concreto Armado**. São Carlos: EESC-USP, 2000.

SOUZA, R. A. **Concreto estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades**. 442 f. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

TJHIN, T. N. **Analysis and Design Tools for Structural Concrete Using Strut-and-Tie Models**. 163p. Thesis (Ph.D.) - University of Illinois at Urbana-Champaign, 2004.

TJHIN, T. N.; KUCHMA, D. A. Computer-based tools for design by strut-and-tie method: Advances and challenges. **ACI Structural Journal**, v. 99, n. 5, p. 586–594, 2002.

TJHIN, T. N.; KUCHMA, D. A. Integrated analysis and design tool for the strut-and-tie method. **Engineering Structures**, v. 29, n. 5, p. 3042–3052, 2007.

VAN ACKER, A. **Manual de Sistemas Pré-Fabricados de Concreto**. Lausanne: FIB, 2002. Tradução de: Marcelo Ferreira (ABCIC, 2003).

VECCHIO, F. J.; M. P. COLLINS. Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using Modified Compression Field Theory. **ACI Structural Journal**, v.85, n. 3, p. 258-268, 1986.

VECCHIO, F. J.; Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Formulation., **ASCE Journal of Structural Engineering**, v. 126, n. 8, p. 1070-1077, 2000.

ZHONG, J. T.; WANG, L.; DENG, P.; ZHOU, M. A new evaluation procedure for the strut-and-tie models of the disturbed regions of reinforced concrete structures. **Engineering Structures**, v. 148, p. 660–672, 2017.

ZIA, P.; MCGEE, W. D. Design for Torsion and Shear in Prestressed Concrete. **PCI Journal**, v. 19, n. 2, p. 46-65, 1974.

ZIA, P.; HSU, T. T. C. Design for Torsion and Shear in Prestressed Concrete Flexural Members. **PCI Journal**, v. 49, n. 3, p. 34-42, 2004.