

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL – MESTRADO**

CELSO AUGUSTO PISSINATTI CARDOSO

**DIMENSIONAMENTO DE PILARES ESBELTOS EM FLEXÃO
COMPOSTA NORMAL**

MARINGÁ
2019

CELSO AUGUSTO PISSINATTI CARDOSO

**DIMENSIONAMENTO DE PILARES ESBELTOS EM FLEXÃO
COMPOSTA NORMAL**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá.

Orientador: Prof. Dr. Romel Dias Vanderlei

Coorientador: Prof. Dr. Roberto Buchaim

MARINGÁ
2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

C268d

Cardoso, Celso Augusto Pissinatti

Dimensionamento de pilares esbeltos em flexão composta normal / Celso Augusto Pissinatti Cardoso. -- Maringá, PR, 2019.
197 f.color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Romel Dias Vanderlei.

Coorientador: Prof. Dr. Roberto Buchaim.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2019.

1. Pilares esbeltos. 2. Módulo de elasticidade. 3. Efeito de segunda ordem. 4. Concreto de alta resistência. 5. Análise e dimensionamento. I. Vanderlei, Romel Dias, orient. II. Buchaim, Roberto, coorient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. IV. Título.

CDD 23.ed. 624.154

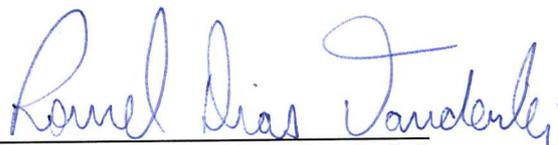
CELSO AUGUSTO PISSINATTI CARDOSO

**DIMENSIONAMENTO DE PILARES ESBELTOS
EM FLEXÃO COMPOSTA NORMAL**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre.

Aprovado em: 22/08/2019

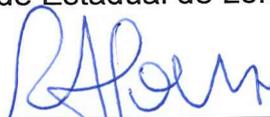
BANCA EXAMINADORA



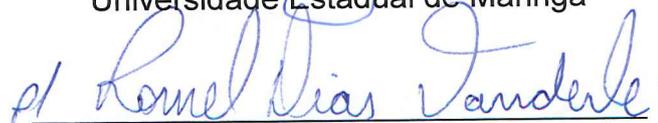
Prof. Dr. Romel Dias Vanderlei
Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Roberto Buchaim
Universidade Estadual de Londrina



Prof. Dr. Rafael Alves de Souza
Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Luiz Carlos Marcos Vieira Junior
Universidade Estadual de Campinas

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida, me sinto abençoado devido a todas as oportunidades que ele me proporcionou.

Sou muito grato ao meu pai Celso Cardoso, minha mãe Vera Lucia Pissinatti Cardoso e minha irmã Glenda Micaela Pissinatti Cardoso pelo amor, pela paciência e pela parte de suas vidas que foi dedicada ao meu desenvolvimento.

A toda minha família: avó, tias, tios, primas, primos e afilhado. Eles fazem minha vida melhor do que eu seria capaz de fazer por mim mesmo.

A minha namorada Natalia Maria Figueiredo pelo carinho, afeto e parceria, me ajudando a encarar e superar todos os meus desafios pessoais e profissionais.

Ao professor Dr. Romel Dias Vanderlei pela orientação, pela sugestão de trabalhos complementares, assim como pelas anotações que tornaram este trabalho mais organizado.

Minha eterna gratidão ao Dr. Roberto Buchaim, principalmente pela paciência, dedicação, disponibilidade e por todo o conhecimento que foi transmitido desde a iniciação científica pela Universidade Estadual de Londrina em 2015, orientação no Trabalho de Conclusão de Curso em 2017 até a conclusão do Mestrado pela Universidade Estadual de Maringá em 2019.

Meus amigos Alessandra Calegari, Danda Soares, Diogo Barbosa, Eric Kenji, Giovanna Moreira Gois e Guilherme Zornitta que contribuíram e me influenciaram neste trabalho.

A Universidade Estadual de Maringá e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PCV), pela oportunidade e pelas condições oferecidas para o desenvolvimento e conclusão desse trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A mente que se abre a uma nova
ideia jamais voltará ao seu
tamanho original

Albert Einstein

RESUMO

O comportamento de pilares submetidos a flexo-compressão impõe uma análise de solução iterativa, visto que o esforço de compressão gera momentos fletores de segunda ordem que por sua vez provocam novos incrementos de deslocamentos, e assim sucessivamente. Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma ferramenta computacional com rotinas de cálculo que possibilitem a análise e o dimensionamento de pilares de concreto armado, biarticulados ou em balanço, com seções retangulares e circulares, cheias ou vazadas, em flexão composta normal. Contemplam-se concretos C20 a C90, aço CA-50 e suas respectivas leis constitutivas, com a não-linearidade física do material definida a partir do diagrama momento curvatura. Para o aço, utiliza-se a lei bilinear e para o concreto utiliza-se o diagrama parábola-retângulo para o dimensionamento no estado limite último e o diagrama de Grasser para a deformabilidade. A não-linearidade geométrica é definida a partir da solução exata da equação diferencial de segunda ordem que inclui a influência dos diversos carregamentos a que o pilar está submetido, obtêm-se os deslocamentos e o momento solicitante total, que resulta da multiplicação da força axial de compressão pela deformada elástica não-linear. Após comparação dos resultados com outros quatro métodos de dimensionamento, para concretos das duas classes de resistência e com esbeltez que varia de $\lambda \cong 38$ até $\lambda \cong 87$, a utilização do programa mostrou-se válida principalmente para os casos onde a esbeltez do pilar e os momentos de segunda ordem são mais significativos. Constatou-se que a influência do módulo de elasticidade do concreto no dimensionamento de pilares esbeltos resulta em diferenças de +22% até -9% no valor da armadura, a depender da resistência do concreto e do tipo de agregado (α_E) considerado.

Palavras-chave: Análise e dimensionamento. Módulo de elasticidade. Pilar. Efeito de segunda ordem. Concreto de alta resistência.

ABSTRACT

The reaction of columns exposed to flexion-compression imposes an iterative solution analysis, since the compression effort creates second order bending moments which in turn cause further displacement increments, and so on. This work aims to develop a computerized tool that runs calculation routines by allowing the analysis and design of pin-ended and cantilever reinforced concrete columns, with rectangular and circular, full or hollow, cross-sections under combined axial load and bending. The strengths considered are $f_{ck} = 20 - 90$ MPa, and steel CA-50 and their constitutive uses, the physical (or material) non-linearity is defined from the bending moment-curvature relation of the cross-section. For steel, a bilinear stress-strain relation is used. For concrete, the parabola-rectangle stress distribution is used for the ultimate limit state and the Grasser law is used for deformability. The geometric non-linearity is derived from the exact solution of the second-order differential equation that includes influence of the various loads to which the column is subjected: from this it is gotten the movements and the total requesting moment, which results from the multiplication of the axial force of compression by nonlinear elastic deformation. After comparison with others four design methods, the use of the program showed that it is valid mainly for cases where the slenderness of the abutment and the moments of second order are more significant. It was found that the influence of the modulus of elasticity of concrete in the design of slender columns results in + 22% to - 9% differences in reinforcement value, depending on the strength of the chosen concrete and type of aggregate (α_E) considered.

Key-Words: Analysis and design. Modulus of elasticity. Column. Second order effects. Reinforced concrete.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Diagrama de interação, Momento relativo x Normal relativa.....	29
Figura 2.1 - Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas.....	41
Figura 2.2 - Diagrama tensão-deformação idealizado do concreto.....	44
Figura 2.3 - Representação esquemática da relação entre tensão e deformação sob carga de curta duração	47
Figura 2.4 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração, f_{ck} de 20 a 90 MPa	49
Figura 2.5 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 30 MPa.....	50
Figura 2.6 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 70 MPa.....	51
Figura 2.7 - Domínios de deformação das seções transversais no estado limite último ..	53
Figura 2.10 - Relação momento-curvatura da ABNT NBR 6118:2014	58
Figura 2.11 - Relação momento-curvatura do MC-90	59
Figura 2.12 - Imprecisões geométricas locais.....	65
Figura 2.13 - Seção retangular	69
Figura 2.14 - Seção Circular	70
Figura 2.15 - Imagem do programa	71
Figura 3.1 - Seção transversal, deformações e esforços na seção retangular	73
Figura 3.2 - Seção metálica, deformações e esforços na seção retangular cheia ou vazada	75
Figura 3.3 - Seção transversal, deformações e esforços na seção circular ou anelar	77
Figura 3.4 - Seção metálica, deformações e esforços na seção circular ou anelar.....	79

Figura 4.1 – Relação momento-curvatura utilizada	83
Figura 4.2 – Diagrama momento-curvatura para o Exemplo 1 – Pilar biarticulado com seção retangular.....	86
Figura 4.3 – Diagrama momento-curvatura para o Exemplo 1 - Metodologia da norma ABNT NBR 6118:2014 - Pilar biarticulado com seção retangular	87
Figura 4.4 – Diagrama momento-curvatura para o Exemplo 2 – Pilar em balanço com seção retangular	89
Figura 4.5 – Diagrama momento-curvatura para o Exemplo 2 - Metodologia da norma ABNT NBR 6118:2014 - Pilar em balanço com seção retangular	90
Figura 5.1 – Momento na base de um pilar carregado excentricamente: (a) pela teoria de primeira ordem; (b) pela teoria de segunda ordem	92
Figura 5.2 – Momento fletor nas posições indeformada e deformada.....	93
Figura 5.3 – Momento fletor na posição deformada para a falta de retilineidade para o pilar biarticulado e em balanço.....	96
Figura 5.4 –Momento fletor nas posições indeformada e deformada para carga horizontal no meio do vão.....	99
Figura 5.5 – Momento fletor nas posições indeformada e deformada para carga uniformemente distribuída	101
Figura 5.6 – Momento fletor nas posições indeformada e deformada para os momentos aplicados nas extremidades	104
Figura 5.7 – Dados de entrada e de saída para o Exemplo 1 - Pilar biarticulado com seção retangular	112
Figura 5.8 – Momento fletor nas posições indeformada e deformada para carga horizontal no topo do pilar	113
Figura 5.9 – Momento fletor nas posições indeformada e deformada para carga uniformemente distribuída	116
Figura 5.10 – Momento fletor nas posições indeformada e deformada para o momento aplicado no topo.....	118

Figura 5.11 – Dados de entrada e de saída para o Exemplo 2 - Pilar em balanço com seção circular.....	126
Figura 6.1 – Curvas momentos resistente e solicitante em função da taxa mecânica da armadura para a seção retangular.....	129
Figura 6.2 – Curvas momentos resistente e solicitante em função da taxa mecânica da armadura para a seção circular	130
Figura 7.1 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da taxa de armadura versus força normal v_d para três métodos de dimensionamento em comparação com o método proposto - $\lambda = 86,6, f_{ck} = 70$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$ e $\alpha_E = 1,0$	134
Figura 7.2 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da armadura versus força normal v_d , influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_E = 1,0$ cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 86,6, f_{ck} = 70$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$	136
Figura 7.3 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da taxa de armadura versus força normal v_d para cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 86,6, f_{ck} = 30$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$, $\alpha_E = 1,0$	138
Figura 7.4 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da taxa de armadura versus força normal adimensional, influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_E = 1,0$; $\lambda = 86,6, f_{ck} = 30$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$	139
Figura 7.5 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da armadura versus força normal adimensional para cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 52, f_{ck} = 70$ MPa, $\rho_{s,tot} = 2\%$, $\alpha_E = 1,0$	141
Figura 7.6 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da armadura versus força normal v_d , influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_E = 1,0$ cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 52, f_{ck} = 70$ MPa, $\rho_{s,tot} = 2\%$	142
Figura 7.7 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da armadura versus força normal adimensional para cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 52, f_{ck} = 30$ MPa, $\rho_{s,tot} = 2\%$, $\alpha_E = 1,0$	144

- Figura 7.8 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da armadura versus força normal v_d , influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_E = 1,0$ cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 52, f_{ck} = 30 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%$ 145
- Figura 7.9 – Pilar biarticulado, seção circular: Variação da taxa de armadura versus força normal v_d para três métodos de dimensionamento em comparação com o método proposto - $\lambda = 80, f_{ck} = 80 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 4\%, \alpha_E = 1,0$ 148
- Figura 7.10 – Pilar biarticulado, seção circular: Variação da armadura versus força normal v_d , influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_E = 1,0$ cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 80, f_{ck} = 80 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 4,0\%$ 149
- Figura 7.11 – Pilar biarticulado, seção circular: Variação da taxa de armadura versus força normal v_d para três métodos de dimensionamento em comparação com o método proposto - $\lambda = 80, f_{ck} = 40 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 4\%, \alpha_E = 1,0$ 151
- Figura 7.12 – Pilar biarticulado, seção circular: Variação da armadura versus força normal v_d , influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_E = 1,0$ cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 80, f_{ck} = 40 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 4\%$... 152
- Figura 7.13 – Pilar biarticulado, seção circular: Variação da taxa de armadura versus força normal v_d para três métodos de dimensionamento em comparação com o método proposto - $\lambda = 40, f_{ck} = 80 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%, \alpha_E = 1,0$ 154
- Figura 7.14 – Pilar biarticulado, seção circular: Variação da armadura versus força normal v_d , influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_E = 1,0$ cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 40, f_{ck} = 80 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2,0\%$ 155
- Figura 7.15 – Pilar biarticulado, seção circular: Variação da taxa de armadura versus força normal v_d para três métodos de dimensionamento em comparação com o método proposto - $\lambda = 40, f_{ck} = 40 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%, \alpha_E = 1,0$ 157
- Figura 7.16 - Pilar biarticulado, seção circular: Variação da armadura versus força normal v_d , influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_E = 1,0$ cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 40, f_{ck} = 40 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%$... 158
- Figura A.1 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 20 MPa 166

Figura A.2 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 40 MPa.....	167
Figura A.3 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 50 MPa.....	168
Figura A.4 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 60 MPa.....	169
Figura A.5 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 80 MPa.....	170
Figura A.6 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 90 MPa.....	171
Figura B.1 - Posição da linha neutra e diagrama de deformações da seção retangular vazada	173
Figura B.2 - Posição da linha neutra e diagrama de tensões da seção circular cheia	185

Lista de Tabelas

Tabela 2.1- Dados e resultados para pilares de seção retangular - Cálculo da carga última	36
Tabela 2.2 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 30 MPa.....	50
Tabela 2.3 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 70 MPa.....	51
Tabela 2.4- Valores estimados de módulo de elasticidade em função da resistência característica à compressão do concreto	53
Tabela 2.5 – Momento de primeira e de segunda ordem para Séries de Fourier	61
Tabela 2.6 – Momento solicitante total para o pilar biarticulado, aproximação de Dischinger.....	63
Tabela 2.7 – Momento solicitante total para o pilar em balanço, aproximação de Dischinger.....	64
Tabela 4.1 – Curvatura e os momentos resistentes da seção transversal para o Exemplo 1 – Pilar biarticulado com seção retangular	85
Tabela 4.2 – Curvatura e os momentos resistentes da seção transversal para o Exemplo 2 – Pilar em balanço com seção circular	88
Tabela 5.1 – Carregamentos do pilar biarticulado.....	106
Tabela 5.2 – Esforços de primeira e de segunda ordem para a falta de retilineidade para o Exemplo 1 – Pilar biarticulado com seção retangular.....	108
Tabela 5.3 – Esforços de primeira e de segunda ordem para a carga horizontal no meio do vão para o Exemplo 1 – Pilar biarticulado com seção retangular	109
Tabela 5.4 – Esforços de primeira e de segunda ordem para a carga uniformemente distribuída ao longo do lance para o Exemplo 1 – Pilar biarticulado com seção retangular	110

Tabela 5.5 – Esforços de primeira e de segunda ordem para momentos aplicados nas extremidades do pilar para o Exemplo 1 – Pilar biarticulado com seção retangular.....	111
Tabela 5.6 – Esforços totais para o Exemplo 1 – Pilar biarticulado com seção retangular	112
Tabela 5.7 – Carregamentos do pilar em balanço	120
Tabela 5.8 – Esforços de primeira e de segunda ordem para a falta de retilineidade para o Exemplo 2 - Pilar em balanço com seção circular.....	122
Tabela 5.9 – Esforços de primeira e de segunda ordem para a carga horizontal no topo do pilar para o Exemplo 2 - Pilar em balanço com seção circular	123
Tabela 5.10 – Esforços de primeira e de segunda ordem para a carga uniformemente distribuída ao longo do lance para o Exemplo 2 - Pilar em balanço com seção circular.....	124
Tabela 5.11 – Esforços de primeira e de segunda ordem para o momento aplicado no topo do pilar para o Exemplo 2 - Pilar em balanço com seção circular	125
Tabela 5.12 – Esforços totais para o Exemplo 2 - Pilar em balanço com seção circular	126
Tabela 7.1 – Pilar biarticulado, seção retangular: Carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 86,6$, $f_{ck} = 70$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$, $\alpha_E = 1,0$	133
Tabela 7.2 – Pilar biarticulado, seção retangular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 86,6$, $f_{ck} = 70$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$	135
Tabela 7.3 – Pilar biarticulado, seção retangular: carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 86,6$, $f_{ck} = 30$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$, $\alpha_E = 1,0$	137
Tabela 7.4 – Pilar biarticulado, seção retangular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos $\lambda = 86,6$, $f_{ck} = 30$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$	138
Tabela 7.5 – Pilar biarticulado, seção retangular: Carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 52$, $f_{ck} = 70$ MPa, $\rho_{s,tot} = 2\%$, $\alpha_E = 1,0$	140

Tabela 7.6 – Pilar biarticulado, seção retangular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 52, f_{ck} = 70 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%$	141
Tabela 7.7 – Pilar biarticulado, seção retangular: Carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 52, f_{ck} = 30 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%, \alpha_E = 1,0$	143
Tabela 7.8 – Pilar biarticulado, seção retangular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 52, f_{ck} = 30 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%$	144
Tabela 7.9 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 80, f_{ck} = 80 \text{ MPa}$ e $\rho_{s,tot} = 4\%$	147
Tabela 7.10 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 80, f_{ck} = 80 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 4\%$	148
Tabela 7.11 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 80, f_{ck} = 40 \text{ MPa}$ e $\rho_{s,tot} = 4\%$..	150
Tabela 7.12 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 80, f_{ck} = 40 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 4\%$	151
Tabela 7.13 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 40, f_{ck} = 80 \text{ MPa}$ e $\rho_{s,tot} = 2\%$..	153
Tabela 7.14 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 40, f_{ck} = 80 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%$	154
Tabela 7.15 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 40, f_{ck} = 40 \text{ MPa}$ e $\rho_{s,tot} = 2\%$..	156
Tabela 7.16 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 40, f_{ck} = 40 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%$	157
Tabela A.1 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 20 MPa.....	166
Tabela A.2 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 40 MPa.....	167
Tabela A.3 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 50 MPa.....	168

Tabela A.4 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 60 MPa.....	169
Tabela A.5 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 80 MPa.....	170
Tabela A.6 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 90 MPa.....	171
Tabela B.1 – Contribuição de cada uma das faixas da seção de concreto para seção retangular vazada.....	173
Tabela B.2 – Contribuição de cada uma das faixas da seção de aço para seção retangular vazada	184
Tabela B.3 – Esforços resistentes da seção de concreto para seção circular.....	186
Tabela B.4 – Esforços resistentes da seção de aço	196

Lista de abreviações

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CA	Concreto armado
CEB	Comitê europeu do concreto
CG	Centro de gravidade
Cf.	Conforme
EC-2	Eurocódigo 2
ELS	Estado limite de serviço
ELU	Estado limite último
FIB	Federação internacional do concreto
GPa	GigaPascal
LN	Linha neutra
MC-2010	Código modelo da CEB-FIB 2010
MPa	MegaPascal
NBR	Norma Brasileira

LISTA DE SÍMBOLOS

A_0	área da seção transversal da peça
A_e	área da seção transversal de externa vazada
A_i	área da seção transversal interna vazada
A_{s0}	área de aço distribuída em cada face ortogonal ao plano de flexão da seção retangular (inclui as barras de canto)
A_{s1}	área de aço uniformemente distribuída em cada face paralela ao plano de flexão da seção retangular (não inclui as barras de canto)
$A_{s,máx}$	área de aço máxima
$A_{s,mín}$	área de aço mínima
b_e	largura externa da seção retangular cheia/vazada
b_j	largura interna da seção retangular vazada
c	coeficiente de curvatura, dado no MC-2010, depende da distribuição da curvatura de primeira ordem ao longo do pilar
C20 a C50	simbologia para a Classe I de resistência a compressão do concreto, estabelecida pela ABNT NBR 8953:2014
C55 a C90	simbologia para a Classe II de resistência a compressão do concreto, estabelecida pela ABNT NBR 8953:2014
d'	distância do CG da armadura até a borda da seção
d	altura útil da seção transversal
D_e	diâmetro externo da seção circular/anelar
D_i	diâmetro interno da seção anelar
E_{ci}	módulo de elasticidade inicial, conforme definição da ABNT NBR 6118:2014
e_a	excentricidade acidental
E_s	módulo de elasticidade do aço

$(EI)_{sec}$	rigidez secante, rigidez a flexão da seção mais solicitada do pilar, obtido através do diagrama momento-curvatura, conforme a ABNT NBR 6118:2014, item 15.3.1.
f_c	resistência do concreto à compressão uniaxial
f_{ck}	resistência característica do concreto à compressão referente aos 28 dias.
f_{cd0}	resistência considerada na deformabilidade do concreto à compressão
f_{cd}	resistência de cálculo do concreto à compressão
f_{yk}	resistência característica ao escoamento do aço
f_{yd}	resistência de cálculo ao escoamento do aço
H_d	força horizontal
h_e	altura externa da seção retangular cheia/vazada
h_j	altura interna da seção retangular vazada
H_i	altura total do lance no cálculo do ângulo de desaprumo local
I_0	momento de inércia da seção transversal
I_c	momento de inércia da seção de concreto
I_s	momento de inércia da seção metálica
k	número de barras da seção circular
l_e	comprimento de flambagem, igual comprimento equivalente do pilar biarticulado e igual ao dobro do comprimento do pilar em balanço.
$M_{1d,mín}$	momento fletor mínimo de primeira ordem
M_{cj}	momento fletor resistente da seção j de concreto
M_m	momento fletor máximo
M_{Rd}	momento resistente de cálculo da seção transversal
M_x	momento fletor na abscissa x
n	expoente da expressão da lei constitutiva do concreto no diagrama parábola-retângulo, conforme a ABNT NBR 6118:2014

N_{sd}	força normal solicitante de cálculo
q_d	força horizontal de cálculo, uniformemente distribuída ao longo do lance
p	na seção retangular, número de barras que compõem a armadura lateral de cada face paralela ao plano de flexão
$1/r$	curvatura da seção transversal
R_{cj}	força resistente da seção j de concreto
R_e	raio da seção circular externa
R_j	raio da seção circular interna j
R_s	raio da circunferência onde se distribui uniformemente a armadura
x	profundidade da linha neutra
z	ordenada da camada de concreto ou da barra de armadura
z_1	limite inferior de integral
z_2	limite superior de integral
z_{si}	ordenada da i ésima-barra de aço
α_b	coeficiente de transformação do lance com momentos de extremidade diferentes em momentos de extremidade iguais e de sentidos opostos para obter o pilar padrão
α_d	quociente entre a força normal aplicada no pilar e a carga de Euler
α_E	coeficiente dependente do tipo de agregado graúdo, utilizado para a determinação do módulo de elasticidade inicial do concreto
δ'	profundidade relativa do cobrimento na seção retangular
β	ângulo da barra de armadura na seção circular/anelar
ε_c	deformação específica do concreto
ε_{cu}	deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura para o diagrama parábola-retângulo

ε_{c2}	deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico para o diagrama tensão-deformação parábola-retângulo
ε_s	deformação específica da barra de aço
ε_{yd}	deformação específica de escoamento de cálculo do aço
ϕ	diâmetro da barra de armadura
γ_{c0}	coeficiente de segurança para a deformabilidade para o concreto, igual a 1,2
γ_c	coeficiente de segurança para o concreto no ELU, igual a 1,40
γ_s	coeficiente de segurança para o aço, igual a 1,15
ε_{si}	deformação da i-ésima barra de aço
λ	índice de esbeltez do pilar
μ_{c1}	momento fletor relativo da seção externa de concreto
μ_{c2}	momento fletor relativo da seção interna de concreto
μ_c	momento fletor relativo
ν_{c1}	força normal relativa da seção externa de concreto
ν_{c2}	força normal relativa da seção interna de concreto
ν_c	força normal relativa
θ_1	desaprumo do lance
σ_c	tensão normal no concreto
σ_s	tensão normal no aço
ω_d	taxa mecânica de armadura
ξ	profundidade relativa da linha neutra

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	26
1.1 CONTEXTO	26
1.2 DELIMITAÇÃO DO TEMA.....	27
1.3 JUSTIFICATIVA	28
1.4 OBJETIVO.....	31
1.4.1 Objetivo geral.....	31
1.4.2 Objetivos específicos	31
CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	33
2.1 FLEXÃO COMPOSTA NORMAL	33
2.2 ESTUDOS ANTERIORES: DIMENSIONAMENTO DE PILARES.....	34
2.2.1 Dimensionamento de pilares de acordo com a NBR 6118:2003 (SCADELAI, 2004)	34
2.2.2 Análise de pilares esbeltos de concreto armado submetidos a flexo-compressão oblíqua (BORGES, 1999).....	35
2.2.3 Avaliação da ductilidade de pilares de concreto armado, submetidos à flexo- compressão reta com e sem adição de fibras metálicas (LIMA JÚNIOR, 2003).....	37
2.3 ESTADOS LIMITES	38
2.4 HIPÓTESES ADOTADAS	39
2.5 CARACTERÍSTICAS DOS MATERIAIS.....	41
2.5.1 Aço.....	41
2.5.2 Concreto	43
2.5.2.1 Estado limite último (ELU).....	43
2.5.2.2 Deformabilidade	45
2.5.2.3 Módulo de Elasticidade do Concreto	51
2.6 DOMÍNIOS DE DEFORMAÇÃO	53
2.7 NÃO-LINEARIDADES.....	56
2.7.1 Não-linearidade física	56
2.7.1.1 Diagrama momento-curvatura conforme ABNT NBR 6118:2014	57

2.7.1.2 Diagrama momento-curvatura conforme MC-90	58
2.7.2 Não-linearidade geométrica.....	59
2.7.2.1 Aplicação de séries de Fourier (séries de senóides)	60
2.7.2.2 Analogia do pilar-padrão conforme ABNT NBR 6118:2014.....	61
2.7.2.3 Aproximação de Dischinger	63
2.8 CONSIDERAÇÕES CONSTRUTIVAS	64
2.8.1 Imperfeições Globais	64
2.8.2 Momentos mínimos	66
2.9 SEÇÃO TRANSVERSAL.....	67
2.9.1 Seção retangular	68
2.9.2 Seção circular.....	69
2.10 PLANILHAS ELETRÔNICAS.....	70
CAPÍTULO 3 - CAPACIDADE RESISTENTE DA SEÇÃO	72
3.1 SEÇÕES RETANGULARES CHEIAS E VAZADAS.....	72
3.1.1 Geometria da seção e conexão da deformação com a curvatura	72
3.1.2 Esforços resistentes da seção de concreto.....	73
3.1.3 Esforços resistentes da seção metálica.....	74
3.2 SEÇÕES CIRCULARES E ANELARES.....	76
3.2.1 Geometria da seção e conexão da deformação com a curvatura	76
3.2.2 Esforços resistentes da seção de concreto.....	78
3.2.3 Esforços resistentes da seção metálica.....	79
CAPÍTULO 4 - DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA.....	82
4.1 CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA.....	82
4.2 EXEMPLOS.....	84
4.2.1 Exemplo 1	84
4.2.2 Exemplo 2	87
CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DE SEGUNDA ORDEM.....	91
5.1 PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO.....	91
5.2 FLEXÃO COMPOSTA DE BARRAS PRISMÁTICAS ESBELTAS.....	93
5.2.1 Falta de retilineidade.....	95
5.3 PILAR BIARTICULADO	98

5.3.1 Carga horizontal no meio do vão	98
5.3.2 Carga uniformemente distribuída	100
5.3.3 Momentos aplicados nas extremidades.....	103
5.3.4 Exemplo.....	105
5.4 PILAR EM BALANÇO.....	113
5.4.1 Carga horizontal no topo do pilar.....	113
5.4.2 Carga uniformemente distribuída	115
5.4.3 Momento aplicado no topo	117
5.4.4 Exemplo.....	119
CAPÍTULO 6 - METODOLOGIA	127
6.1 FERRAMENTA COMPUTACIONAL	127
6.2 OBTENÇÃO DO MOMENTO SOLICITANTE TOTAL.....	127
6.3 COMPARAÇÃO COM OUTROS TIPOS DE ANÁLISE	130
6.3.1 Esbeltez.....	131
6.3.2 Resistência à compressão do concreto	131
6.3.3 Agregado graúdo (coeficiente α_E).....	131
CAPÍTULO 7 - ANÁLISES.....	132
7.1 PILAR BIARTICULADO, SEÇÃO RETANGULAR	132
7.1.1 Pilar biarticulado, seção retangular, $\lambda = 86,6$ e $f_{ck} = 70$ MPa	133
7.1.2 Pilar biarticulado, seção retangular, $\lambda = 86,6$ e $f_{ck} = 30$ MPa	136
7.1.3 Pilar biarticulado, seção retangular, $\lambda = 52$ e $f_{ck} = 70$ MPa	140
7.1.4 Pilar biarticulado, seção retangular, $\lambda = 52$ e $f_{ck} = 30$ MPa.....	143
7.2 PILAR BIARTICULADO, SEÇÃO CIRCULAR.....	146
7.2.1 Pilar biarticulado, seção circular, $\lambda = 80$ e $f_{ck} = 80$ MPa	147
7.2.2 Pilar biarticulado, seção circular, $\lambda = 80$ e $f_{ck} = 40$ MPa	150
7.2.3 Pilar biarticulado, seção circular, $\lambda = 40$ e $f_{ck} = 80$ MPa	153
7.2.4 Pilar biarticulado, seção circular, $\lambda = 40$ e $f_{ck} = 40$ MPa	156
CAPÍTULO 8 - CONCLUSÃO	159
REFERÊNCIAS.....	161
APÊNDICE A - RESISTÊNCIA PARA DEFORMABILIDADE DO CONCRETO.....	165
APÊNDICE B - CAPACIDADE RESISTENTE DA SEÇÃO EXEMPLOS.....	172

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTO

A sociedade exige obras duráveis, com dimensões em planta e vãos livres cada vez maiores para acomodar uma gama maior de variações arquitetônicas. Essas condições levam a um projeto com poucos elementos estruturais que necessitam de grande rigidez para combater as ações horizontais (ventos e sismos).

O concreto armado é o material construtivo mais utilizado no Brasil, gera maior demanda de trabalho entre os engenheiros projetistas. Com o desenvolvimento tecnológico dos materiais utilizados na construção civil, várias pesquisas têm surgido para melhorar o aproveitamento da capacidade resistente do aço e do concreto. Esse avanço possibilitou estruturas cada vez mais esbeltas.

Com isso, maior atenção deve ser dada à deformabilidade da estrutura, e é imprescindível que o processo de dimensionamento das estruturas, principalmente os pilares, considere os efeitos de segunda ordem e o estado limite último de instabilidade para o cálculo correto dos esforços solicitantes e resistentes, onde considera-se a posição deformada da estrutura.

Do mesmo modo, a revisão da norma ABNT NBR 6118:2014 passou a admitir concretos do grupo 2, com classe de resistência característica f_{ck} na faixa de 55 MPa a 90 MPa. Um trabalho que contemple essa segunda classe de resistência, assim como a lei constitutiva do concreto que inclua o módulo de elasticidade na deformabilidade do pilar, preenche uma lacuna no presente contexto.

1.2 DELIMITAÇÃO DO TEMA

Este trabalho examina pilares biarticulados e em balanço, solicitados à flexão composta normal, sujeitos a efeitos de primeira e de segunda ordem, estes últimos em decorrência da ação da força axial de compressão e da esbeltez do pilar, limitada em $\lambda \leq 100$ como nos casos usuais de aplicação de métodos simplificados permitidos pela ABNT NBR 6118:2014.

Esse limite de esbeltez pode chegar a $\lambda \leq 140$, para isso a norma exige métodos de análise mais precisos, tais como os apresentados neste trabalho, além da inclusão do efeito da fluência, que não será abordada neste trabalho visto que a sua consideração precisa é bastante complexa.

Em paralelo ao texto, desenvolveu-se um programa computacional para o dimensionamento de pilares de seções retangulares e circulares, cheias e vazadas, com força normal e armadura constantes ao longo do lance, esta última com distribuição duplamente simétrica na seção transversal retangular e uniformemente distribuída em uma circunferência de raio R_s na seção circular.

Com essas definições, é possível admitir um valor de rigidez secante a favor da segurança (a partir do diagrama momento-curvatura da seção mais solicitada) e que represente todo o lance do pilar.

Nesta análise o pilar estará sujeito às seguintes ações, além da força axial de compressão: (1) Falta de retilineidade, (2) Força horizontal uniformemente distribuída em toda altura, (3) Força horizontal aplicada na seção média do pilar biarticulado ou no topo do pilar em balanço e (4) Momentos fletores aplicados nas extremidades do pilar biarticulado ou no topo do pilar em balanço.

Além da não-linearidade física, decorrente das leis constitutivas tanto do aço quanto do concreto (que será resumida de maneira aproximada na rigidez secante, obtida através do diagrama momento-curvatura) considera-se a não-linearidade geométrica de maneira exata, que decorre da esbeltez e da conseqüente posição deslocada do pilar.

O programa prevê a inclusão dos concretos dos grupos de resistências I, ($20 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$) e II ($55 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$), este último introduzido na revisão da ABNT NBR 6118: 2014.

1.3 JUSTIFICATIVA

O cálculo de estruturas de concreto armado pressupõe duas etapas distintas, que estão intimamente relacionadas: a análise e o dimensionamento. A análise estrutural desempenha um importante papel no desenvolvimento dos projetos de estruturas. O avanço da tecnologia e dos modelos matemáticos propiciam análises inimagináveis até alguns anos atrás, e a utilização desses resultados permite a execução de obras com maior nível de detalhamento, precisão e economia.

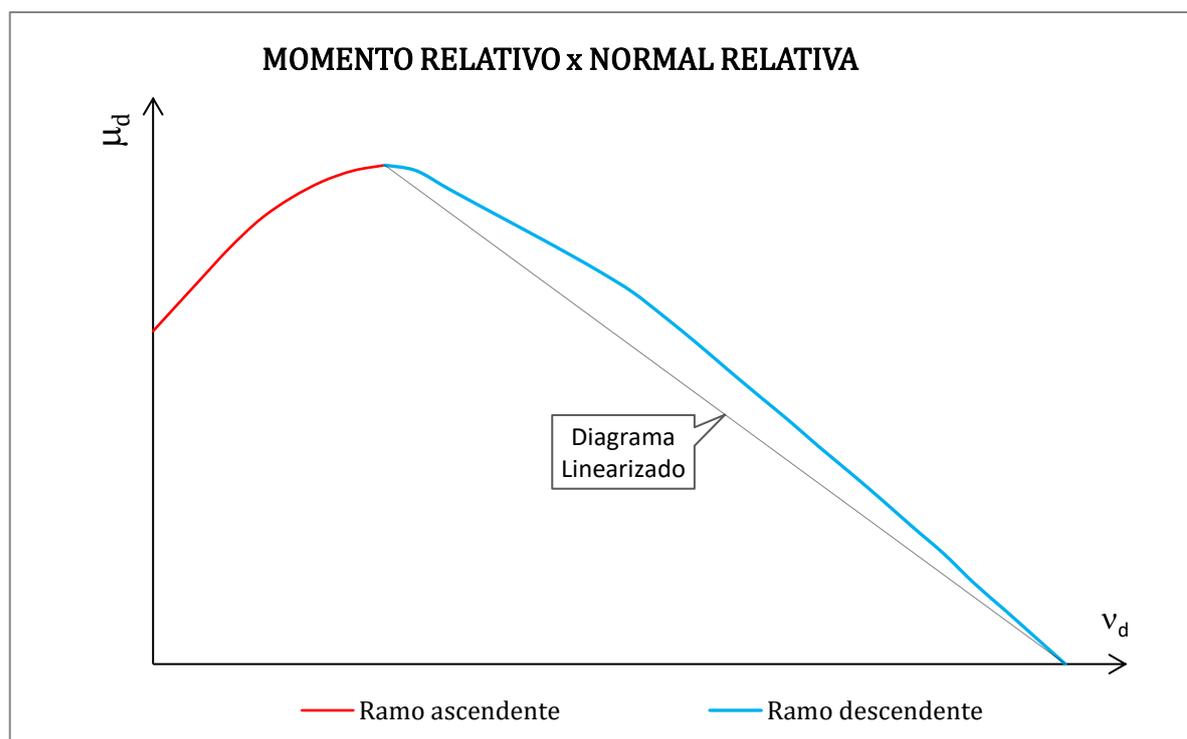
Existem programas comerciais que resolvem a maioria dos problemas relacionados ao dimensionamento e detalhamento de pilares, mas vale salientar que cabe ao projetista compreender o procedimento para o cálculo, sendo esta tarefa necessária para a verificação dos resultados.

Em relação ao dimensionamento de pilares, a ABNT NBR 6118:2014 recomenda alguns métodos, porém, todos apresentam limitações e inconvenientes, conforme descrito a seguir:

Em BUCHAIM, R. e PISSINATTI, C. (2017), estuda-se o dimensionamento de pilares de seção retangular a partir do método da curvatura aproximada, presente na ABNT NBR 6118:2014, que tem como vantagem a obtenção direta da armadura do pilar, sem necessidade do cálculo prévio do momento solicitante total. A não-linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo a deformada da barra como senoidal e a não-linearidade física é considerada de maneira aproximada, a partir da curvatura da seção crítica.

O método da curvatura aproximada refere-se ao ramo descendente da curva de interação do ELU entre momento fletor e força normal, linearizado da divisa dos domínios 3 e 4 até a compressão pura (fim do domínio 5). Este método pode ser estendido ao ramo ascendente, desde a flexão pura até a referida divisa, adotando-se no caso de seção retangular com armadura dupla e simétrica um valor seguro e constante da curvatura. A Figura 1.1 ilustra a situação analisada.

Figura 1.1 - Diagrama de interação, Momento relativo x Normal relativa



Fonte: O autor

Além disso, limita-se a esbelteza do pilar em $\lambda \leq 90$, assim como o cobrimento das camadas de armadura, de modo que a armadura comprimida encontre-se em escoamento na divisa dos domínios 3 e 4. Com isto, a curvatura na divisa destes domínios é maximizada e igual a $2\varepsilon_{yd}/(h_e - 2d')$, e pode ser linearizada a favor da segurança até o valor nulo (na compressão pura).

Com essas limitações, o método da curvatura aproximada não pode ser aplicado no dimensionamento de qualquer pilar, pois não atende pilares com seções nos domínios de deformação 2 e 3 (no ramo ascendente do diagrama de interação, como mostra a Figura 1). Ainda assim, o método atende a maior parte dos casos práticos.

Em BUCHAIM, R. (2016) e PISSINATTI, C (2017), estuda-se o dimensionamento de pilares de seção retangular e circular a partir do cálculo do momento solicitante total com a transformação do lance do pilar pertencente ao pórtico espacial no pilar-padrão, conforme a ABNT NBR 6118:2014.

A não-linearidade física é considerada de maneira aproximada, a partir do diagrama momento-curvatura (com o diagrama parábola retângulo para o dimensionamento no estado limite último e para a deformabilidade, embora com diferentes coeficientes de segurança) e a não-linearidade geométrica é considerada de

forma aproximada, com o momento solicitante total obtido pela amplificação dos esforços de primeira ordem, através dos coeficientes α_d .

O diferencial desse trabalho é a correção da deformada do pilar (coeficiente c , da curvatura do lance correspondente aos diversos carregamentos considerados em um caso específico e à influência da força axial), antes admitida como senoidal ($c = \pi^2$), em equação apresentada por BUCHAIM (2016), com base no MC-2010.

O método também limita a esbeltez do pilar em $\lambda \leq 90$. Entretanto, dimensionam-se as seções transversais da flexão simples à compressão pura (Ao longo de todo o primeiro quadrante do diagrama de interação, Figura 1.1), onde a armadura comprimida não precisa necessariamente estar em escoamento.

Em BUCHAIM e DASCHEVI (2016) a não-linearidade geométrica é considerada de maneira exata: obtém-se a deformada do lance e o momento solicitante total a partir das séries de Fourier (séries de senóides), sendo desnecessária a transformação do lance fletido em curvatura simples ou dupla no pilar-padrão. Logo, é desnecessária a aplicação do mencionado coeficiente α_b .

A não-linearidade física também é considerada de maneira aproximada a partir do diagrama momento-curvatura (com o diagrama parábola retângulo para o dimensionamento no estado limite último e para a deformabilidade, embora com diferentes coeficientes de segurança).

Ao comparar os dados com análises anteriores, esse trabalho encontrou diferenças no momento solicitante total que podem chegar aos extremos +25% e -17% nos casos usuais de carregamento.

A dedução por séries de Fourier pode ter imprecisão no que se refere à escolha do número de termos da série (imperceptível se esse número for maior ou igual a 7). Este erro numérico, se eventualmente existir, é eliminado na solução exata da equação diferencial da barra esbelta em flexão composta normal, nos estudos de LANGENDONCK, T. (1944) e MENN, C. (1990), que servirão como base para este trabalho.

A solução por séries de Fourier apresenta a origem do fator de amplificação $1/(1 - \alpha_d)$, usado no método da rigidez aproximada, conforme a ABNT NBR 6118:2014.

O método geral proposto pela ABNT NBR 6118:2014 é obrigatório para pilares com esbeltez $\lambda \geq 140$ e consiste em uma análise não-linear de segunda ordem efetuada com discretização adequada da barra, considerando cada uma das seções.

A não-linearidade física é sintetizada na construção do diagrama momento-curvatura de cada uma das seções, para a obtenção da rigidez secante. A não-linearidade geométrica é admitida a partir do valor da força normal de compressão multiplicada pelos deslocamentos do pilar em cada uma das seções (Método P- Δ).

Assim, o lance do pilar é dividido em um número adequado de segmentos ao longo de seu comprimento, que podem apresentar mudanças de seção ou na configuração de armadura. Quanto maior a precisão desejada, maior o número de divisões, assim como a complexidade dos procedimentos da análise e no gasto computacional (que podem ser considerados como desvantagens do método).

Além do que foi abordado, um dos diferenciais desta dissertação é que, para análise estrutural não-linear, utiliza-se o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração (que também será tratado como Diagrama de Grasser).

Além de incluir o módulo de elasticidade do concreto de maneira explícita, o diagrama de Grasser apresenta melhores resultados ao descrever as relações entre tensões e deformações, levando a melhores resultados nos diagramas momento-curvatura. Em contrapartida, o diagrama parábola-retângulo apresenta melhores resultados na avaliação da capacidade resistente mínima da peça, sendo mais indicado para o dimensionamento de seções no ELU.

1.4 OBJETIVO

1.4.1 Objetivo geral

Desenvolver um programa computacional prático e seguro para o dimensionamento de pilares esbeltos em flexão composta normal.

1.4.2 Objetivos específicos

- Obter o momento solicitante total de pilares esbeltos submetidos à flexão composta normal, de seção transversal, armadura e força normal constantes, via equação diferencial ordinária da deformada do lance;

- Comparar e validar os resultados obtidos com os resultados provenientes de outros quatro tipos de análise, a partir da variação de parâmetros de dimensionamento;
- Analisar a influência do módulo de elasticidade do concreto no dimensionamento de pilares esbeltos, a partir do coeficiente α_E .

Capítulo 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 FLEXÃO COMPOSTA NORMAL

Um elemento está sujeito à flexão composta normal quando o plano de ação do momento fletor resultante for ortogonal à seção transversal e contiver um de seus dois eixos principais de inércia.

Em suas seções transversais atuam combinadamente força normal e momento fletor, resultantes no centro de gravidade, o que confere à seção apenas tensões solicitantes normais.

É possível representar de modo estaticamente equivalente o efeito mecânico interno de um elemento sujeito à flexão composta normal apenas com uma carga axial excêntrica.

Em um pilar formado por material de comportamento não-linear (como o concreto armado), quando submetido ao mesmo carregamento, o equilíbrio torna-se impossível para cargas superiores à carga limite, pois o momento solicitante é superior ao resistente já a partir da origem do diagrama momento-curvatura, pois nela ambos são nulos. Esta carga é definida na compressão simples quando nessa origem são iguais as derivadas dos momentos solicitante (deformada senoidal) e resistente.

Neste trabalho, supõe-se a força normal como $N_{cri} > N_{sd} > 0$, de compressão e positiva. Se $N_{sd} = 0$, recai-se no caso de flexão simples. Se $N_{sd} < 0$, tem-se o caso da tração, que diminui os efeitos de segunda ordem (e não será abordado neste trabalho).

2.2 ESTUDOS ANTERIORES: DIMENSIONAMENTO DE PILARES

2.2.1 Dimensionamento de pilares de acordo com a NBR 6118:2003 (SCADELAI, 2004)

Este trabalho estuda o dimensionamento de pilares de acordo com a ABNT NBR 6118:2003. Tem-se por objetivo analisar os itens desta norma que estão relacionados ao dimensionamento de pilares, assim como investigar e comparar a validade dos métodos aproximados.

Com este objetivo, analisa-se exemplos de dimensionamento de pilares: utiliza-se os métodos da curvatura aproximada, da rigidez κ aproximada e acoplado a diagramas M, N, $1/r$, de acordo com a ABNT NBR 6118:2003.

Os pilares analisados possuem concreto C25 e aço CA-50, com seção transversal de 26 cm x 40 cm e cobrimento de 2,5 cm, com d' igual a 4 cm. Houve variações nos valores de esbeltez e força normal nos 2 casos analisados, $\lambda = 50$ com $N_{sd} = 1330$ kN; e $\lambda = 140$ com $N_{sd} = 400$ kN respectivamente.

Adotou-se como base o método do pilar-padrão acoplado a diagramas M-N- $1/r$, por apresentar uma formulação mais refinada, além de ser utilizado no dimensionamento de pilares com $\lambda < 140$, e por apresentar resultados mais confiáveis que os demais métodos aproximados, que se limitam a $\lambda < 90$.

Para o pilar com $\lambda = 50$, pode-se observar que, em relação ao método base (pilar-padrão acoplado a diagramas M-N- $1/r$), o método com rigidez κ aproximada apresentou diferenças em torno de 3%, enquanto que para o método do pilar-padrão com curvatura aproximada a diferença foi da ordem de 11%.

Para o pilar com $\lambda = 140$, apesar dos métodos da curvatura aproximada e da rigidez κ aproximada estarem fora do seu limite de aplicação ($\lambda < 90$), as diferenças encontradas foram consideráveis, em torno de 13% para o método da rigidez κ aproximada e 15% para o método da curvatura aproximada.

Enquanto os casos onde $\lambda = 50$ os resultados são favoráveis a segurança, para $\lambda = 140$ o resultado está contra a segurança, já que os métodos da curvatura aproximada e rigidez κ aproximada resultaram armaduras menores do que o método acoplado a diagramas M-N- $1/r$.

Conclui-se que a diferença encontrada é significativa, no entanto utilização dos métodos aproximados não deve ser descartada, pois possuem grande utilidade no caso de estimativas ou pré-dimensionamentos, assim como em obras de pequeno porte, onde a diminuição proposta por métodos de dimensionamento mais exatos é praticamente desprezível em relação ao custo total da obra.

2.2.2 Análise de pilares esbeltos de concreto armado submetidos a flexo-compressão oblíqua (BORGES, 1999)

Este trabalho apresenta a análise de aspectos que interferem no estudo da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado. Realizou-se um trabalho fundamentado em conceitos teóricos e ensaios práticos, com base no método geral e do equilíbrio (pilar-padrão). O objetivo é testar a viabilidade desses métodos e torná-los mais amplos e acessíveis ao uso de pilares esbeltos de concreto armado.

Os pilares analisados têm seção retangular, com índices de esbeltez entre 50 e 110 (na direção mais crítica), nos quais aplica-se uma excentricidade à carga (flexo-compressão normal) com valores que variam de 50 mm a 100 mm.

Investigou-se a validade do processo aproximado do pilar padrão, assim como a influência de fatores no comportamento dos pilares, como: índice de esbeltez, resistência do concreto, taxa de armadura e valor da excentricidade do ponto de aplicação da força normal.

O índice de esbeltez apresenta-se como um fator determinante na análise de pilares. Devido à sua tamanha influência (que é quadrática), este é tomado como o parâmetro que define a análise a ser aplicada de acordo com as recomendações da NB-1. Os pilares e suas características, como também os resultados dessa análise, encontram-se na Tabela 2.1.

Quanto à resistência do concreto, constatou-se que à medida que esse valor cresce, há um aumento significativo no valor da carga última em pilares curtos. Para pilares esbeltos verifica-se um aumento na capacidade resistente, porém, de maneira mais discreta. A possibilidade de ruína por instabilidade aumenta à medida em que se aumenta o valor da resistência do concreto, pois a seção transversal pode ter menores dimensões.

Tabela 2.1- Dados e resultados para pilares de seção retangular - Cálculo da carga última

Pilar	A_c	λ_x	λ_y	e_{ix}	e_{iy}	P_u (kN)		Diferença
nº	cmxcm	adm		cm		Exato	Padrão	%
1	20x60	40	13	2,0	2,0	2326	2349	0,98
2	20x60	60	20	2,0	2,0	1992	2032	1,97
3	20x60	80	27	2,0	2,0	1580	1621	2,53
4	20x60	100	33	2,0	2,0	1202	1240	3,06
5	20x60	120	40	2,0	2,0	916	947	3,27
6	20x60	140	47	2,0	2,0	710	736	3,53
7	20x20	40	40	5,0	2,0	998	1017	1,87
8	20x20	60	60	5,0	2,0	828	848	2,36
9	20x20	80	80	5,0	2,0	645	664	2,86
10	20x20	100	100	5,0	2,0	495	506	2,17
11	20x20	120	120	5,0	2,0	378	385	1,82
12	20x20	140	140	5,0	2,0	294	300	2,00
13	20x60	40	13	2,0	2,0	1527	1551	1,55
14	20x60	60	20	2,0	2,0	1240	1267	2,13
15	20x60	80	27	2,0	2,0	943	961	1,87
16	20x60	100	33	2,0	2,0	705	719	1,95
17	20x60	120	40	2,0	2,0	534	545	2,02
18	20x60	140	47	2,0	2,0	414	421	1,66
19	20x20	40	40	5,0	2,0	734	748	1,87
20	20x20	60	60	5,0	2,0	621	639	2,82
21	20x20	80	80	5,0	2,0	503	518	2,90
22	20x20	100	100	5,0	2,0	400	411	2,68
23	20x20	120	120	5,0	2,0	318	327	2,75
24	20x20	140	140	5,0	2,0	255	261	2,30

Fonte: Adaptado de Borges (1999)

Quanto ao processo do pilar padrão, os resultados foram satisfatórios, desde que respeitadas as suas limitações. As falhas detectadas no processo do pilar padrão são decorrentes da consideração da não-linearidade física de forma aproximada, e não devido à não-linearidade geométrica, considerada a partir de uma elástica senoidal.

A discrepância entre os resultados torna-se maior à medida que cresce o valor da esbeltez, e é mais grave para os casos de flexo-compressão oblíqua. Nesses casos, a forma da seção transversal passa a ser um fator importante. Encontraram-se melhores resultados em seções quadradas.

2.2.3 Avaliação da ductilidade de pilares de concreto armado, submetidos à flexo-compressão reta com e sem adição de fibras metálicas (LIMA JÚNIOR, 2003)

Este trabalho investiga o comportamento e a ductilidade de pilares com concreto de alta resistência confinados, com e sem adição de fibras metálicas, submetidos à flexo-compressão.

Para tanto, realizou-se uma revisão bibliográfica a respeito dos fatores que influenciam o comportamento pós-pico dos pilares. Com esses dados, desenvolveram-se estudos paramétricos que se baseiam no Método dos Elementos Finitos, com o intuito de estabelecer os modos de influência de cada fator.

Com base nesses estudos um programa experimental foi proposto, e quinze pilares de concreto armado com dimensões de 15 cm x 15 cm e altura de 170 cm foram ensaiados a compressão excêntrica, com o objetivo de investigar a influência da excentricidade, da taxa de armadura transversal e da taxa de adição de fibras metálicas no comportamento pós-pico desses elementos estruturais.

Para realização dos ensaios foi confeccionado um par de rótulas unidirecionais, as quais apresentaram excelente desempenho, conseguindo transferir integralmente o momento externo aplicado ao pilar.

Constatou-se que quando os valores dos três fatores (excentricidade, taxa de armadura e taxa de adição de fibras metálicas) analisados são elevados, a ductilidade desses elementos estruturais é melhorada. Foi observado que o efeito da flexão faz com que as tensões de confinamento se distribuam de modo diferenciado dentro da seção transversal dos pilares; contudo, observou-se que a tensão de confinamento na região comprimida da seção transversal pouco é modificada.

2.3 ESTADOS LIMITES

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, o estado-limite de serviço (ELS) está relacionado ao desempenho da estrutura, no que se refere a deslocamentos, ao conforto do usuário, durabilidade, aparência e boa utilização, sendo necessária a verificação destas condições, principalmente em obras de grande vulto.

O estado-limite último (ELU), segundo a ABNT NBR 6118:2014, está relacionado à segurança da estrutura, como qualquer forma de ruína, colapso ou esgotamento da capacidade resistente da peça estrutural, levando à paralisação do uso e deixando de atender as finalidades para qual foi projetada.

Para FUSCO (1978), como há dificuldade em definir o estado físico em que se inicia a ruptura do concreto, convencionou-se quantificar o estado limite último por meio de sua deformação de encurtamento.

No dimensionamento de uma seção de concreto armado sujeita a solicitações normais, avalia-se o estado último de ruptura do concreto na região comprimida (encurtamento) e o alongamento último da armadura tracionada, em vista das seções transversais mais solicitadas.

Para SANTOS (1981), o estado limite último do concreto é definido pela tensão de compressão e pelo encurtamento que o leva à ruptura. O estado limite último do aço é determinado por um escoamento máximo que caracteriza o alongamento plástico. Conforme FUSCO (1978), o estado limite último é caracterizado quando ao menos uma dessas situações é alcançada.

BUENO (2009) cita que as estruturas falham de diversas formas, dependendo de seu tipo, condições de apoio, carregamentos e materiais utilizados. Sendo que o estado limite último pode ser atingido de dois modos: esgotamento da capacidade resistente ou instabilidade do equilíbrio.

O esgotamento da capacidade resistente é típico de estruturas pouco esbeltas, enquanto que a instabilidade do equilíbrio é mais comum em elementos de maior esbeltez.

Em pilares esbeltos a instabilidade do equilíbrio pode ser atingida antes do esgotamento da capacidade resistente da seção transversal. Isso ocorre devido aos efeitos de segunda ordem, quando as deformações levam a um aumento dos esforços solicitantes,

os quais crescem mais rapidamente que os esforços resistentes, levando a peça a atingir o estado limite último de instabilidade.

2.4 HIPÓTESES ADOTADAS

Para a verificação e o dimensionamento dos pilares analisados neste trabalho, adotam-se as seguintes hipóteses:

- Leis constitutivas dos materiais: Com resistências minoradas pelos coeficientes de segurança;
- Leis constitutivas do aço: Tem a mesma resistência na tração e na compressão;
- Leis constitutivas do concreto: Após a fissuração da seção transversal, este trabalho desprezará a resistência à tração do concreto;
- Equações de equilíbrio: Os esforços solicitantes são iguais aos esforços resistentes;
- Solidariedade dos materiais: Aderência perfeita entre o aço e concreto, isso quer dizer que a deformação das barras da armadura passiva em tração (antes da fissuração) e em compressão é a mesma do concreto ao seu entorno. Esta é a condição de compatibilidade de deformações entre os materiais;
- Desconsideram-se a ação da força cortante e da torção: restringe-se o cálculo exclusivamente as solicitações normais;
- Desconsidera-se a fluência do concreto: Com a esbeltez limitada a $\lambda \leq 100$, a fluência não será abordada, visto que sua consideração precisa é bastante complexa;
- Manutenção da seção plana: Hipótese de Bernoulli, as seções planas permanecem planas após a deformação e até o estado limite último. Com esta

hipótese, ao impor uma curvatura, as deformações normais específicas são proporcionais à sua distância à linha neutra da seção;

- Deslocamentos e deformações não excessivos: as flechas podem ser obtidas a partir da expressão aproximada da equação diferencial da linha elástica:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M}{EI} \quad (2.4.1)$$

A equação (2.4.1) representa a equação diferencial não-linear de segunda ordem, a qual define a forma exata da linha elástica.

Considera-se que os efeitos de deflexão ao longo da seção do pilar ocorram apenas por flexão. Nesta equação dy/dx e d^2y/dx^2 representam a primeira e a segunda derivadas da função $y(x)$, que corresponde a equação da linha elástica.

Segundo HIBBLER (2004) em seu capítulo 12.2, as especificações para limitação das deformações baseiam-se em questões de tolerância e estética. Sendo assim, as deflexões elásticas para a maioria dos pilares formam uma curva abatida. Por consequência, a inclinação da linha elástica determinada por dy/dx é muito pequena, e o quadrado dessa inclinação é desprezível em comparação com a unidade $(dy/dx)^2 \ll 1$.

Em pilares sob flexo-compressão este termo deve ser considerado para os casos de esbeltez muito alta, como $\lambda > 140$ por exemplo. No presente trabalho, em que se considera $\lambda \leq 100$, a equação (2.4.1) assume a seguinte forma:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (2.4.2)$$

2.5 CARACTERÍSTICAS DOS MATERIAIS

2.5.1 Aço

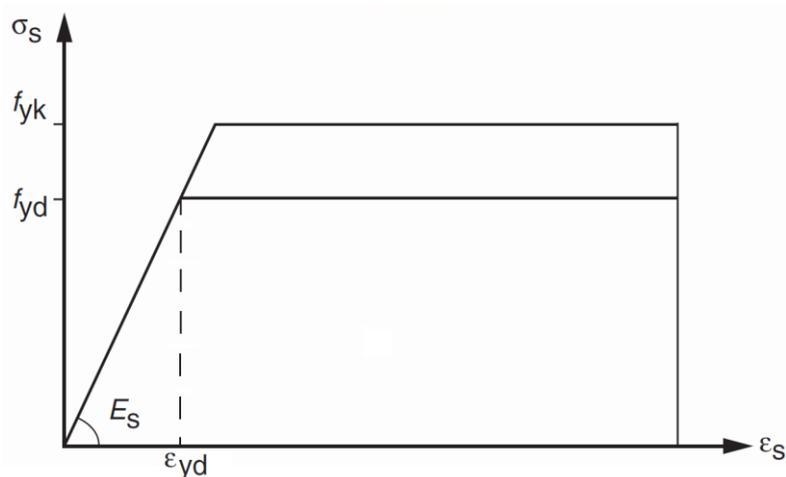
O aço obtido através do processo de laminação a frio apresenta um patamar de escoamento bem definido. Logo, quando o mesmo atinge a tensão máxima, passa a sofrer deformações plásticas, liberando deformações acentuadas sem acréscimo de tensão.

O aço utilizado na construção civil é classificado de acordo com a sua ductilidade, que é a capacidade de dissipação de energia por deformações plásticas até a ruptura. Essa característica é de grande importância para a redistribuição de solicitações e para identificar quando a estrutura está próxima da ruína por flexão, nos domínios 1 a 3.

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, o aço utilizado nos projetos de estruturas de concreto armado deve ser classificado de acordo com a ABNT NBR 7480:2007, pelos diâmetros, seções transversais nominais e pelo valor característico da resistência de escoamento.

Para o cálculo dos estados limites de serviço e último, adota-se a lei constitutiva bilinear, indicada na Figura 2.1, válida para intervalos de temperatura entre -20°C e 150°C :

Figura 2.1 - Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas



Fonte: Adaptado da ABNT NBR 6118:2014

Obtém-se o diagrama tensão-deformação do aço através de ensaios de tração. Porém, o diagrama também é válido para a compressão, com a ressalva das deformações limites serem, no máximo, iguais às do concreto, uma vez que na compressão e na tração (antes da fissuração), de acordo com a hipótese da solidariedade dos materiais (2.4), não há deslizamento entre o concreto e o aço.

Conforme o item 8.3.5 da ABNT NBR 6118:2014, na falta de valores obtidos através de ensaios ou fornecidos pelo fabricante, adota-se o módulo de elasticidade do aço igual a 210 GPa.

O aço CA-50 deve possuir pelo menos duas nervuras longitudinais, contínuas e diametralmente opostas, para impedir o giro da barra dentro do concreto.

Quanto as suas propriedades físicas, para efeito de projeto adota-se:

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa} \quad (2.5.1.1)$$

$$E_s = 210 \text{ GPa} \quad (2.5.1.2)$$

A resistência de cálculo do aço é definida por:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (2.5.1.3)$$

O coeficiente de minoração da resistência do aço, conforme a tabela 12.1 da ABNT NBR 6118:2014, para as combinações normais e combinações excepcionais, respectivamente, é dada por:

$$\gamma_s = 1,15 \quad (2.5.1.4)$$

$$\gamma_s = 1,00 \quad (2.5.1.5)$$

A deformação de cálculo para o início do escoamento do aço CA-50 sob tensão normal é definida por:

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (2.5.1.6)$$

$$\varepsilon_{yd} = \frac{500/1,15}{210} = 2,07\% \quad (2.5.1.7)$$

Com relação ao comportamento mecânico do aço, conforme a Figura 2.1, tem-se a distribuição de tensões segundo a lei constitutiva bilinear dada pelas equações:

$$\sigma_s = E_S \varepsilon_s \text{ se } -\varepsilon_{yd} < \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \quad (2.5.1.8)$$

$$\sigma_s = f_{yd} \text{ se } \varepsilon_s > \varepsilon_{yd} \quad (2.5.1.9)$$

$$\sigma_s = -f_{yd} \text{ se } \varepsilon_s < -\varepsilon_{yd} \quad (2.5.1.10)$$

2.5.2 Concreto

O concreto é um material heterogêneo composto de duas fases, o agregado graúdo e a pasta de cimento e areia. Essas duas fases têm, isoladamente, um comportamento frágil e de resposta linear. Atuando em conjunto, o material heterogêneo tem resposta não-linear.

Após atingir a resistência última, a capacidade do concreto em suportar carregamento sob um estado de tensão de compressão é reduzida progressivamente, com deformações crescentes acima das correspondentes à tensão máxima atingida.

2.5.2.1 Estado limite último (ELU)

O estado limite último do concreto por solicitações normais é fundamentado convencionalmente em deformações limites. No caso dos concretos do grupo I de resistência (C20 a C50) o encurtamento máximo na flexão é $\varepsilon_{cu} = 3,5\%$ e na compressão uniforme é igual a $\varepsilon_{cu} = 2,0\%$.

Para os concretos pertencentes ao grupo II de resistência, C55 a C90, conforme classificação da ABNT NBR 8953:2015, suas respectivas deformações passam a ser função direta da resistência característica f_{ck} conforme valores descritos a seguir:

Para concretos da classe II ($50\text{MPa} < f_{ck} \leq 90\text{MPa}$):

$$\varepsilon_{c2} = 2\% + 0,085\% (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad (2.5.2.1.1)$$

$$\varepsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 35\text{‰} \left(\frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 \quad (2.5.2.1.2)$$

Admite-se no ELU, a lei constitutiva do concreto dada pelo diagrama parábola-retângulo, conforme o item 8.2.10.1 da ABNT NBR 6118:2014. Com isso, tem-se melhores resultados para capacidade resistente de áreas comprimidas, possibilitando a utilização de concretos com resistência até 90 MPa.

A resistência do concreto apresentará dois valores de cálculo, um menor, para o estado limite último, e outro maior, para a deformabilidade do concreto, conforme o item 2.5.2.2.

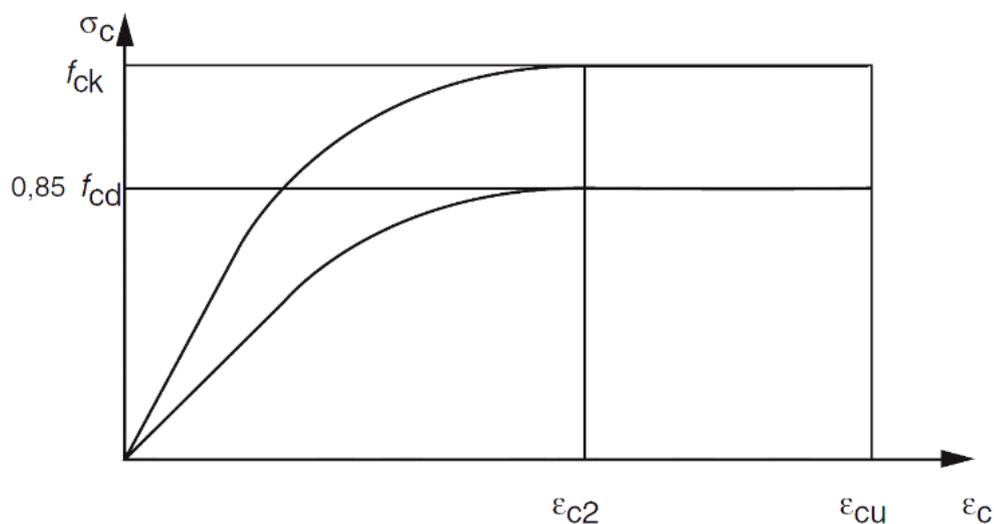
A tensão do patamar, de acordo com o diagrama parábola-retângulo, para o ELU, é igual:

$$f_{cd1} = 0,85 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.5.2.1.3)$$

$$\gamma_c = 1,40 \quad (2.5.2.1.4)$$

Com relação ao comportamento mecânico, a ABNT NBR 6118:2014 apresenta a simplificação da relação tensão-deformação do concreto no estado limite último (ELU), apresentada na Figura 2.2, considerando uma distribuição de tensões segundo um diagrama parábola-retângulo:

Figura 2.2 - Diagrama tensão-deformação idealizado do concreto



Fonte: Adaptado da ABNT NBR 6118:2014

$$\sigma_c = f_{cd1} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \text{ se } \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \quad (2.5.2.1.5)$$

$$\sigma_c = f_{cd1} \text{ se } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \quad (2.5.2.1.6)$$

$$\sigma_c = 0 \text{ se } \varepsilon_c \leq 0 \text{ (tração)} \quad (2.5.2.1.7)$$

Onde:

$$f_{cd1} = 0,85 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.5.2.1.8)$$

$$\gamma_c = 1,4 \quad (2.5.2.1.9)$$

$$f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rightarrow n = 2 \quad (2.5.2.1.10)$$

$$f_{ck} > 50 \text{ MPa} \rightarrow n = 1,4 + 23,4 \left(\frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 \quad (2.5.2.1.11)$$

O coeficiente de 0,85 é produto de três fatores referentes aos seguintes efeitos:

- (1) O Efeito Rüsçh, relacionado à velocidade de deformação do concreto em compressão imposta no ensaio, quer dizer, o ensaio pode ser rápido e durar segundos ou minutos, ou lento e durar horas, dias ou, por extensão, anos;
- (2) O concreto ganha resistência com o passar do tempo;
- (3) Fator de conversão da resistência de um corpo de prova padrão (cilíndrico) em um elemento estrutural de forma prismática.

2.5.2.2 Deformabilidade

O diagrama parábola-retângulo foi adotado por RÜSCH (1960) por apresentar bons resultados para a capacidade portante da peça, para o dimensionamento de seções sob solicitações normais no estado limite último, com o intuito de avaliar a mínima

capacidade resistente de áreas comprimidas na flexão, considerado o efeito de carga de longa duração.

Em relação à deformabilidade, o MC-1978 é explícito nessa restrição ao referir-se ao diagrama parábola retângulo, em seu item 10.4.3.1:

“... chama-se atenção para o fato de que o diagrama parábola-retângulo não pode ser utilizado para a determinação do módulo de deformação longitudinal, nem, de modo geral, para a análises não-lineares...”

O emprego do diagrama parábola-retângulo é vedado nas análises de 2ª ordem uma vez que não pretende descrever as relações genéricas entre tensões e deformações no concreto, que nos permite avaliar deformações nas peças e as relações momento-curvatura para diversos níveis de esforços solicitantes.

Para a análise estrutural não-linear, pode ser empregado o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração (ou seja, sem a consideração da fluência), também chamado de Diagrama de Grasser, conforme consta no item 7.2.3.1.3 do MC-2010, no item 3.1.5 da NP EN 1992-1-1:2010 e no item 10.10.3.4 da ABNT NBR 7187:1987.

Pelos motivos acima expostos, no que se refere à deformabilidade do concreto, é recomendável a substituição do diagrama parábola-retângulo pelo diagrama tensão-deformação proposto na Figura 2.3.

Vale ressaltar que o diagrama a parábola retângulo também é de curta duração. O efeito da velocidade mais lenta de deformação do ensaio está embutido no coeficiente 0,85.

Para o Diagrama de Grasser, o MC-2010 e a NP EN 1992-1-1:2010 indicam as deformações limites ε_{c1} e ε_{cu1} , que são funções de $f_{cm} = f_{ck} + 8$ MPa. Devido ABNT NBR 7187:1987 apresentar essas deformações apenas para os concretos da primeira classe de resistências (C20 a C50), adotou-se as deformações limites convencionadas no diagrama parábola-retângulo, ε_{c2} e ε_{cu} . Mesmo com a alteração das deformações, não há alteração significativa no ramo ascendente do Diagrama de Grasser, que é o trecho de maior relevância para análise da deformabilidade do pilar.

A relação entre σ_c e ε_c sob carga de curta duração é apresentada na Figura 2.3 de acordo com o MC-2010, pode ser descrita pelas seguintes equações:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cd0}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \quad (2.5.2.2.1)$$

$$\frac{\sigma_c}{f_{cd0}} > 0 \quad (2.5.2.2.2)$$

$$0 \leq |\varepsilon_c| \leq |\varepsilon_{cu}| \quad (2.5.2.2.3)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \quad (2.5.2.2.4)$$

$$k = \frac{1,05|\varepsilon_{c2}| E_{cs}}{f_{cd0} \gamma_{c0}} \quad (2.5.2.2.5)$$

Figura 2.3 - Representação esquemática da relação entre tensão e deformação sob carga de curta duração



Fonte: O autor

Nota-se que esta lei inclui explicitamente o módulo de elasticidade secante do concreto, E_{cs} . Para a deformabilidade, altera-se o valor do coeficiente de segurança do concreto para:

$$\gamma_{c0} = 1,20 \quad (2.5.2.2.6)$$

Essa redução do coeficiente de segurança do concreto para a deformabilidade é admitida pelo MC-2010 com os seguintes argumentos:

“... o fator de conversão da resistência de um corpo de prova padrão a um elemento estrutural de forma qualquer, incluído em γ_c , não se aplica a deformabilidade...”.

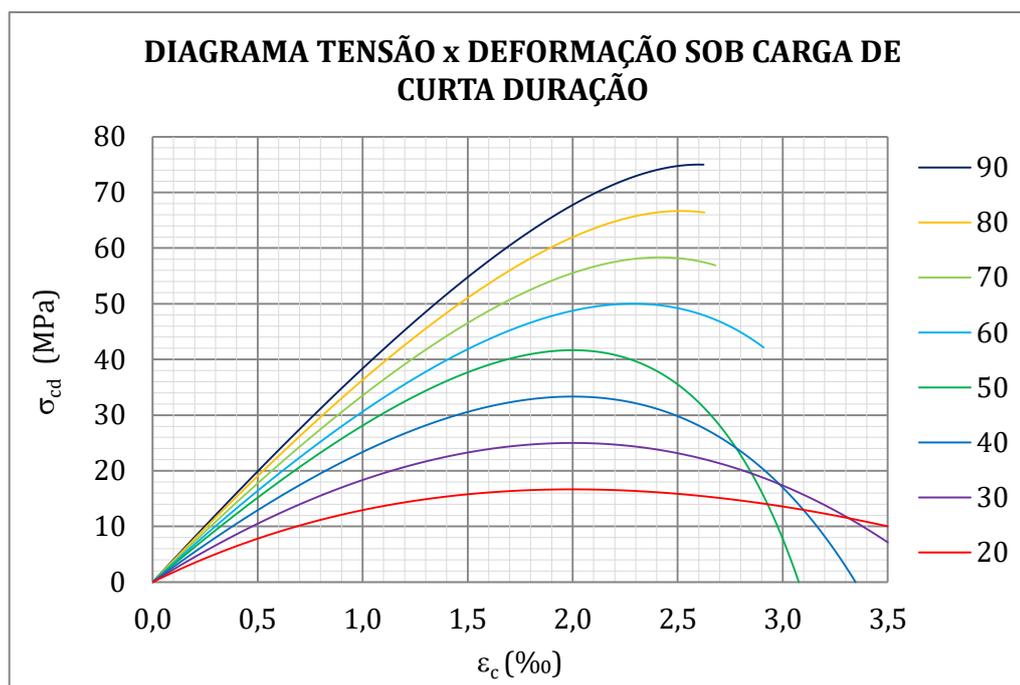
“... uma resistência média baixa para toda a estrutura ou elemento é menos provável do que para a seção transversal...”.

“... os deslocamentos têm de ser determinados usando diagramas tensão-deformação do concreto, que sejam caracterizados por pelo menos três parâmetros mutuamente independentes:

- (a) a resistência f_{cd} ;
 - (b) a deformação correspondente ao ponto máximo desse diagrama;
 - (c) a inclinação na origem, que é o módulo de elasticidade tangente E_{ci} .
- Os valores de f_{cd} e E_{ci} podem ser determinados dividindo-se os valores característicos por um coeficiente de segurança $\gamma_{c0} = 1,2$ ”.

A Figura 2.4 apresenta o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração para diversas classes de resistências, onde o f_{ck} dos concretos varia de 20 até 90 MPa.

A Figura 2.5 e a Figura 2.6 apresentam comparações entre a utilização do diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e a utilização do diagrama parábola-retângulo, ambos para avaliação da deformabilidade do concreto (considera-se a resistência igual a $f_{ck}/1,2$ para os dois diagramas).

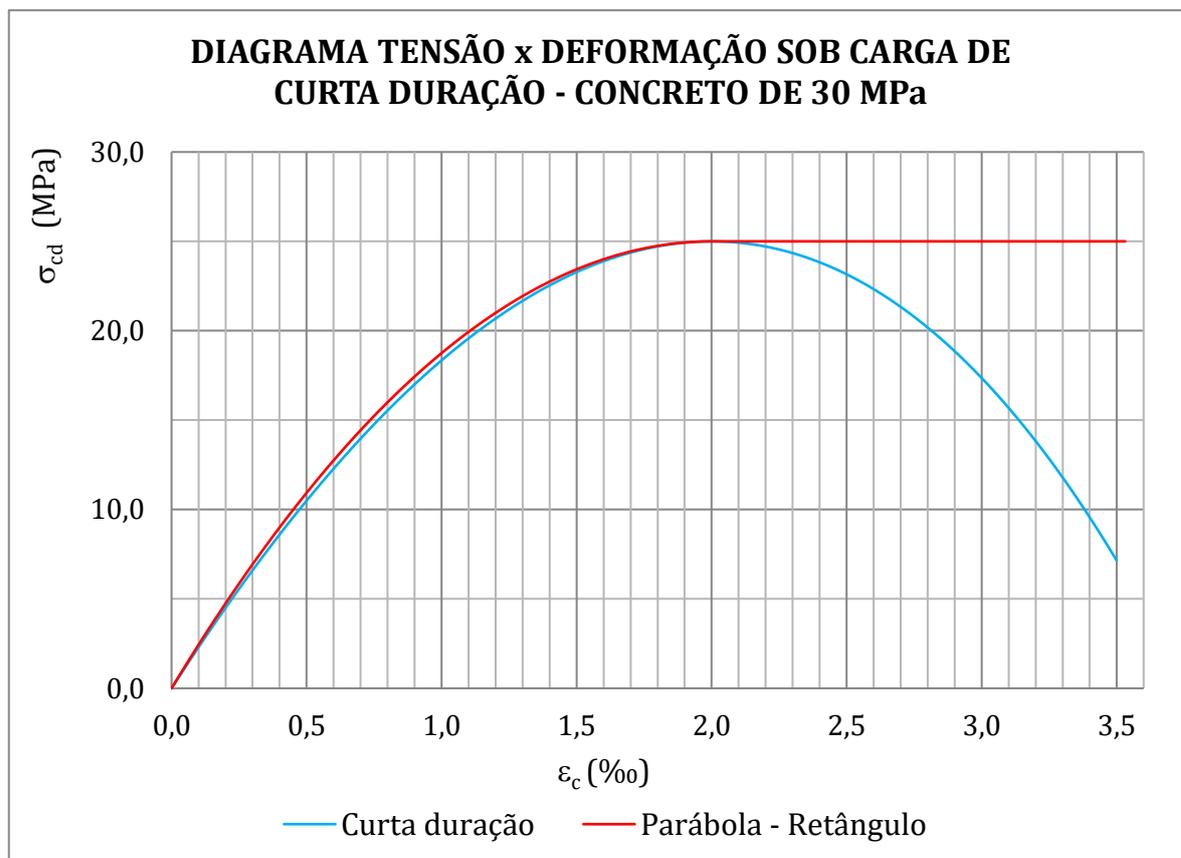
Figura 2.4 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração, f_{ck} de 20 a 90 MPa

Fonte: O autor

A Figura 2.5 considera a resistência do concreto igual a 30 MPa e a Figura 2.6 considera a resistência do concreto igual a 70 MPa. O Apêndice A apresenta comparações similares para concretos com resistências iguais a: 20 MPa; 40 MPa; 50 MPa; 60 MPa; 80 MPa e 90 MPa. Em todas as análises, os agregados considerados foram o granito e o gnaisse, onde $\alpha_E = 1,0$.

A Tabela 2.2 e a Tabela 2.3 expõem a tensão obtida para cada deformação considerando os diagramas de Grasser e o parábola-retângulo, assim como a diferença entre os diagramas em relação ao diagrama parábola-retângulo.

Figura 2.5 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 30 MPa



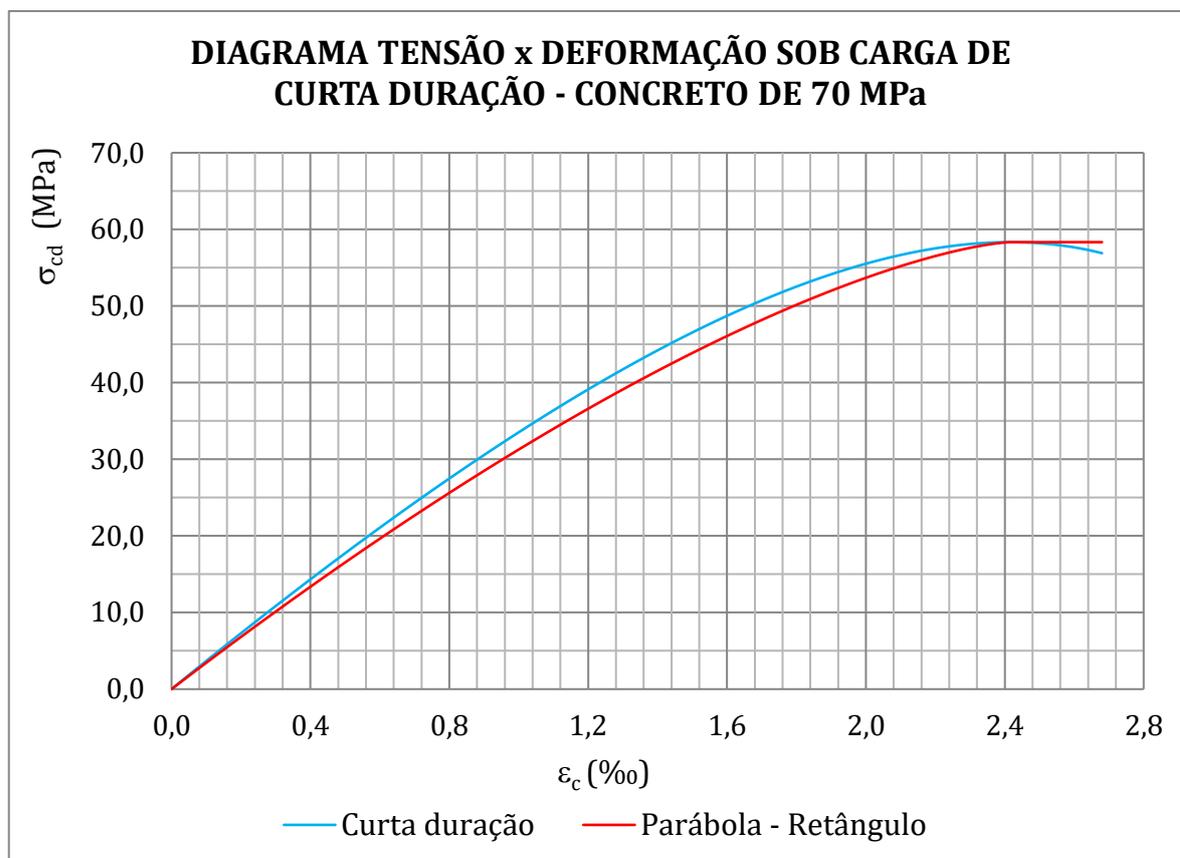
Fonte: O autor

Tabela 2.2 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 30 MPa

ϵ_c (‰)	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
Par. - Retâng. (MPa)	0,0	10,9	18,8	23,4	25,0	25,0	25,0	25,0
Grasser (MPa)	0,0	10,5	18,3	23,3	25,0	23,2	17,4	7,1
%	-	-4,0	-2,2	-0,7	0,0	-7,4	-30,6	-71,4

Fonte: O autor

Figura 2.6 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 70 MPa



Fonte: O autor

Tabela 2.3 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 70 MPa

ϵ_c (‰)	0,00	0,38	0,76	1,14	1,52	1,90	2,28	2,66
Par. - Retâng. (MPa)	0,0	12,7	24,4	35,0	44,3	51,9	57,4	58,3
Grasser (MPa)	0,0	13,6	26,2	37,4	46,9	54,1	58,0	57,2
%	-	7,2	7,3	7,0	6,0	4,1	1,1	-2,0

Fonte: O autor

2.5.2.3 Módulo de Elasticidade do Concreto

Segundo GONÇALVES (2016), o módulo de elasticidade pode ser entendido como a inclinação da relação tensão-deformação, quando existir o trecho linear. Quando não ocorrer esse trecho, ele pode ser caracterizado pela inclinação da reta secante à curva, de modo a representar a lei de Hooke.

O módulo de elasticidade do concreto depende dos módulos de elasticidade dos seus componentes. A ABNT NBR 6118:2014 leva em consideração o tipo de agregado graúdo na determinação do módulo de elasticidade do concreto, que pode ser estimado segundo as expressões:

$$f_{ck} \leq 50\text{MPa} \rightarrow E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (2.5.2.3.1)$$

$$f_{ck} > 50\text{MPa} \rightarrow E_{ci} = 21,5 \cdot 10^3 \alpha_E \sqrt[3]{\frac{f_{ck}}{10} + 1,25} \quad (2.5.2.3.2)$$

Onde:

$\alpha_E = 1,2$ para basalto e diabásio;

$\alpha_E = 1,0$ para granito e gnaisse;

$\alpha_E = 0,9$ para calcário;

$\alpha_E = 0,7$ para arenito;

Onde E_{ci} e f_{ck} são dados em MPa;

O módulo de deformação secante pode ser obtido segundo método de ensaio estabelecido na ABNT NBR 8522:2017, ou estimado pela expressão:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (2.5.2.3.3)$$

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci} \quad (2.5.2.3.4)$$

A Tabela 2.4 apresenta os valores do módulo de elasticidade em função da resistência característica à compressão do concreto considerando o uso de granito ou gnaisse como agregado graúdo (para outros agregados multiplicar os valores da Tabela por α_E)

Tabela 2.4- Valores estimados de módulo de elasticidade em função da resistência característica à compressão do concreto

Classe de resistência	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C60	C70	C80	C90
E_{ci} (GPa)	25,0	28,0	30,7	33,1	35,4	37,6	39,6	41,6	43,4	45,1	46,7
α_i	0,85	0,86	0,88	0,89	0,90	0,91	0,93	0,95	0,98	1,00	1,00
E_{cs} (GPa)	21,3	24,2	26,8	29,4	31,9	34,3	36,6	39,5	42,4	45,1	46,7

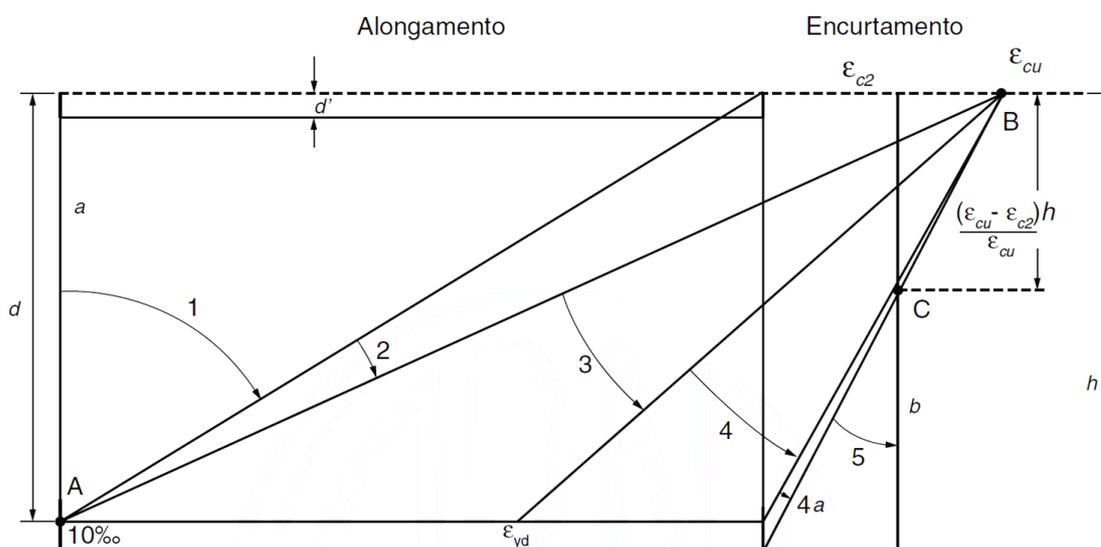
Fonte: Adaptado da ABNT NBR 6118:2014

2.6 DOMÍNIOS DE DEFORMAÇÃO

Segundo a hipótese de Bernoulli (manutenção da seção plana), a distribuição de deformações se dá linearmente ao longo da altura da seção transversal, conforme a Figura 2.7. A linha neutra correspondente à solicitação imposta é medida a partir da borda comprimida ou menos tracionada da seção.

Segundo a Figura 2.7, caracteriza-se o ELU quando a reta de distribuição de deformações passa por pelo menos um dos polos A, B ou C, caracterizados por uma deformação limite.

Figura 2.7 - Domínios de deformação das seções transversais no estado limite último



Fonte: adaptação da figura 17.1 da ABNT NBR 6118:2014

O polo A corresponde ao limite de alongamento do aço, o polo B corresponde ao limite de deformação de compressão do concreto em flexão, e o ponto C corresponde ao limite para a deformação do concreto em compressão simples.

BUCHAIM (2015) enfatiza que o ELU se baseia em deformações limites convencionadas, tanto no alongamento do aço (polo A), quanto no encurtamento do concreto (polos B e C).

Para cada um dos domínios de deformação, têm-se os seguintes comportamentos dos materiais:

No domínio 1, a seção transversal está sujeita a tração pura ou flexo-tração de pequena excentricidade, o concreto não participa da resistência da seção e o aço trabalha com alongamento máximo, igual a $\varepsilon_s = \varepsilon_{s,lim} = -10\%$.

As retas de deformação passam pelo polo A, e a linha neutra varia entre $-\infty$ até 0. É o caso de tirantes, com ou sem momento fletor aplicado.

Quando a linha neutra tende a $-\infty$, tem-se um estado uniforme de deformação na seção transversal. Se a armadura se distribui assimetricamente na seção, há força normal de tração e momento fletor resistente não nulo. Este momento só é nulo se a armadura tiver distribuição simétrica na seção.

Neste caso, se a linha neutra se aproximar de 0, a seção passa a estar sujeita a uma flexo-tração, com pequena excentricidade.

No domínio 2, a seção transversal está sujeita a flexão simples ou composta de grande excentricidade, o concreto em compressão trabalha com deformação igual a $0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$ e o aço trabalha com deformação igual a $\varepsilon_s = \varepsilon_{s,lim} = -10\%$.

Este caso ocorre quando a linha neutra entra na seção, sem que o concreto atinja seu encurtamento limite.

Se a força resultante do banzo tracionado for maior do que a do banzo comprimido, pode-se dizer que a seção transversal está submetida à flexo-tração com grande excentricidade.

Neste domínio, podem estar ainda os tirantes, as vigas (particularmente as de seção T) e as lajes (caso mais frequente).

No domínio 3, a seção transversal está sujeita a flexão simples ou composta de grande excentricidade, o concreto em compressão trabalha com deformação $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$ e o aço trabalha com deformação na faixa $-10\% \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd}$.

Com a linha neutra na seção, o concreto atinge sua deformação limite. O aço já atingiu seu alongamento $\geq \varepsilon_{yd}$ e passa a escoar. Todas as retas de deformação passam pelo polo B.

Neste domínio estão as vigas, os pilares com predominância de flexão (galpão industrial e estruturas pré-moldadas) e, com menos frequência, as lajes.

Quando a força resultante do banzo comprimido é maior que a do tracionado, pode-se dizer que a seção transversal está sujeita a flexo-compressão com pequena excentricidade.

Quando as forças resultantes em cada um dos dois banzos forem iguais, pode-se dizer que a seção transversal está sujeita a flexão pura.

No domínio 4, a seção transversal está sujeita a flexão simples ou composta com pequena excentricidade, o concreto em compressão trabalha com deformação igual a $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$ e o aço tracionado trabalha com deformação igual a $\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$, ou seja, não escoar, mas o aço comprimido pode escoar.

No domínio 4a, a seção transversal está sujeita a flexão composta, o concreto em compressão trabalha com deformação de $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$ e ambos os aços estão em compressão, com escoamento ou não da armadura de maior encurtamento.

Com a linha neutra variando de $(h - d_2)$ até $+\infty$, pode-se dizer que a seção está sujeita a flexo-compressão com pequena excentricidade, ou seja, as armaduras estão todas comprimidas, e a seção tem apenas banzo comprimido.

Nos dois casos, as retas de deformações ainda passam pelo polo B. Neste domínio estão em geral os pilares de edificações comuns.

Domínio 5, a seção transversal está sujeita a compressão uniforme ou não uniforme, o concreto em compressão trabalha com deformação igual a $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$ e ambos os aços estão em compressão, escoando ou não a armadura. As retas de deformação passam para o polo C.

Com a linha neutra em $+\infty$, não há curvatura da seção transversal, e pode-se dizer que esta se encontra em flexo-compressão, se não houver simetria da armadura em relação ao eixo principal, ortogonal ao plano dos esforços e passante pelo CG da seção. Do contrário, a seção encontra-se em compressão pura, como os pilares com predominância de força de compressão.

Nos domínios 1 e 2, tem-se uma ruptura dúctil, por deformação plástica excessiva, ou seja, a ruptura é pelo lado do aço tracionado, enquanto nos 4, 4a e 5 tem-se ruptura brusca, pelo encurtamento limite do concreto.

No domínio 3, há rompimento do concreto, mas sua ruptura é antecedida pelo escoamento do aço tracionado, de modo que há uma transição entre as duas formas de ruptura, dependendo de quão grande ou pequeno é o alongamento plástico do aço nesse domínio.

2.7 NÃO-LINEARIDADES

Em uma análise não-linear, a resposta da estrutura, seja em deslocamentos, seja em esforços ou tensões, possui comportamento não-linear, ou seja, não-proporcional ao carregamento à medida que este cresce.

O comportamento não-linear é resultado de dois aspectos que são intrínsecos a todas as estruturas reais de concreto armado: a não-linearidade física e a não-linearidade geométrica. Os fenômenos da lei constitutiva não-linear do concreto, da fissuração, fluência, e do escoamento da armadura conferem ao concreto armado um comportamento fisicamente não-linear.

2.7.1 Não-linearidade física

O comportamento do material é linear quando obedece à Lei de Hooke, ou seja, quando a tensão é proporcional à deformação. Caso contrário, o comportamento do material é não-linear.

A não-linearidade física é caracterizada pelo comportamento não-linear dos materiais, observado no diagrama tensão-deformação, que resulta em variações nos valores do módulo de elasticidade e da inércia da seção, de acordo com o nível de sollicitação.

O concreto é um material que apresenta não-linearidade física, ou seja, as deformações não são linearmente proporcionais às tensões. O aço, quando empregado no concreto armado, é um material com comportamento físico não-linear, já que se considera

esse material trabalhando muitas vezes plastificado após atingir a tensão de escoamento e nessa situação as deformações deixam de ser linearmente proporcionais às tensões.

De acordo com a ABNT NBR 6118:2014, na análise dos esforços globais de 2ª ordem em estruturas reticuladas a não-linearidade física pode ser considerada de maneira aproximada, com valores médios de rigidez secante à flexão.

Ainda de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, os valores de rigidez devem ser vistos como orientativos, e não podem ser usados para avaliar esforços locais de 2ª ordem, mesmo com uma discretização maior da modelagem.

Esta orientação se deve ao fato dos valores conduzirem a um valor de rigidez média de toda a estrutura, e presume-se que conduza a um dimensionamento seguro dos pilares. Isto porque a estrutura sob ação das cargas e deformações impostas perde rigidez como um todo (70% nas lajes e de 60% a 50% nas vigas, e 20% em pilares).

Logo, os esforços solicitantes nos pilares (especialmente os momentos fletores) ficam maiores pois a redução em sua rigidez é proporcionalmente menor que nas vigas e lajes, em relação a uma análise elástica linear convencional.

2.7.1.1 Diagrama momento-curvatura conforme ABNT NBR 6118:2014

Em seu item 15.3.1, a ABNT NBR 6118:2014 apresenta a relação momento-curvatura para obtenção da rigidez secante, como mostra a Figura 2.8. Nesta alternativa há a introdução do coeficiente γ_{f3} , onde as ações do ELU são majoradas na análise por γ_f/γ_{f3} .

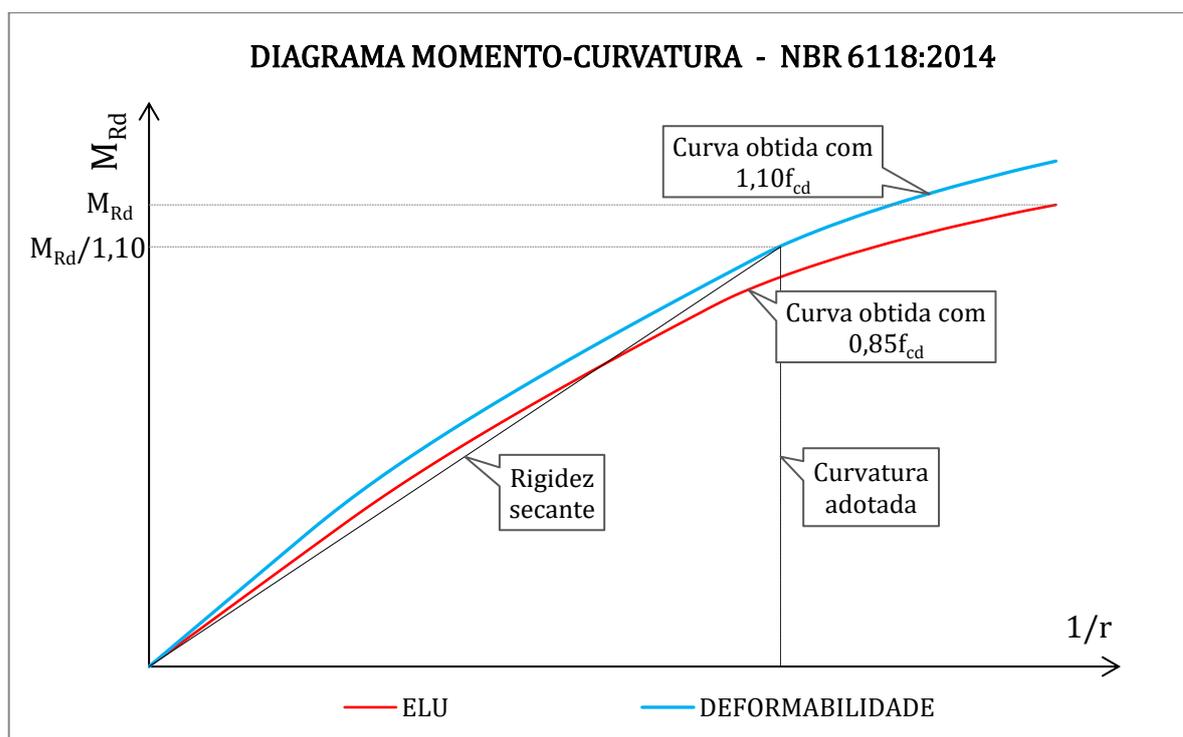
No diagrama que representa a deformabilidade do pilar, há um acréscimo de 29,4% ($1,1/0,85 = 1,294$) na resistência do concreto em relação ao ELU. Além disso, há outra parcela de acréscimo advindo da redução da força normal (pelo menos nos casos em que esta esteja além do ponto de máximo da curva de interação momento-força normal), que deve ser dividida por $\gamma_{f3} = 1,10$ (valor indicado pela ABNT NBR 6118:2014).

Encontra-se o valor do momento resistido pela seção no ELU dividido pelo coeficiente γ_{f3} na curva da deformabilidade. A rigidez secante corresponde a inclinação da reta que liga o ponto correspondente a M_{Rd}/γ_{f3} com a origem do diagrama momento-curvatura, conforme mostra a Figura 2.8.

A rigidez secante para seção retangular, de armadura dupla e simétrica, considerando concretos de resistência C20 a C90, além do $\gamma_{f3} = 1,00$ (a favor da segurança), é dado por:

$$EI_{sec} = 32\left(1 + 5 \frac{M_{sd}}{hN_{sd}}\right)h^2N_{sd} \quad (2.7.1.1.1)$$

Figura 2.8 - Relação momento-curvatura da ABNT NBR 6118:2014



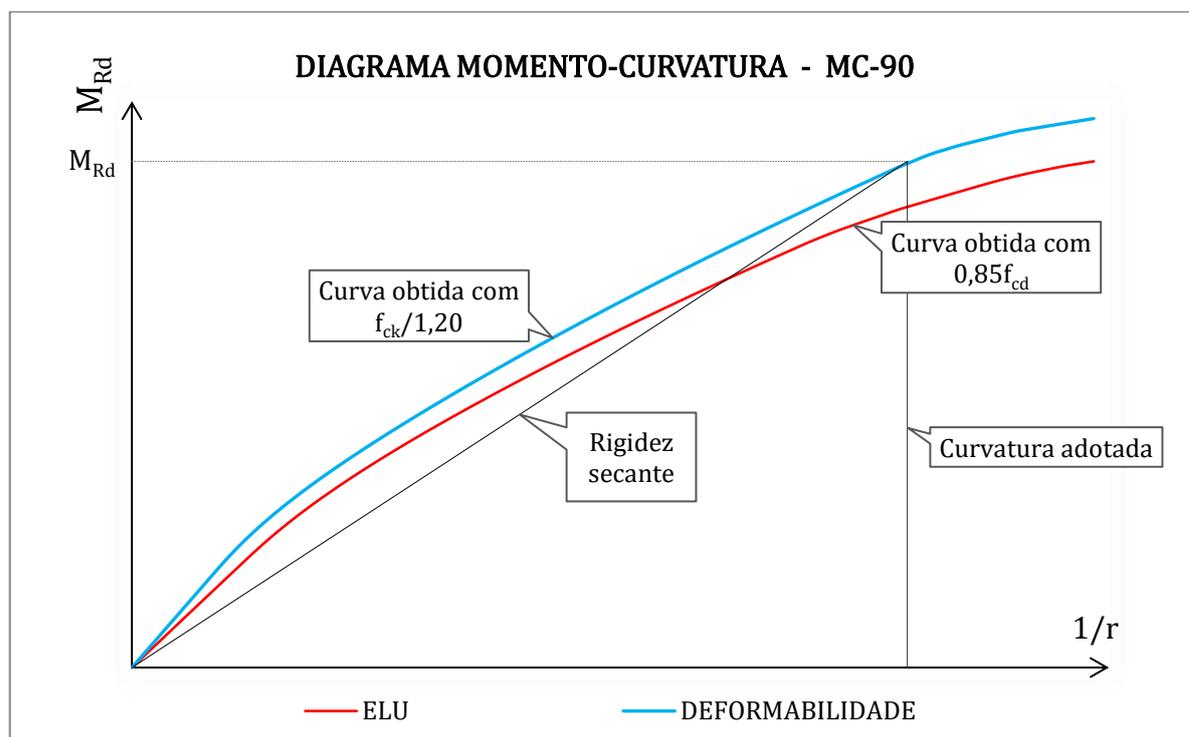
Fonte: O autor

2.7.1.2 Diagrama momento-curvatura conforme MC-90

A alternativa indicada no item 16.3.4 do MC-90 traz diferenças conceituais na obtenção da rigidez secante em relação ao que recomenda a ABNT NBR 6118:2014. O diagrama que representa a deformabilidade do pilar considera $f_{ck}/1,20$ para resistência do concreto e as solicitações resistentes últimas (M_{rd}) não são divididas por γ_{f3} .

No diagrama da deformabilidade do pilar, em correspondência ao momento resistente M_{rd} , obtém-se a curvatura, e do quociente destas duas grandezas, encontra-se o valor da rigidez secante à flexão $(EI)_{sec}$, como mostra a Figura 2.9.

Figura 2.9 - Relação momento-curvatura do MC-90



Fonte: O autor

2.7.2 Não-linearidade geométrica

A análise de primeira ordem considera o equilíbrio das forças e dos momentos na configuração geométrica inicial (não deformada) de uma estrutura. No entanto, o equilíbrio real de uma estrutura se dá numa configuração deformada, e a análise de sua estabilidade está intimamente relacionada com a magnitude de seus deslocamentos.

Segundo BORGES (1999), analisar o comportamento de um pilar de concreto armado com base na teoria de segunda ordem significa considerar também a não-linearidade geométrica, ou seja, a posição deformada da estrutura e a influência dos deslocamentos sobre as solicitações ao longo da barra.

Segundo PINTO (1997), quando se menciona a não-linearidade geométrica, está sendo considerada aquela causada pela mudança da geometria da estrutura, ou seja, mudança da posição da estrutura no espaço.

Este trabalho considera a não-linearidade geométrica de maneira exata, a partir das deduções das equações diferenciais de cada carregamento transversal, baseado nas teorias de LANGENDONCK, T. (1944). Este assunto será melhor abordado no Capítulo 5.

2.7.2.1 Aplicação de séries de Fourier (séries de senóides)

Essa solução toma como base TIMOSHENKO, S.P. e GERE, J.M. (1961) assim como Buchaim (2016). Este método aplica as séries de Fourier (também denominadas como séries trigonométricas) na representação dos deslocamentos transversais do eixo da barra.

O deslocamento transversal $y(x)$ é representado por uma série trigonométrica de infinitos termos, que satisfaz às condições de contorno do pilar. Os coeficientes a_i podem ser obtidos a partir da energia de deformação por flexão da barra.

$$y(x) = a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + a_3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \dots \quad (2.7.2.1.1)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l M \frac{M}{EI} dx \quad (2.7.2.1.2)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (2.7.2.1.3)$$

A segunda derivada segunda de (2.7.2.1.1) em relação a x também é uma soma de senóides:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = & -a_1 \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) - a_2 2^2 \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \\ & - a_3 3^2 \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \dots \end{aligned} \quad (2.7.2.1.4)$$

Encontra-se a solução completa em TIMOSHENKO, S.P. e GERE, J.M. (1961) e Buchaim (2016).

A Tabela 5 resume as equações de primeira e de segunda ordem para os mesmos carregamentos considerados nesta dissertação de mestrado: (1) Falta de retilineidade, (2) Momentos fletores aplicados nas extremidades do pilar biarticulado ou no topo do pilar em balanço, (3) Força horizontal aplicada na seção média do pilar biarticulado ou no topo do pilar em balanço e (4) Força horizontal uniformemente distribuída em toda altura.

Tabela 2.5 – Momento de primeira e de segunda ordem para Séries de Fourier

Ação	Momento de primeira ordem M_{1d}	Momento de segunda ordem M_{2d}
Falta de retilinearidade	$N_{sd}e_0 \text{sen} \left[\left(\frac{\pi(i-1)}{10} \right) \right]$	$N_{sd} \frac{\alpha_d}{1-\alpha_d} e_0 \text{sen} \left[\frac{\pi(i-1)}{10} \right]$
Momento M_{ad} , aplicado na extremidade A	$M_{ad} \frac{\pi(i-1)}{10}$	$\frac{2M_{ad}\alpha_d}{\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \left[\frac{n\pi(i-1)}{10} \right]}{n(n^2 - \alpha_d)}$
Momento M_{bd} , aplicado na extremidade B	$M_{bd} \frac{\pi(i-1)}{10}$	$\frac{2M_{bd}\alpha_d}{\pi} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \left[\frac{n\pi(11-i)}{10} \right]}{n(n^2 - \alpha_d)}$
Força horizontal H_d concentrada a meia altura do pilar	$\frac{H_d l_e}{20} (i-1)$, se $i \leq 6$ $\frac{H_d l_e}{20} (11-i)$, se $i > 6$	$\frac{2H_d l_e \alpha_d}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \text{sen} \left[\frac{n\pi(i-1)}{10} \right]}{n^2 (n^2 - \alpha_d)}$
Força horizontal q_d uniformemente distribuída ao longo do comprimento do pilar	$\frac{q_d l_e^2}{200} (i-1)(11-i)$	$\frac{4q_d l_e^2 \alpha_d}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \left[\frac{n\pi(i-1)}{10} \right]}{n^3 (n^2 - \alpha_d)}$

Fonte: Adaptado de Buchaim (2016)

Buchaim (2016) divide o lance em 10 segmentos iguais, com $\Delta x = l/10$, onde o número de termos dos somatórios é de $n = 7$. Com a utilização das Séries de Fourier, mostra-se também a origem do fator de amplificação $1/(1-\alpha_d)$, usado em outros métodos de dimensionamento, como o da rigidez aproximada.

$$\alpha_d = -\frac{N_{sd} l_e^2}{\pi^2 EI_{sec}} \quad (2.7.2.1.5)$$

2.7.2.2 Analogia do pilar-padrão conforme ABNT NBR 6118:2014

Nesta solução, dada no MC-2010, usa-se o fator de amplificação corrigido, conforme mostra a equação abaixo para considerar a distribuição de curvaturas de primeira ordem:

$$\text{fator de amplificação corrigido} = \frac{1}{1 - \alpha_d \frac{\pi^2}{c}} \quad (2.7.2.2.1)$$

Onde α_d é o quociente entre a força normal aplicada no pilar N_{sd} e a carga crítica de Euler, correspondente ao pilar de comprimento equivalente l_e , obtida com a rigidez secante (EI_{sec}).

O máximo momento solicitante total resulta do produto do máximo momento solicitante de primeira ordem, provenientes de n ações, pelo fator de amplificação corrigido:

$$M_{sd,total} = \frac{\sum_1^n M_{1d,i}}{1 - \alpha_d \frac{\pi^2}{c}} \quad (2.7.2.2.3)$$

O coeficiente c , em primeira aproximação igualado a π^2 ou 10, é dado no MC-2010, item 7.3.7, pela expressão:

$$c = \alpha_d \pi^2 + (1 - \alpha_d) \frac{\sum_1^n M_{1d,i}}{\sum_1^n \frac{M_{1d,i}}{c_i}} \quad (2.7.2.2.4)$$

Onde:

$M_{1d,i}$ é o momento fletor máximo de primeira ordem do i -ésimo carregamento transversal;

c_i é o coeficiente correspondente ao i -ésimo carregamento transversal, dependente da distribuição de curvatura de primeira ordem ao longo da barra.

Na barra biarticulada c_i assume os seguintes valores:

- (a) falta de retineidade, com deformada senoidal: $c_i = \pi^2$;
- (b) carga uniformemente distribuída q_d em toda altura do pilar: $c_i = 9,6$;
- (c) força horizontal H_d concentrada na seção média do pilar: $c_i = 12$;

(d) momentos $\alpha_b M_{ad}$ (no lance biarticulado) iguais nas extremidades, tracionando a mesma face do pilar, e M_{0d} no lance em balanço: $c_i = 8$.

Na barra em balanço estes coeficientes são os mesmos, exceto o da carga uniformemente distribuída q_d , em que se tem $c_i = 16$.

2.7.2.3 Aproximação de Dischinger

O fator de amplificação descrito nos itens anteriores foi obtido por DISCHINGER (1937) a partir do Método de Vianello para demonstração da carga de flambagem, a qual determina o termo adicional $\frac{\delta}{\vartheta_d - 1}$ ao da deformada senoidal $\frac{\vartheta_d}{\vartheta_d - 1}$, onde ϑ_d é o coeficiente de segurança à flambagem.

$$\vartheta_d = \frac{\pi^2 EI_{sec}}{N_{sd} l_e^2} \quad (2.7.2.3.1)$$

A Tabela 2.6 resume as equações do momento solicitante total para o pilar biarticulado e a Tabela 2.7 resume o pilar em balanço, considera-se os mesmos carregamentos desta dissertação de mestrado:

Tabela 2.6 – Momento solicitante total para o pilar biarticulado, aproximação de Dischinger

Ação	Momento solicitante total M_{sd}
Falta de retilineidade	$N_{sd} e_a \frac{\vartheta_d}{\vartheta_d - 1}$
Momentos aplicados nas extremidades $\alpha_b M_{ad}$	$\frac{\alpha_b M_{ad}}{\pi} \left(\frac{\vartheta_d + 0,273}{\vartheta_d - 1} \right)$
Força horizontal H_d concentrada a meia altura do pilar	$\frac{H_d l_e}{4} \left(\frac{\vartheta_d - 0,188}{\vartheta_d - 1} \right)$
Força horizontal q_d uniformemente distribuída ao longo do comprimento do pilar	$\frac{q_d l_e^2}{8} \left(\frac{\vartheta_d + 0,032}{\vartheta_d - 1} \right)$

Fonte: Adaptado de Buchaim (2016)

Tabela 2.7 – Momento solicitante total para o pilar em balanço, aproximação de Dischinger

Ação	Momento solicitante total M_{sd}
Falta de retilineidade	$N_{sd} e_a \frac{\vartheta_d}{\vartheta_d - 1}$
Momentos aplicados nas extremidades $\alpha_b M_{ad}$	$\frac{\alpha_b M_{ad}}{\pi} \left(\frac{\vartheta_d + 0,273}{\vartheta_d - 1} \right)$
Força horizontal H_d concentrada a meia altura do pilar	$\frac{H_d l_e}{4} \left(\frac{\vartheta_d - 0,188}{\vartheta_d - 1} \right)$
Força horizontal q_d uniformemente distribuída ao longo do comprimento do pilar	$\frac{q_d l_e^2}{8} \left(\frac{\vartheta_d - 0,408}{\vartheta_d - 1} \right)$

Fonte: Adaptado de Buchaim (2016)

2.8 CONSIDERAÇÕES CONSTRUTIVAS

2.8.1 Imperfeições Globais

A ABNT NBR 6118:2014 define que pilares são elementos lineares de eixo reto, usualmente dispostos na vertical, em que os esforços axiais de compressão são preponderantes.

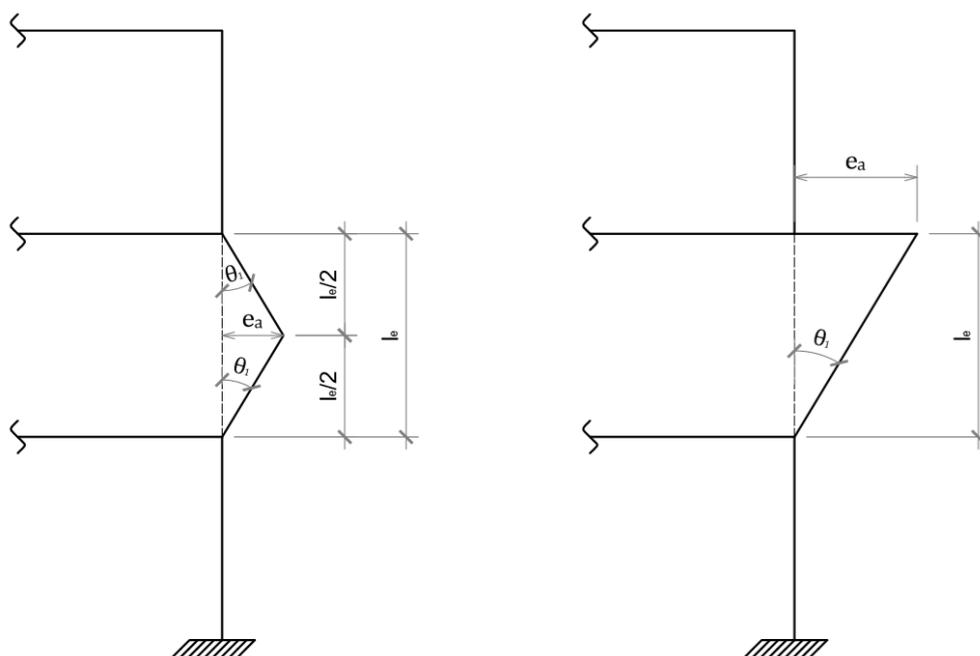
Segundo a ABNT NBR 6118:2014, no dimensionamento destes elementos, devem ser previstas excentricidades devidas a imperfeições construtivas, à fluência do concreto e aos efeitos de segunda ordem. Graças a essas ações, os pilares estão submetidos à flexo-compressão.

De acordo com a Figura 2.10, retirada da ABNT NBR 6118:2014, entre as imprecisões geométricas locais destacam-se os elementos de travamento, o desaprumo e a falta de retilineidade no eixo dos elementos. Para os pilares, conforme a Figura 2.10, importa considerar a falta de retilineidade (item b).

Levando em consideração a falta de retilineidade, a ABNT NBR 6118:2014 determina valores de θ_1 além das excentricidades acidentais mínimas e máximas a serem consideradas no projeto estrutural. O ângulo de desaprumo θ_1 , considerando um lance de pilar, é:

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{l_e}} \quad (2.8.1.1)$$

Figura 2.10 - Imprecisões geométricas locais



Fonte: Adaptação da figura 11.2 da ABNT NBR 6118:2014

Onde:

l_e = Altura do lance em metros;

$$\theta_{1 \text{ mín}} = \frac{1}{300}$$

$$\theta_{1 \text{ máx}} = \frac{1}{200}$$

Para pilar em balanço tem-se $\theta_1 = \frac{1}{200}$

Com isso, calcula-se a excentricidade acidental e_a (em metros), conforme a ABNT NBR 6118: 2014, indicada na Figura 2.10, item b, no lance do pórtico e no pilar em balanço, respectivamente:

$$e_a = \theta_1 \frac{l_e}{2} \quad (2.8.1.2)$$

$$e_a = \theta_1 l_b = \frac{l_b}{200} \quad (2.8.1.3)$$

Onde:

$l_b = l_e/2$ altura do pilar em balanço

Neste trabalho, considera-se a excentricidade por falta de reticidade com variação senoidal, conforme define a ABNT NBR 6118: 2014, no lance do pórtico e no pilar em balanço, respectivamente.

$$e_a = \max \left(\theta_1 \frac{l_e}{2}, \frac{D_e}{30} \text{ ou } \frac{h_e}{30} \right) \quad (2.8.1.4)$$

$$e_a = \max \left(\frac{l_b}{200}, \frac{D_e}{30} \text{ ou } \frac{h_e}{30} \right) \quad (2.8.1.5)$$

Onde:

D_e = diâmetro externo da seção circular/anelar

h_e = altura externa da seção retangular cheia/vazada

Recomenda-se a adoção do maior valor entre as duas excentricidades, conforme se vê em outras normas (na de pontes, por exemplo). Por se tratar de uma ação permanente, não deve ser desconsiderada em nenhum caso.

2.8.2 Momentos mínimos

Conforme o item 11.3.3.4.3 da ABNT NBR 6118:2014, o pilar deve resistir ao momento mínimo de 1ª ordem aplicado em ambas extremidades, produzindo cada qual deslocamentos transversais de mesmo sentido (mas desacompanhado de excentricidade por falta de reticidade), independentemente das solicitações, o que é uma forma de impor uma resistência mínima ao pilar, incluindo o efeito da esbeltez.

$$M_{1d,mín} = N_{sd}(0,015 + 0,03D_e) \quad (2.8.2.1)$$

$$M_{1d,mín} = N_{sd}(0,015 + 0,03H_e) \quad (2.8.2.2)$$

Entretanto, esta mesma norma no item 11.3.3.4.3 libera a inclusão da excentricidade por falta de retilineidade no dimensionamento do pilar na seguinte frase: “nas estruturas reticuladas usuais admite-se que o efeito das imperfeições locais esteja atendido se for respeitado esse valor de momento total mínimo. A este valor devem ser acrescidos os momentos de segunda ordem”.

Esta liberação é discutível, pois a falta de retilineidade não deixa de existir se houver momentos acima de $M_{1d,mín}$. Logo, o razoável é considerar esta ação sempre que o momento solicitante total superar este valor mínimo.

2.9 SEÇÃO TRANSVERSAL

Nos pilares, a armadura longitudinal tem função resistente, enquanto a transversal, quando espaçada convenientemente, evita a flambagem das barras longitudinais comprimidas, impede a deformação transversal e confina o núcleo resistente de concreto.

Conforme o item 18.4.2.1 da ABNT NBR 6118:2014, o diâmetro das barras longitudinais não pode ser inferior a 10 mm nem superior a 1/8 da menor dimensão transversal.

A taxa geométrica de armadura deve respeitar os valores máximos e mínimos especificados em 17.3.5.3 da ABNT NBR 6118:2014. A armadura máxima fica limitada a 4% se houver emendas por traspasse (respeitando a sobreposição de armadura existente em regiões de emenda) e 8% em caso contrário, conforme as equações abaixo:

$$A_{s,máx} = (0,04 \text{ ou } 0,08)A_0 \quad (2.9.1)$$

$$A_{s,mín1} = 0,15 \frac{N_{sd}}{f_{yd}} \quad (2.9.2)$$

$$A_{s,mín2} = 0,004A_0 \quad (2.9.3)$$

$$\text{Se } A_{s,\text{mín1}} > A_{s,\text{mín2}} \text{ então } A_{s,\text{mín}} = A_{s,\text{mín1}} \quad (2.9.4)$$

$$\text{Se } A_{s,\text{mín1}} < A_{s,\text{mín2}} \text{ então } A_{s,\text{mín}} = A_{s,\text{mín2}} \quad (2.9.5)$$

Onde:

A_e = área da seção externa;

A_i = área da seção interna (vazada).

$$A_0 = A_e - A_i \quad (2.9.6)$$

2.9.1 Seção retangular

Considera-se pilares retangulares com seções usuais, cujo maior lado da seção transversal não supere em cinco vezes o seu menor lado b ($h \leq 5b$), e que tenham o comprimento no mínimo igual a três vezes o maior lado da seção ($l \geq \text{máx } 3(b,h)$).

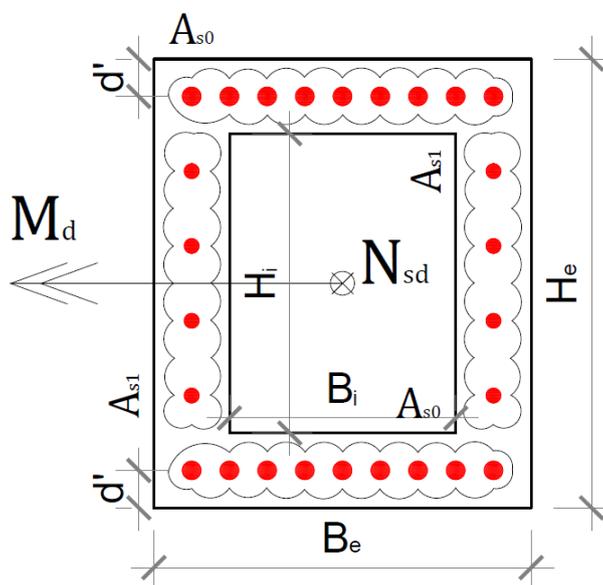
Os elementos que não obedecem a estes requisitos devem ser tratados como pilares-parede, que exigem um estudo mais detalhado, pois podem apresentar os chamados efeitos de segunda ordem localizados. Estes pilares devem atender o que estabelece a Seção 15 da ABNT NBR 6118:2014.

A seção transversal dos pilares não deve ter área inferior a 360 cm^2 , e deve ser composta por no mínimo 4 barras. Pilares retangulares podem ter a menor dimensão pelo menos igual a 14 cm, desde que no dimensionamento as cargas sejam multiplicadas por um coeficiente γ_n .

$$\gamma_n = 1,95 - 0,05 h_e \geq 1 \quad (2.9.1.1)$$

A Figura 2.11 apresenta a convenção que será utilizada para a entrada de dados do programa computacional.

Figura 2.11 – Seção retangular



Fonte: O autor

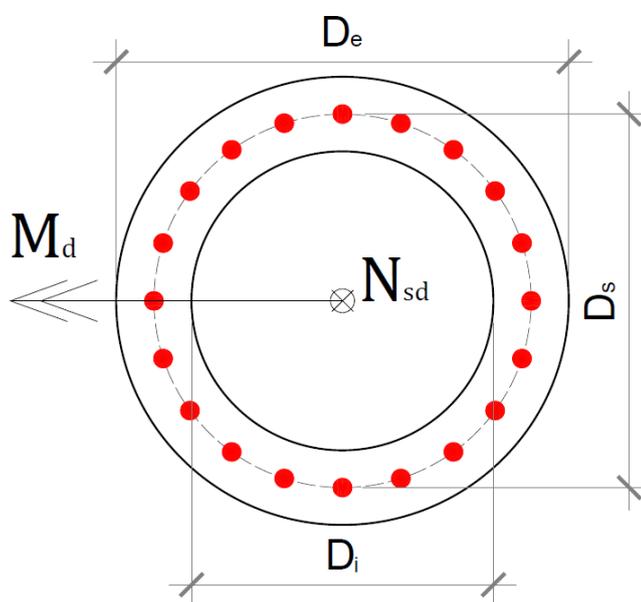
2.9.2 Seção circular

Pilares circulares devem ter diâmetro superior a 22 cm (área aproximadamente igual a 360 cm^2). A espessura da seção anelar é limitada pelo aspecto construtivo, onde se considera o diâmetro da barra, os cobrimentos e estribos (eventualmente com camadas externa e interna de armaduras), além das características do concreto utilizado.

Nas seções circulares e anelares, segundo o item 9.5.2 NP-EN-1992-1-1-2010, a quantidade de barras deve ser par, com valor mínimo de 6 barras, porém, segundo MacGregor, J. G. e Wight J. K. (2009), recomenda-se no mínimo 8 barras.

A Figura 2.12 apresenta a convenção que será utilizada para a entrada de dados do programa computacional.

Figura 2.12 – Seção Circular



Fonte: O autor

2.10 PLANILHAS ELETRÔNICAS

As ferramentas computacionais são de grande auxílio na análise estrutural, no dimensionamento e no detalhamento das estruturas. Neste trabalho, desenvolveram-se programas computacionais práticos e seguros para o dimensionamento de pilares. Para isso, utilizou-se o software Microsoft Excel, e para a implementação dos programas utilizou-se a linguagem VBA, presentes na plataforma Windows.

O Visual Basic for Applications (VBA) é uma linguagem de programação adaptada do Visual Basic, que teve a sua base no BASIC (um acrônimo para Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code, o qual surgiu como forma de ensinar técnicas de programação para estudantes) e está incorporado em algumas aplicações da Microsoft, como o Excel.

O Excel permite a implementação de macros, que são rotinas do VBA anexas às planilhas. Estas rotinas automatizam os vários procedimentos de cálculo e têm grande

funcionalidade em processos repetitivos e iterativos. A Figura 2.13 apresenta a aba da planilha responsável pelo dimensionamento de pilares em balanço com seção retangular.

Figura 2.13 – Imagem do programa

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

PCV Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil

 PROF. DR. ROBERTO BUCHAIM
 PROF. DR. ROMEL DIAS VANDERLEI
 ENG. CELSO PISSINATTI

 Universidade Estadual de Maringá

DIMENSIONAMENTO DE PILARES ESBELTOS DE SEÇÕES RETANGULARES CHEIAS E VAZADAS

The diagram shows a cantilevered column of height H_d fixed at the base. At the top, there is a horizontal load H_d acting to the right, a vertical load N_{sd} acting downwards, and a moment M_0 acting counter-clockwise. A distributed load q_{ld} acts horizontally to the right along the length of the column. The effective length is $l_e = l_d/2$. The column has a rectangular cross-section with width B and height H . The effective depth is d' . The cross-section shows reinforcement areas A_{s1} (top), A_{s2} (bottom), A_{s3} (left), and A_{s4} (right).

f_{ck}	γ_c	$0,85 f_{cd}$	α_e	f_{yk}	f_{yd}
25 MPa	1,40	15,18 MPa	1,00	500 MPa	435 MPa

ϵ_{sk}	ϵ_{sk}	γ_s	A_{s1}/A_{s2}	$n_{s1,s2}$	$\rho_{s1,s2}$
2,00%	3,50%	1,00	10,0%	10	8%

B	H	B_i	H_i	d'	l_e
250 mm	250 mm	0 mm	0 mm	40 mm	3,5 m

Vinculação	l_e	N_{sd}	M_{sd}	H_d	q_d
Balanço	7,0 m	569,2 kN	10,0 kNm	5,0 kN	2,0 kN/m

A_s	I_s	$\sqrt{l_e} / A_s$	l_e
62500,0 mm ²	3,255E+08 mm ⁴	72,2 mm	97,0

CALCULAR

ν_d	e_s	M_{sd}	β_{ed}	$M_{sd,ed}$	$\beta_{s1,s2}$
0,600	0,018 m	49,7 kNm	0,210	100,6 kNm	0,424

α_d	$\alpha_{d,ed}$	$A_{s,ed}$	$\rho_{s,ed}$	η_d	$(EI)_{s,ed}$
0,54	1,108	2418 mm ²	3,87%	0,083 m	5278 kNm ²

Fonte: O autor

Capítulo 3

CAPACIDADE RESISTENTE DA SEÇÃO

3.1 SEÇÕES RETANGULARES CHEIAS E VAZADAS

3.1.1 Geometria da seção e conexão da deformação com a curvatura

Examinam-se pilares de seções retangulares cheias e vazadas, em que são incluídas as seções I com dupla simetria e a seção C com um eixo de simetria, todas em flexão composta normal.

BUCHAIM (2015) introduziu os adimensionais β_j , δ_j e α_A , com expressões válidas para ambos os retângulos da seção de concreto, com o intuito de facilitar a obtenção dos esforços resistentes da seção cheia e vazada. Adota-se $j = 1$ para considerar o retângulo externo e $j = 2$ para considerar o retângulo interno.

$$\beta_j = \frac{b_j}{b_e} = (j - 1) \left(\frac{b_i}{b_e} - 1 \right) + 1 \quad (3.1.1.1)$$

$$\delta_j = \frac{h_j}{h_e} = (j - 1) \left(\frac{h_i}{h_e} - 1 \right) + 1 \quad (3.1.1.2)$$

$$\alpha_A = \frac{A_i}{A_e} = \frac{b_i h_i}{b_e h_e} \quad (3.1.1.3)$$

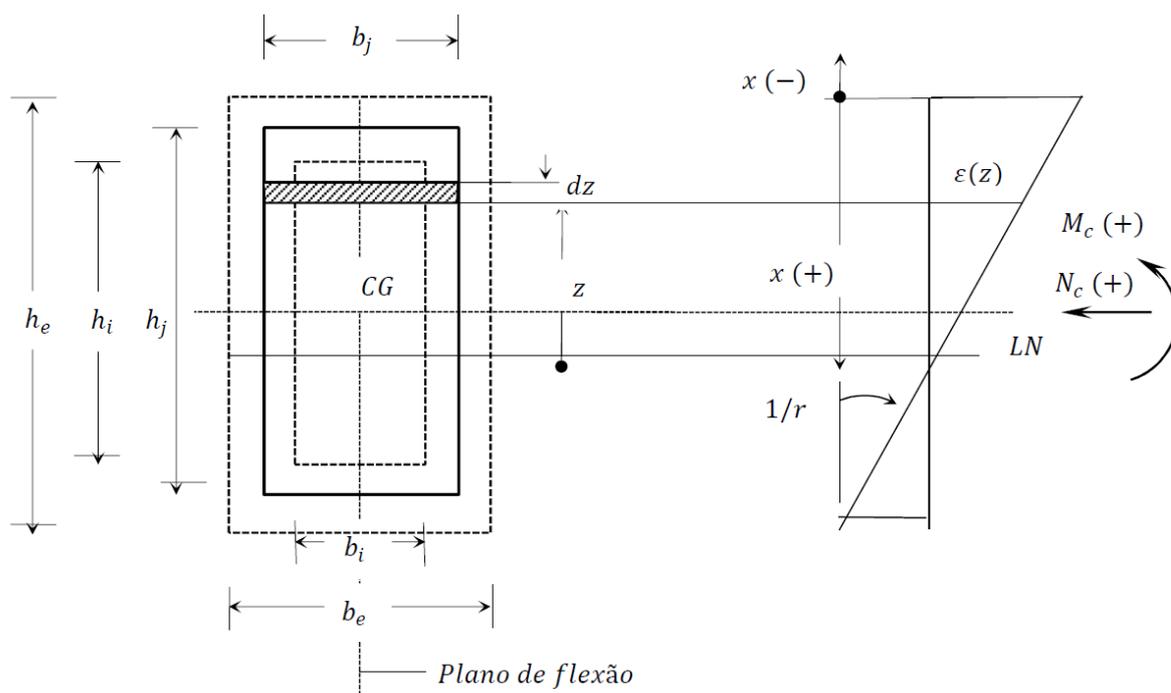
Dessa forma:

Se $j = 1$, $\beta_1 = b_1/b_e$, $b_1 = b_e$; $\delta_1 = h_1/h_e$ e $h_1 = h_e$.

Se $j = 2$, $b_2 = b_i$; $h_2 = h_i$.

A Figura 3.1 mostra a convenção da seção de concreto (retângulos externo e interno pontilhados), posição da LN, curvatura, das deformações e dos esforços solicitantes.

Figura 3.1 - Seção transversal, deformações e esforços na seção retangular



Fonte: Buchaim (2015)

Para o retângulo de lados b_i e h_i , têm-se os esforços resistentes referidos à área $A_0 = A_e - A_i$

A deformação do concreto comprimido é função da ordenada z , medida positivamente para cima, a partir da LN, e é ligada à curvatura ($1/r$), pela expressão:

$$\epsilon_c(z) = z \frac{1}{r} \tag{3.1.1.4}$$

3.1.2 Esforços resistentes da seção de concreto

Os esforços do concreto na seção de largura b_j resultam das integrais:

$$F_{cj} = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{cd}(z) b_j dz \quad (3.1.2.1)$$

$$M_{cj} = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{cd}(z) b_j (z - x + 0,5h_e) dz \quad (3.1.2.2)$$

O valor de σ_{cd} é obtido pela lei constitutiva do concreto:

$$v_{cj} = \frac{F_{cj}}{A_0 f_c} \quad (3.1.2.3)$$

$$\mu_{cj} = \frac{M_{cj}}{A_0 h_e f_c} \quad (3.1.2.4)$$

Onde $j = 1, 2$

$$v_c = v_{c1} - v_{c2} \quad (3.1.2.5)$$

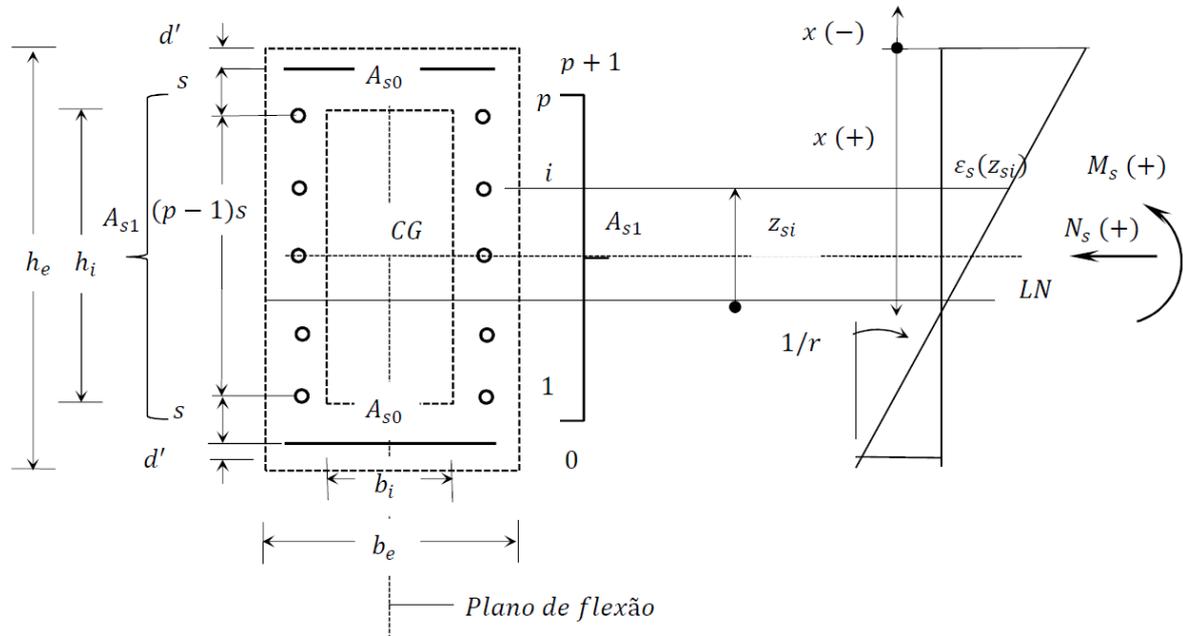
$$\mu_c = \mu_{c1} - \mu_{c2} \quad (3.1.2.6)$$

Nestas equações, faz-se f_c igual a f_{cd1} no ELU, e utiliza-se f_{cd0} da Lei de Grasser para a deformabilidade do concreto.

3.1.3 Esforços resistentes da seção metálica

A seção tem, obrigatoriamente, duas camadas extremas de armadura, cada uma delas com área igual a A_{s0} . Pode-se distribuir (uniformemente) as “p” barras ao longo de cada face lateral da seção, de área A_{s1} . No programa, o usuário deve indicar a proporção A_{s1}/A_{s0} e o número p de barras que compõem a área A_{s1} . A armadura tem área total igual a $A_s = 2 (A_{s0} + A_{s1})$. A Figura 3.2 exemplifica a distribuição das armaduras na seção transversal.

Figura 3.2 - Seção metálica, deformações e esforços na seção retangular cheia ou vazada



Fonte: Buchaim (2015)

A profundidade relativa do cobrimento na seção retangular vale:

$$\delta' = \frac{d'}{h_e} \tag{3.1.3.1}$$

Onde $i = 1, 2, \dots, p$

Com a deformação de cada uma das barras, a partir da lei constitutiva do concreto, é possível subtrair a área líquida de concreto comprimido que é ocupada pela barra de aço (já que a resistência do concreto a tração é desprezada), fornecendo resultados mais precisos, conforme feito em PISSINATTI, C. A. C (2017).

Segundo BUCHAIM (2015), os esforços resistentes da seção metálica são iguais

a:

$$F_s = 2A_{s0} \frac{(\sigma_{sd,p+1} + \sigma_{sd,0})}{2} + 2 \frac{A_{s1}}{p} \sum_1^p \sigma_{sdi} \tag{3.1.3.2}$$

$$M_s = 2A_{s0} \frac{(\sigma_{sd,p+1} - \sigma_{sd,0})}{2} (0,5h_e - d') + \frac{2A_{s1}}{p} \sum_1^p \sigma_{sdi} (z_{si} - x + 0,5h_e) \quad (3.1.3.3)$$

$$\omega_d = \frac{A_s f_{yd}}{A_0 f_c} = \frac{2(A_{s0} + A_{s1}) f_{yd}}{A_0 f_c} \quad (3.1.3.4)$$

$$v_s = \frac{F_s}{A_0 f_c} \quad (3.1.3.5)$$

$$\mu_s = \frac{M_s}{h_e A_0 f_c} \quad (3.1.3.6)$$

Somando os esforços resistentes das seções parciais, resultam os esforços resistentes da seção completa:

$$v_d = v_c + v_s = v_{c1} - v_{c2} + v_s \quad (3.1.3.7)$$

$$\mu_d = \mu_c + \mu_s = \mu_{c1} - \mu_{c2} + \mu_s \quad (3.1.3.8)$$

$$N_{Rd} = v_d A_0 f_{cd} = F_c + F_s \quad (3.1.3.9)$$

$$M_{Rd} = \mu_d A_0 h_e f_{cd} = M_c + M_s \quad (3.1.3.10)$$

O Apêndice B exemplifica numericamente o cálculo da capacidade resistente de uma seção retangular vazada (B.1).

3.2 SEÇÕES CIRCULARES E ANELARES

3.2.1 Geometria da seção e conexão da deformação com a curvatura

Os esforços resistentes da seção anelar podem ser obtidos através da subtração das resistências das seções circulares definidas pelos raios externo e interno.

Segundo BUCHAIM (2015), para considerar os círculos interno e externo das seções, conectando as deformações à curvatura, com expressões válidas para ambos os círculos, introduz-se o adimensional δ_j .

$$\delta_j = \frac{R_j}{R_e} = (j - 1)(\delta_i - 1) + 1 \quad (3.2.1.1)$$

Onde $j = 1, 2$;

$$\delta_i = \frac{R_i}{R_e} \quad (3.2.1.2)$$

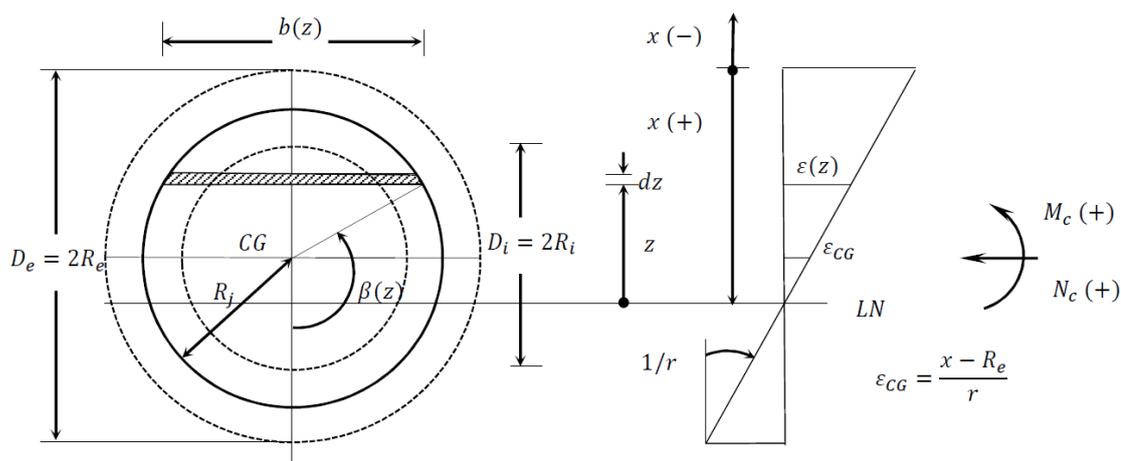
Se $j = 1$, logo $R_1 = R_e$ e $\delta_1 = 1$, correspondendo ao círculo externo.

Se $j = 2$, logo $R_2 = R_i$ e $\delta_2 = \delta_i$, correspondendo ao círculo interno.

Se $R_i = 0$, a seção é circular.

A Figura 3.3 mostra a convenção da seção de concreto (círculos externo e interno pontilhados), posição da LN, curvaturas, das deformações e dos esforços solicitantes.

Figura 3.3 - Seção transversal, deformações e esforços na seção circular ou anelar



Fonte: Buchaim (2015)

A deformação do concreto comprimido é função da ordenada z , medida positivamente para cima, a partir da LN, e é ligada à curvatura ($1/r$), sendo definida pela equação:

$$\varepsilon_c(z) = z \frac{1}{r} \quad (3.2.1.3)$$

O ângulo $\beta(z)$ e a largura $b(z)$, correspondentes à ordenada z , em termos adimensionais, são dados por:

$$\eta = \frac{z}{D_e} \quad (3.2.1.4)$$

$$\xi = \frac{x}{D_e} \quad (3.2.1.5)$$

$$\cos\beta_j(z) = \frac{2}{\delta_j} \left(\frac{x - z - R_e}{D_e} \right) \quad (3.2.1.6)$$

$$\cos\beta_j(\eta) = \frac{2(\xi - \eta) - 1}{\delta_j} \quad (3.2.1.7)$$

Segundo BUCHAIM (2015), aplicando-se a profundidade relativa da LN, tem-se:

$$\frac{b(z)}{D_e} = \delta_j \sin [\beta_j(\eta)] \quad (3.2.1.8)$$

3.2.2 Esforços resistentes da seção de concreto

Os esforços do concreto na seção de raio R_j resultam das integrais:

$$F_{cj} = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{cd}(z) b(z) dz \quad (3.2.2.1)$$

$$M_{cj} = \int_{z_1}^{z_2} \sigma_{cd}(z) b(z) (z - x + R_e) dz \quad (3.2.2.2)$$

O valor de σ_{cd} é obtido pela lei constitutiva do concreto:

$$v_{cj} = \frac{F_{cj}}{\pi(R_e^2 - R_i^2)f_c} \quad (3.2.2.3)$$

$$\mu_{cj} = \frac{M_{cj}}{2\pi(R_e^2 - R_i^2)R_e f_c} \tag{3.2.2.4}$$

Onde $j = 1, 2$.

Fazendo-se $j = 1, 2$ obtêm-se os esforços totais da seção de concreto pelas seguintes subtrações:

$$v_c = v_{c1} - v_{c2} \tag{3.2.2.5}$$

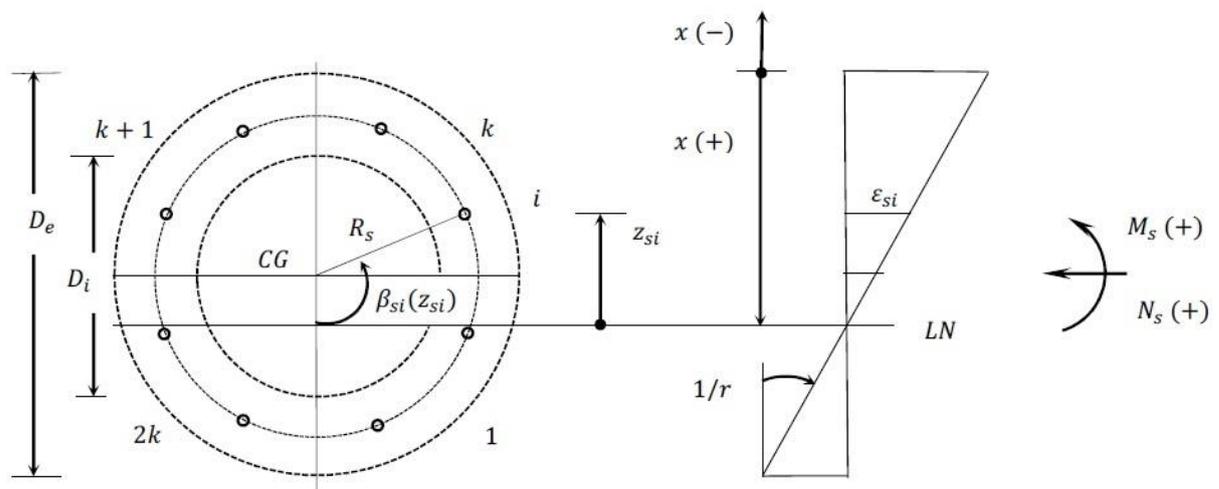
$$\mu_c = \mu_{c1} - \mu_{c2} \tag{3.2.2.6}$$

Nestas equações, faz-se f_c igual a f_{cd1} no ELU, e utiliza-se f_{cd0} da Lei de Grasser para a deformabilidade do concreto.

3.2.3 Esforços resistentes da seção metálica

Na seção transversal Figura 3.4, tem-se um número par de barras, de mesma área, uniformemente espaçadas no círculo de raio R_s . As barras estão dispostas simetricamente em relação ao plano de flexão.

Figura 3.4 - Seção metálica, deformações e esforços na seção circular ou anelar



Fonte: Buchaim (2015)

Considerando as $2k \geq 8$ barras deste círculo, tem-se, para a i -ésima barra, o ângulo que define sua posição e a correspondente ordenada adimensional dados por:

$$\beta_{si} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}[2i - (k + 1)] = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2i - 1}{k} \right) \quad (3.2.3.1)$$

Onde $i = 1, 2, \dots, k$

Segundo BUCHAIM (2015), considerando-se a curvatura adimensional da seção e a profundidade da LN, tem-se a posição e a deformação da i -ésima barra:

$$\eta_{si} = \frac{z_{si}}{2R_e} = \frac{x - R_e - R_s \cos(\beta_{si})}{2R_e} \quad (3.2.3.2)$$

$$\delta_s = \frac{R_s}{R_e} \quad (3.2.3.3)$$

Substituindo-se as equações, tem-se que:

$$\eta_{si} = \xi - 0,5[1 + \delta_s \cos(\beta_{si})] \quad (3.2.3.4)$$

Com a deformação de cada uma das barras, a partir da lei constitutiva do concreto, é possível subtrair a área líquida de concreto comprimido que é ocupada pela barra de aço (já que a resistência do concreto a tração é desprezada), fornecendo resultados mais precisos, conforme verificado em PISSINATTI, C. A. C (2017).

Da lei constitutiva do aço, resulta a tensão relativa nessa barra ($\bar{\varepsilon} = 10^3 \varepsilon$):

$$\frac{\sigma_{sdi}}{f_{yd}} = \frac{\bar{\varepsilon}_{si}}{\bar{\varepsilon}_{yd}} \text{ se } \bar{\varepsilon}_s < \bar{\varepsilon}_{yd} \quad (3.2.3.5)$$

$$\frac{\sigma_{sdi}}{f_{yd}} = \text{sgn}(\bar{\varepsilon}_s) \text{ se } \bar{\varepsilon}_s \geq \bar{\varepsilon}_{yd} \quad (3.2.3.6)$$

Considerando as k barras e suas simétricas, tem-se a área e a taxa mecânica da armadura, em que \emptyset é o diâmetro das k barras.

$$A_s = 2k \frac{\pi \phi^2}{4} \quad (3.2.3.7)$$

$$\omega_d = \frac{A_s f_{yd}}{A_0 f_{cd}} \quad (3.2.3.8)$$

$$\frac{\omega_d}{f_{yd}} = \frac{A_s}{A_0 f_{cd}} \quad (3.2.3.8)$$

Segundo BUCHAIM (2015), os esforços resistentes da seção metálica são iguais

a:

$$v_s = \frac{F_s}{A_0 f_{cd}} = \frac{2}{A_0 f_{cd}} \sum_1^k \frac{A_s}{2k} \sigma_{sdi} \quad (3.2.3.11)$$

$$v_s = \frac{\omega_d}{k} \sum_1^k \frac{\sigma_{sdi}}{f_{yd}} \quad (3.2.3.12)$$

$$\mu_s = \frac{M_s}{A_0 f_{cd} D_e} = \frac{2}{A_0 f_{cd} D_e} \sum_1^k \frac{A_s}{2k} R_s \cos(\beta_{si}) \sigma_{sdi} \quad (3.2.3.13)$$

$$\mu_s = -\delta_s \frac{\omega_d}{2k} \sum_1^k \frac{\sigma_{sdi}}{f_{yd}} \cos(\beta_{si}) \quad (3.2.3.14)$$

Somando os esforços resistentes das seções parciais, resultam os esforços resistentes da seção completa:

$$v_d = v_c + v_s = v_{c1} - v_{c2} + v_s \quad (3.2.3.15)$$

$$\mu_d = \mu_c + \mu_s = \mu_{c1} - \mu_{c2} + \mu_s \quad (3.2.3.16)$$

$$N_{Rd} = v_d A_0 f_{cd} = F_c + F_s \quad (3.2.3.17)$$

$$M_{Rd} = \mu_d A_0 D_e f_{cd} = M_c + M_s \quad (3.2.3.18)$$

O Apêndice B exemplifica numericamente o cálculo da capacidade resistente de uma seção circular cheia (B.2).

Capítulo 4

DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA

4.1 CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA

O diagrama momento-curvatura refere-se à seção transversal e considera simultaneamente: (1) a força normal; (2) quantidade de armadura, assim como a sua disposição na seção transversal; (3) as não-linearidades dos materiais (concreto e aço); (4) desprezo da resistência à tração do concreto, em caso de fissuração.

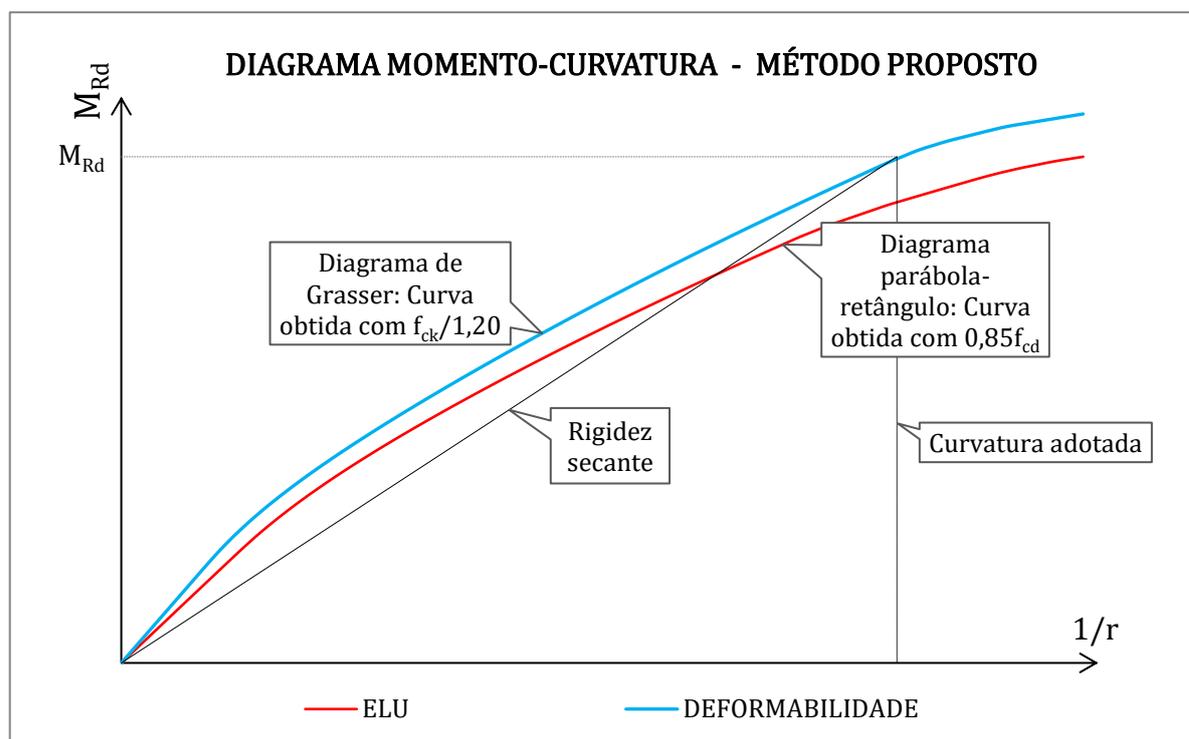
Para materiais cujo comportamento é elástico-linear, o diagrama seria composto simplesmente por uma reta inclinada passando pela origem. Entretanto, para materiais com comportamento não-linear, como o concreto armado, o diagrama é curvo, e reflete as leis tensão-deformação não-lineares deste material.

Na análise e no dimensionamento a área de armadura, o momento solicitante e o momento resistente são desconhecidos. No pilar esbelto, o primeiro momento cai e o segundo aumenta com a taxa de armadura, conforme exposto na Figura 6.1 e Figura 6.2.

Desta maneira, o cálculo é feito iterativamente, até conseguir-se a igualdade de ambos momentos.

Este trabalho considera a não-linearidade física de maneira segura e aproximada, a partir da rigidez secante advinda do diagrama momento-curvatura ($M-N-1/r$) apresentado na Figura 4.1. Utiliza-se o diagrama parábola-retângulo para o estado limite último (ELU) e o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração (Diagrama de Grasser) para a deformabilidade do pilar.

Figura 4.1 – Relação momento-curvatura utilizada



Fonte: O autor

No estado limite último, considera-se os diagramas tensão-deformação do concreto e do aço conforme a ABNT NBR 6118:2014, com as tensões nos respectivos patamares iguais a $f_c = 0,85f_{cd}$ e f_{yd} . Para acréscimos sucessivos da curvatura, tem-se o esgotamento da capacidade resistente da seção ao ser atingida uma deformação limite, do que resulta o momento último resistido pela seção (M_{rd}).

Em uma segunda análise, em que se considera a deformabilidade do pilar, repete-se a construção do diagrama momento-curvatura, utiliza-se o diagrama tensão-deformação do aço conforme a ABNT NBR 6118:2014, para o concreto utiliza-se o Diagrama de Grasser, conforme o item 7.2.3.1.3 do MC-2010 e o item 3.1.5 da NP EN 1992-1-1:2010.

Ao considerar a deformabilidade do pilar, obtém-se uma curva superior à anterior, devido ao acréscimo de resistência de cálculo, advindo do Diagrama de Grasser (com resistência de cálculo f_{ck}/γ_{c0} , e $\gamma_{c0} = 1,2$, e do ELU com resistência de cálculo $0,85f_{ck}/\gamma_c$; $\gamma_c = 1,4$). Este acréscimo é, portanto, igual a $(f_{ck}/\gamma_{c0}) / (0,85f_{ck}/\gamma_c) = 1,373$. O aço permanece com a mesma lei em ambas as situações.

No diagrama da deformabilidade do pilar, em correspondência ao momento resistente M_{rd} , obtém-se a curvatura, e do quociente destas duas grandezas, encontra-se

o valor da rigidez secante à flexão $(EI)_{sec}$, que é definida como sendo o coeficiente angular da reta determinada pela origem do sistema de eixos e pelo ponto da curva de deformabilidade com ordenada M_{rd} .

4.2 EXEMPLOS

Uma vez definida a resistência dos materiais, a seção transversal, a quantidade e a disposição das armaduras, procede-se com os seguintes passos:

1. Fixa-se um valor de N_{sd} ;
2. Admite-se um valor de curvatura adimensional ($1000h_e/r$ ou $1000D_e/r$), escolhido de uma sequência crescente, p.ex. (0,1; 0,2; 0,3; ...);
3. Admite-se um primeiro valor de ε_{CG} (deformação no centro geométrico da seção transversal), que pode ser aquele obtido na origem do diagrama, em que só há força normal N_{sd} ;
4. Calculam-se os valores de N_{rd} e M_{rd} (Capítulo 3 e Apêndice B);
5. Comparam-se N_{sd} e N_{rd} . Não havendo concordância entre os valores, retorna-se ao passo 3, ajustando o valor de ε_{CG} a partir de um método de extrapolação linear, até encontrar uma diferença entre N_{sd} e N_{rd} que é desprezível. Com isso, obtém-se as deformações na seção, de onde resulta o correspondente valor de M_{rd} ;
6. Retorna-se ao passo 2 com um novo valor de $1/r$ (até o esgotamento da capacidade resistente da seção).

4.2.1 Exemplo 1

Na construção do diagrama (Tabela 4.1, Figura 4.2) utilizam-se os dados do exemplo 5.3.4 e do Apêndice A. Um pilar biarticulado de seção retangular e vazada.

Considera-se o $f_{ck} = 60$ MPa, o agregado graúdo considerado foi o basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$). Na seção vazada, considera-se $B_e = H_e = 1000$ mm, $B_i = H_i = 800$ mm, $d' = 50$ mm e o comprimento do lance é $l_e = 13,0$ m. A área de aço total

é igual a 18720 mm^2 , com 10 barras de armadura lateral, representando 10% da proporção A_{s1}/A_{s0} . A força normal solicitante é $N_{sd} = 13.115 \text{ kN}$.

A Tabela 4.1 apresenta os valores de curvatura com os respectivos momentos resistentes, para a deformabilidade do pilar e para o estado limite último:

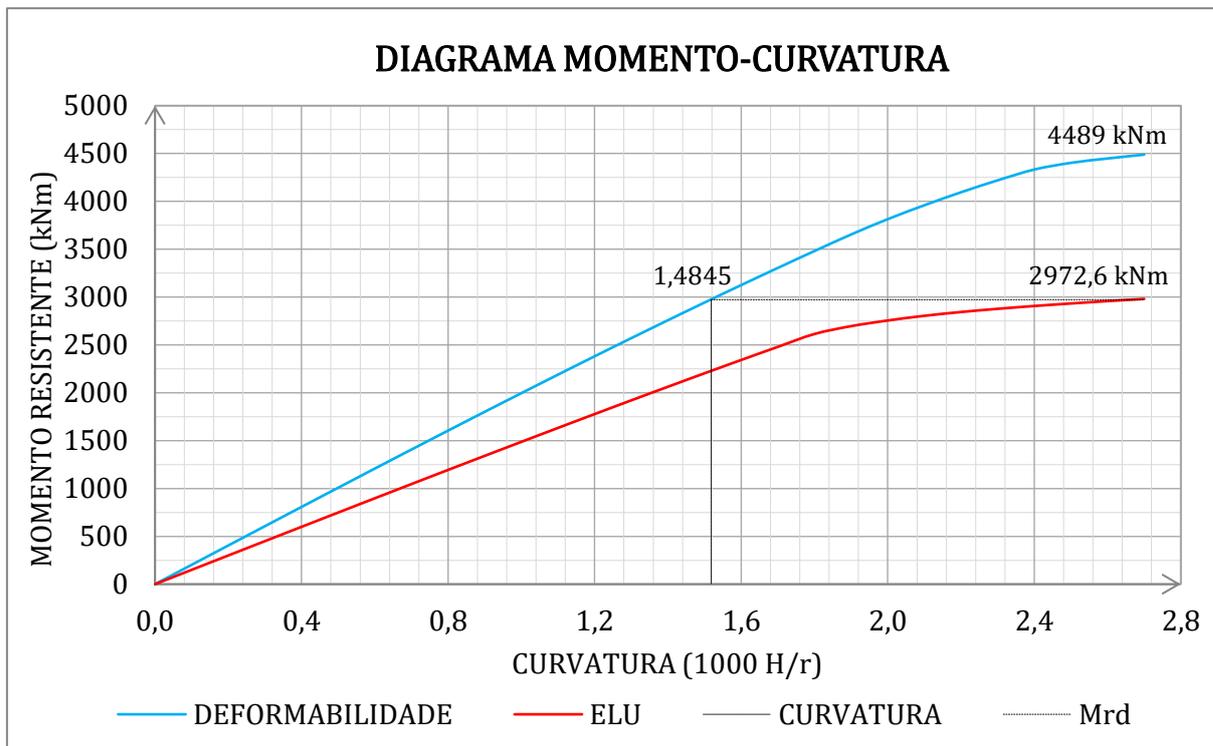
Tabela 4.1 – Curvatura e os momentos resistentes da seção transversal para o Exemplo 1 – Pilar biarticulado com seção retangular

$1000h_e/r$ (–)	M_{rd} (defor.) (kNm)	M_{rd} (últim.) (kNm)	$1000h_e/r$ (–)	M_{rd} (defor.) (kNm)	M_{rd} (últim.) (kNm)
0,00	0,0	0,0	1,40	2814,6	2059,5
0,10	207,4	149,8	1,50	3001,6	2199,9
0,20	414,7	299,6	1,60	3185,7	2338,7
0,30	621,5	449,2	1,70	3366,8	2475,6
0,40	827,7	598,6	1,80	3544,1	2609,5
0,50	1033,1	747,6	1,90	3706,7	2689,4
0,60	1237,6	896,3	2,00	3854,1	2748,3
0,70	1440,9	1044,4	2,10	3992,3	2797,0
0,80	1642,8	1192,0	2,20	4118,8	2836,5
0,90	1843,1	1338,9	2,30	4232,9	2869,6
1,00	2041,6	1485,0	2,40	4337,0	2898,9
1,10	2238,3	1630,3	2,50	4437,1	2925,4
1,20	2432,7	1774,5	2,60	4490,4	2949,9
1,30	2624,9	1917,7	2,70	4528,8	2972,6

Fonte: O autor

A Figura 4.2 apresenta a construção dos dois diagramas momento-curvatura com os dados advindos da Tabela 4.1, onde a curva em vermelho mostra o resultado para o ELU (diagrama parábola-retângulo) e a curva em azul apresenta os valores advindos da deformabilidade do pilar (diagrama de Grasser). Ressalta-se os valores dos momentos resistentes totais (M_{rd}) para os dois casos, assim como a curvatura e o valor da rigidez secante à flexão $(EI)_{sec}$.

Figura 4.2 – Diagrama momento-curvatura para o Exemplo 1 – Pilar biarticulado com seção retangular



Fonte: O autor

A partir do diagrama momento-curvatura, a seção mais solicitada do pilar analisado tem rigidez EI_{sec} igual a:

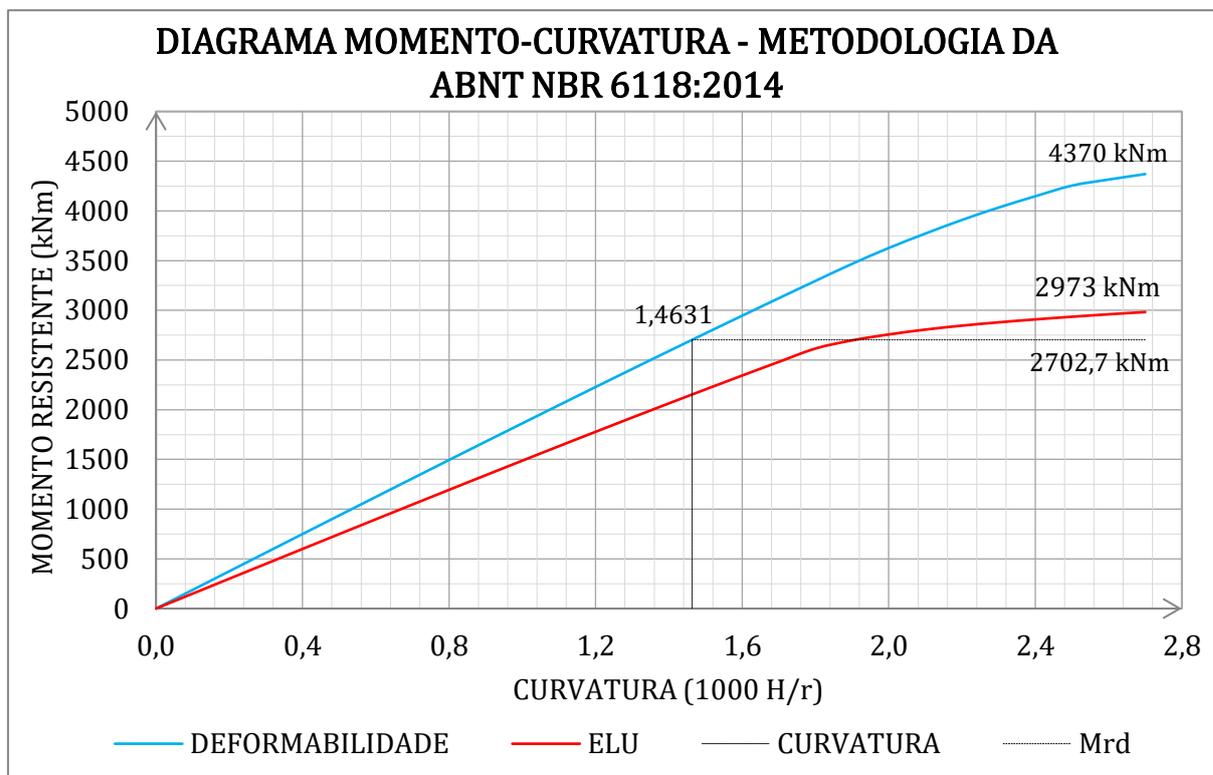
$$EI_{sec} = \frac{M_{rd}}{(1/r)} \tag{4.2.1.1}$$

$$EI_{sec} = \frac{2972,6}{1,4845/1000} \cong 2.002.642,7 \text{ kNm}^2 \tag{4.2.1.2}$$

Utilizando a analogia da norma ABNT NBR 6118:2014, apresentada em 2.7.1.1, tem-se uma rigidez EI_{sec} 8,41% menor:

$$EI_{sec} = \frac{2702,7}{1,4631/1000} \cong 1.847.285,4 \text{ kNm}^2 \tag{4.2.1.3}$$

Figura 4.3 – Diagrama momento-curvatura para o Exemplo 1 - Metodologia da norma ABNT NBR 6118:2014 - Pilar biarticulado com seção retangular



Fonte: O autor

4.2.2 Exemplo 2

A construção do diagrama (Tabela 4.2, Figura 4.4) utiliza-se dos dados do Exemplo 5.4.4 e do Apêndice B. Um pilar em balanço de seção circular cheia.

Considera-se o $f_{ck} = 25$ MPa, o agregado graúdo considerado foi o basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$). Na seção vazada, considera-se $R_e = 250$ mm, $R_s = 200$ mm, $d' = 50$ mm, $l_b = 5,0$ m e $l_e = 10,0$ m. A área de aço total é igual a 6333 mm², com 32 barras de armadura distribuídas uniformemente ao longo de todo perímetro da seção. Considera-se $N_{sd} = 1.490$ kN.

A Tabela 4.2 apresenta os valores de curvatura com os respectivos momentos resistentes, para a deformabilidade do pilar (diagrama de Grasser) e para o estado limite último (diagrama parábola-retângulo):

Tabela 4.2 – Curvatura e os momentos resistentes da seção transversal para o
Exemplo 2 – Pilar em balanço com seção circular

(continua)

1000 D_e/r (–)	M_{rd} (defor.) (kNm)	M_{rd} (últim.) (kNm)	1000 D_e/r (–)	M_{rd} (defor.) (kNm)	M_{rd} (últim.) (kNm)
0,0	0,0	0,0	3,0	282,0	305,3
0,1	12,6	15,2	3,1	288,6	312,4
0,2	25,1	30,5	3,2	295,2	319,4
0,3	37,7	45,7	3,3	301,7	326,3
0,4	50,2	60,9	3,4	308,1	333,2
0,5	62,7	76,1	3,5	314,4	340,0
0,6	75,3	91,3	3,6	320,7	346,7
0,7	87,8	105,5	3,7	327,0	353,4
0,8	100,2	118,4	3,8	333,1	360,0
0,9	112,2	130,3	3,9	339,3	366,6
1,0	123,3	141,4	4,0	345,4	373,1
1,1	133,8	151,8	4,1	351,4	379,6
1,2	143,7	161,6	4,2	357,4	386,0
1,3	153,2	171,1	4,3	363,4	392,3
1,4	162,3	180,3	4,4	369,3	398,6
1,5	171,0	189,1	4,5	375,2	404,9
1,6	179,5	197,8	4,6	380,6	411,1
1,7	187,7	206,2	4,7	385,9	417,3
1,8	195,7	214,5	4,8	390,5	423,4
1,9	203,5	222,6	4,9	395,1	429,5
2,0	211,2	230,6	5,0	399,7	435,6
2,1	218,8	238,5	5,1	404,2	441,6
2,2	226,2	246,3	5,2	408,2	447,1
2,3	233,5	253,9	5,3	412,1	452,5
2,4	240,7	261,5	5,4	416,0	456,7
2,5	247,8	269,0	5,5	419,8	460,8
2,6	254,8	276,4	5,6	423,7	464,1
2,7	261,7	283,7	5,7	427,5	467,4
2,8	268,5	291,0	5,8	431,1	470,7
2,9	275,3	298,2	5,9	434,3	473,7

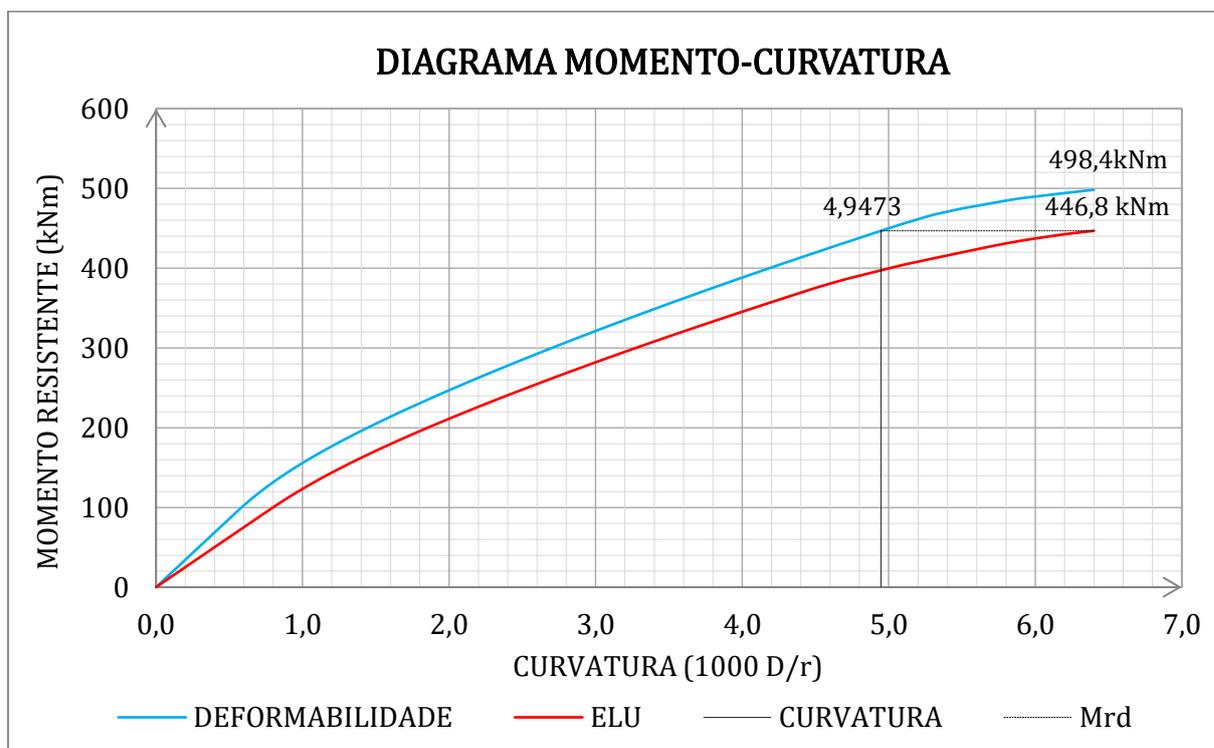
Tabela 4.2 - Curvatura e os momentos resistentes da seção transversal para o Exemplo 2 - Pilar em balanço com seção circular

(conclusão)

1000 D _e /r (-)	M _{rd} (defor.) (kNm)	M _{rd} (últim.) (kNm)	1000 D _e /r (-)	M _{rd} (defor.) (kNm)	M _{rd} (últim.) (kNm)
6,0	437,3	475,9	6,3	444,7	482,5
6,1	439,9	478,1	6,4	446,8	484,6
6,2	442,6	480,3			

Fonte: O autor

Figura 4.4 - Diagrama momento-curvatura para o Exemplo 2 - Pilar em balanço com seção retangular



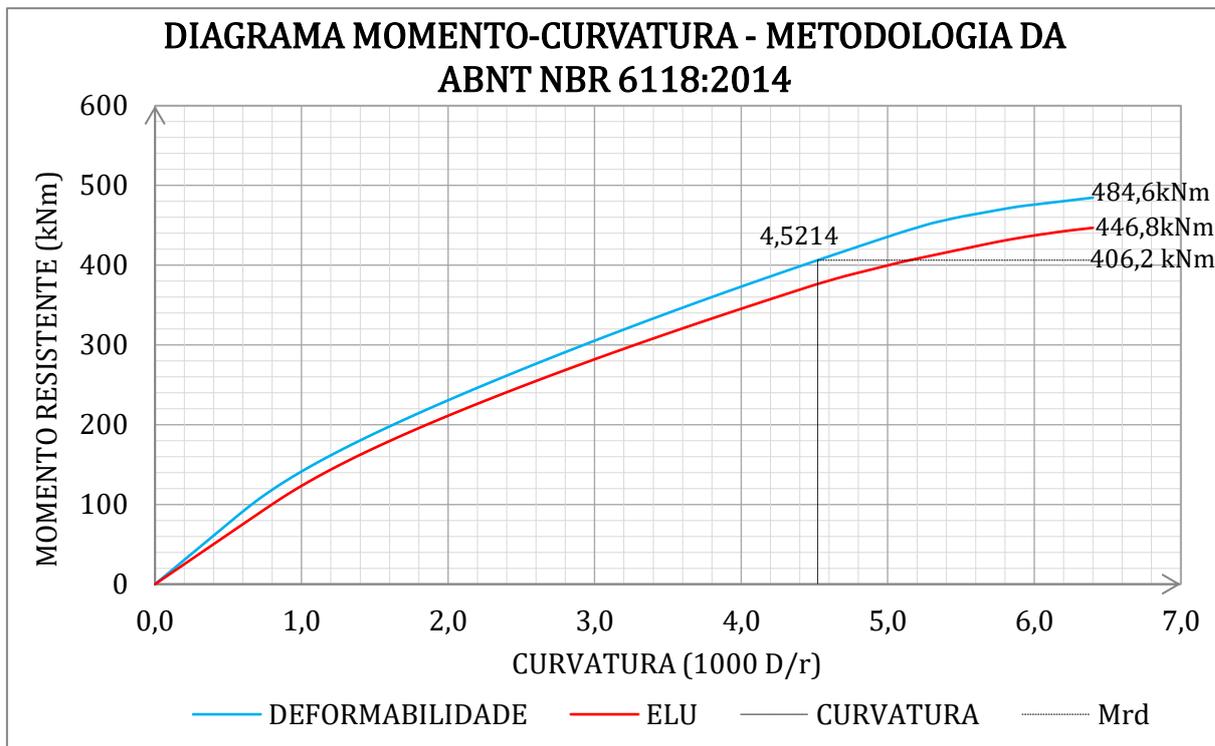
Fonte: O autor

A partir do diagrama momento-curvatura, a seção mais solicitada do pilar analisado tem rigidez EI_{sec} igual a:

$$EI_{sec} = \frac{M_{sd}}{(1/r)} \tag{4.2.2.1}$$

$$EI_{sec} = \frac{446,8}{4,9473/500} \cong 45.183 \text{ kNm}^2 \tag{4.2.2.3}$$

Figura 4.5 – Diagrama momento-curvatura para o Exemplo 2 - Metodologia da norma ABNT NBR 6118:2014 - Pilar em balanço com seção retangular



Fonte: O autor

Utilizando a analogia da norma ABNT NBR 6118:2014, apresentada em 2.7.1.1, tem-se uma rigidez EI_{sec} 0,58% menor:

$$EI_{sec} = \frac{406,2}{4,5214/500} \cong 44.921,7 \text{ kNm}^2 \quad (4.2.2.3)$$

Capítulo 5

ANÁLISE DE SEGUNDA ORDEM

5.1 PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO

Segundo MENN (1990), os esforços solicitantes de pilares esbeltos podem ser calculados de maneira segura a partir de seu comportamento não-linear, e a não-linearidade física no concreto armado é sintetizada pela rigidez secante. A não-linearidade física resulta da fissuração e da não-linearidade das leis constitutivas do concreto e do aço. A não-linearidade geométrica resulta de mudanças na geometria do sistema, induzidas pelas cargas.

De acordo com a teoria clássica, os esforços solicitantes de primeira ordem baseiam-se nas equações de equilíbrio da estrutura obtidas a partir de sua geometria indeformada (Figura 5.1, a). Esse tratamento subestima esforços solicitantes totais, que devem satisfazer as condições de equilíbrio da geometria deformada do sistema (Figura 5.1, b). As duas abordagens são apresentadas na Figura 5.1.

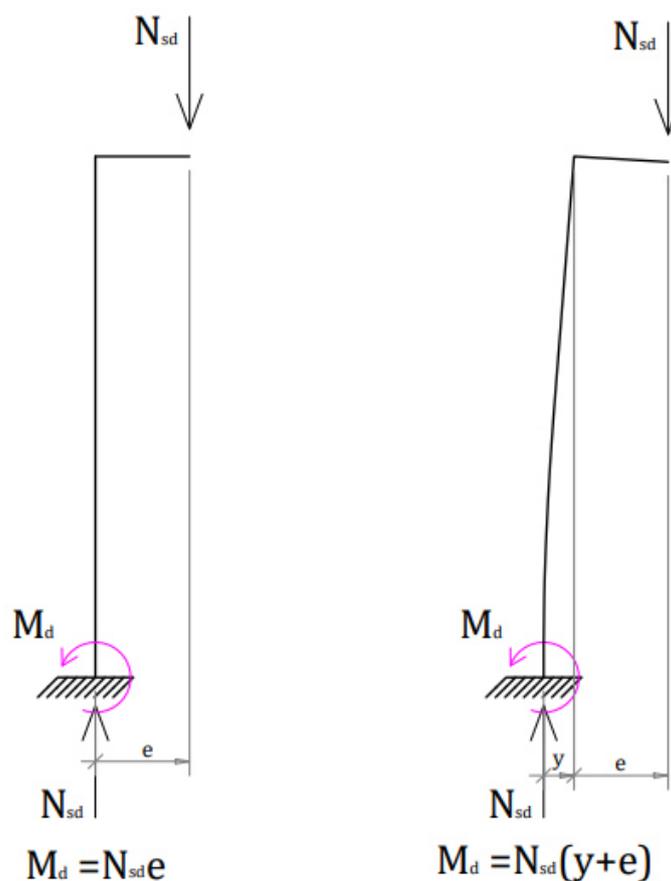
Segundo MENN (1990), os métodos de análise estrutural nos quais as equações de equilíbrio são formuladas para a geometria da estrutura deformada são chamados de métodos de segunda ordem.

Admitindo comportamento elástico e linear do material, uma análise exata de segunda ordem consistiria na solução de uma equação diferencial dos deslocamentos $y(x)$ do elemento estrutural. Os esforços solicitantes poderiam, então, ser obtidos através de derivadas do deslocamento $y(x)$.

Como resultado da não-linearidade do material, a rigidez à flexão de uma seção transversal de concreto é uma função não-linear dos esforços solicitantes N_{sd} e M_{sd} . Entretanto, os cálculos simplificam-se consideravelmente se a rigidez à flexão for admitida constante, já que resultados conservadores e suficientemente precisos são obtidos quando a rigidez à flexão correspondente aos esforços solicitantes da seção crítica

for adotada a todas as demais seções ao longo do elemento estrutural. Esta rigidez é representada pela rigidez secante, advinda do diagrama momento-curvatura.

Figura 5.1 – Momento na base de um pilar carregado excentricamente: (a) pela teoria de primeira ordem; (b) pela teoria de segunda ordem



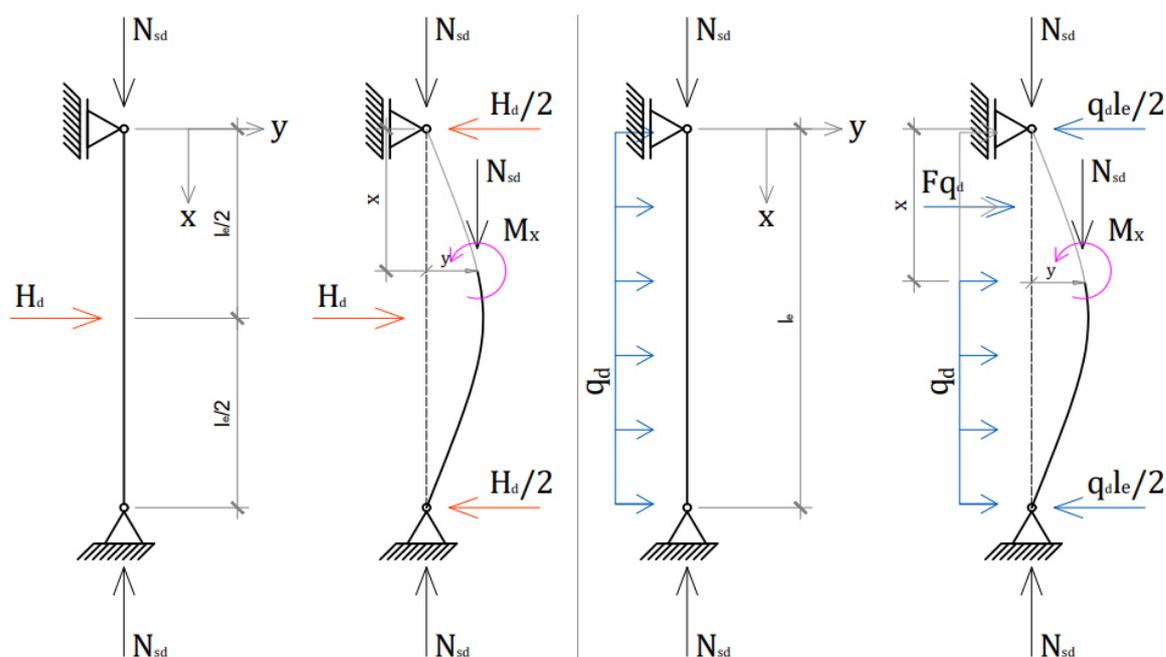
Fonte: O autor

A análise de segunda ordem pode então ser efetuada sob a hipótese de comportamento elástico linear do material. Como a rigidez à flexão efetiva é igual a rigidez da seção crítica, qualquer seção da peça apresentará rigidez maior ou igual à $(EI)_{sec}$. Assim, os deslocamentos serão superestimados, com o que resulta um limite inferior seguro da carga última.

5.2 FLEXÃO COMPOSTA DE BARRAS PRISMÁTICAS ESBELTAS

Para a barra da Figura 5.2, submetida à flexo-compressão, a presença de deslocamentos devidos às ações transversais faz com que a carga de compressão N_{sd} produza momentos fletores adicionais, que estão intimamente relacionados com a magnitude da carga de compressão e a rigidez/esbeltez da barra, esses são denominados momentos de segunda ordem.

Figura 5.2 – Momento fletor nas posições indeformada e deformada



Fonte: O autor

De acordo com as hipóteses adotadas, onde os deslocamentos e as deformações são admitidos como não excessivas, a equação diferencial da linha elástica assume a seguinte forma:

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{EI_{sec}} \quad (5.2.1)$$

Considera-se que a parcela $M(x)$ equivale à soma do momento de primeira ordem e da parcela do momento de segunda ordem (decorrente do deslocamento transversal da barra). Deste modo, a equação 5.2.1 assume a seguinte forma:

$$y''(x) = -\frac{M_{1d}(x)}{EI_{sec}} - \frac{N_{sd}}{EI_{sec}}y(x) \quad (5.2.2)$$

Considera-se N_{sd} como o esforço longitudinal de compressão, suposto como positivo e EI_{sec} como o módulo de rigidez da seção transversal, ambos com valores constantes ao longo do pilar. Por facilidade, define-se o fator $k^2 = N_{sd}/EI_{sec}$, cuja unidade é $[L]^{-2}$. Com os termos em deslocamento do lado esquerdo, a equação assume a seguinte forma:

$$y''(x) + \frac{N_{sd}}{EI_{sec}}y(x) = -\frac{M_{1d}(x)}{EI_{sec}} \quad (5.2.3)$$

$$y''(x) + k^2y(x) = -\frac{M_{1d}(x)}{EI_{sec}} \quad (5.2.4)$$

Desta equação diferencial ordinária de segunda ordem, tem-se a solução geral:

$$y(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) + f(x) \quad (5.2.5)$$

Onde A e B são constantes de integração e serão determinadas a partir das condições de contorno e $f(x)$ é uma solução particular, dependente do momento de primeira ordem $M_{1d}(x)$ aplicado na barra e que satisfaz a equação 5.2.3.

Segundo LANGENDONCK, T. (1944), se $M_{1d}(x)$ for um polinômio de grau m, $f(x)$ também será. A transformação de $M_{1d}(x)$ em $f(x)$ segue os seguintes critérios:

$$M_{1d}(x) = \sum_0^m a_n x^n \quad (5.2.6)$$

$$f(x) = \sum_0^m b_n x^n \quad (5.2.7)$$

$$b_n = -\frac{a_n}{N_{sd}} \quad (5.2.8)$$

Para $n < m - 1$:

$$b_n = -\frac{a_n}{N_{sd}} - (n + 1)(n + 2) \frac{b_{n+2}}{k^2} \quad (5.2.9)$$

Para esta análise, usam-se as seguintes convenções:

m = Representa o grau do polinômio;

q_d = Força horizontal distribuída ao longo do lance;

H_d = Força horizontal;

M_{Ad} = Momento de maior valor absoluto, com sinal positivo;

M_{Bd} = Momento de valor absoluto menor que M_A ;

M_{Od} = Momento aplicado no topo do pilar em balanço;

e_a = Excentricidade acidental;

M_{1d} = Momento máximo de primeira ordem;

M_{2d} = Momento máximo de segunda ordem;

$\alpha_d = (N_{sd} l_e^2) / (\pi^2 EI_{sec})$ = Coeficiente entre força normal e carga crítica.

Segundo LANGENDONCK, T. (1944) pode-se considerar a superposição dos efeitos de cada caso de carregamento (princípio de superposição de esforços), tomando a mesma força longitudinal de compressão (assim como a mesma rigidez secante) em cada um dos casos de carregamentos transversais.

5.2.1 Falta de retilineidade

A falta de retilineidade (imperfeições geométricas locais) é considerada através da excentricidade acidental, de variação senoidal no lance (biarticulado e em balanço), como mostra a Figura 5.3 e a partir das deduções de BUCHAIM (2015):

$$y_1(x) = e_a \text{sen} \left(\frac{\pi x}{l_e} \right) \quad (5.2.1.1)$$

Onde y_1 e e_a representam, respectivamente, a deformada inicial e a excentricidade na seção central do pilar, previamente existente. É importante notar que esta deformação não é causada por nenhuma força, simplesmente a barra é construída

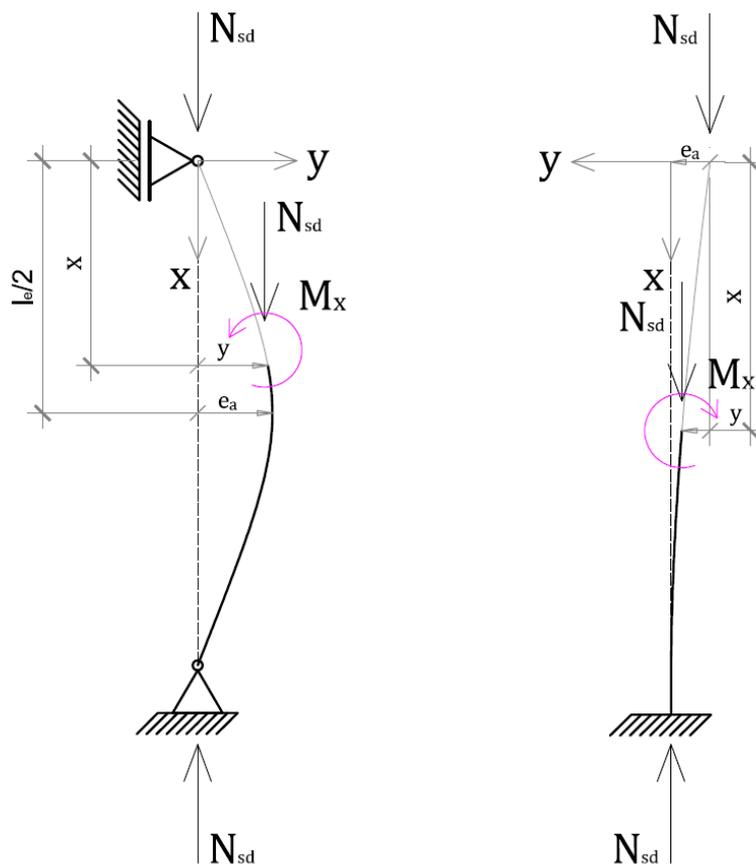
curva. Os deslocamentos adicionais y_2 , decorrentes das deformações por flexão (curvatura) resultam da equação diferencial de segunda ordem (equação 5.2.2):

$$M(x) = N_{sd}[y_1(x) + y_2(x)] \tag{5.2.1.2}$$

$$M(x) = N_{sd} \left[e_a \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{l_e} \right) + y_2(x) \right] \tag{5.2.1.3}$$

$$y''(x) = - \frac{N_{sd} e_a \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{l_e} \right)}{EI_{sec}} - \frac{N_{sd}}{EI_{sec}} y(x) \tag{5.2.1.4}$$

Figura 5.3 – Momento fletor na posição deformada para a falta de retlineidade para o pilar biarticulado e em balanço



Fonte: O autor

Substitui-se $k^2 = N_{sd}/EI_{sec}$ e com os termos em deslocamento do lado esquerdo, a equação assume a seguinte forma:

$$y''(x) + k^2 y(x) = -k^2 e_a \text{sen} \left(\frac{\pi x}{l_e} \right) \quad (5.2.1.5)$$

A solução geral da equação 5.2.1.5 é:

$$y(x) = A \text{sen}(kx) + B \cos(kx) + \frac{k^2 l_e^2}{\pi^2 - k^2 l_e^2} e_a \text{sen} \left(\frac{\pi x}{l_e} \right) \quad (5.2.1.6)$$

Dividindo o ultimo termo da equação por $k^2 l_e^2$:

$$y(x) = A \text{sen}(kx) + B \cos(kx) + \frac{1}{\frac{\pi^2}{k^2 l_e^2} - 1} e_a \text{sen} \left(\frac{\pi x}{l_e} \right) \quad (5.2.1.7)$$

$$\frac{\pi^2}{k^2 l_e^2} = \frac{1}{\alpha_d} \quad (5.2.1.8)$$

Onde α_d é a relação entre a força axial atuante e a carga crítica de flambagem.

A partir das condições de contorno, onde y_2 se anula em $x = 0$ e $x = l_e$ no lance biarticulado e $dy/dx = 0$ para $x = l_b = l_e/2$ no lance em balanço são satisfeitas as condições se $A = B = 0$.

$$y_2(x) = \frac{\alpha_d}{1 - \alpha_d} e_a \text{sen} \left(\frac{\pi x}{l_e} \right) \quad (5.2.1.9)$$

Assim, os momentos solicitantes assumem as seguintes equações:

$$M_{1d}(x) = N_{sd} e_a \text{sen} \left(\frac{\pi x}{l_e} \right) \quad (5.2.1.10)$$

$$M_{2d}(x) = \frac{\alpha_d}{1 - \alpha_d} N_{sd} e_a \text{sen} \left(\frac{\pi x}{l_e} \right) \quad (5.2.1.11)$$

$$M_{sd,total}(x) = \frac{1}{1 - \alpha_d} N_{sd} e_a \text{sen} \left(\frac{\pi x}{l_e} \right) \quad (5.2.1.12)$$

Convém notar que M_{1d} existe assim que N_{sd} é aplicada, e é independente da rigidez EI_{sec} do pilar. Por outro lado, M_{2d} é nulo em duas circunstâncias: se $N_{sd} = 0$ e se EI_{sec} for infinito, quando então $\alpha_d = 0$, em uma ou outra circunstância.

5.3 PILAR BIARTICULADO

Mostram-se nos próximos itens as deduções dos carregamentos advindos de cada carregamento transversal, baseado nos textos de LANGENDONCK, T. (1944).

Os valores de H_d e q_d , assim como a excentricidade e_a por falta de retilineidade, foram convencionados como positivos. Para os momentos nas extremidades, M_{Ad} é o momento de maior valor absoluto, com sinal positivo e M_{Bd} recebe valor positivo se produzir deslocamentos y de mesmo sentido que os de M_{Ad} , e negativo em caso contrário.

5.3.1 Carga horizontal no meio do vão

A Figura 5.4 ilustra o caso de carregamento para a carga horizontal no meio do vão, assim como o momento fletor nas condições deformada e indeformada. Considera-se assim o momento fletor na seção genérica para $x \leq l_e/2$:

$$M_1(x) = \frac{H_d}{2}x \quad (5.3.1.1)$$

$$EI_{sec}y''(x) + N_{sd}y(x) = -\frac{H_d}{2}x \quad (5.3.1.2)$$

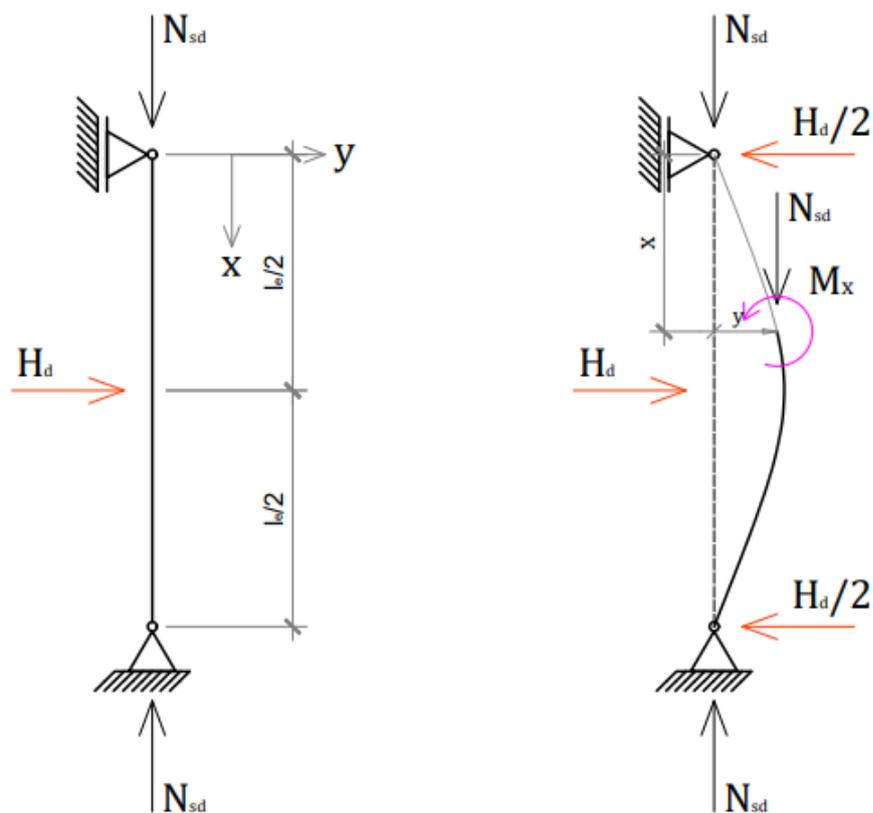
Utiliza-se das equações (5.2.5), (5.2.6) e (5.2.7) tem-se:

$$b_0 + b_1x = +\frac{H_d}{2}x \quad (5.3.1.3)$$

$$b_1 = -\frac{a_1}{N_{sd}} = -\frac{H_d}{2N_{sd}} \quad (5.3.1.4)$$

$$b_0 = 0 \quad (5.3.1.5)$$

Figura 5.4 –Momento fletor nas posições indeformada e deformada para carga horizontal no meio do vão



Fonte: O autor

Assim, a equação (5.2.4) assume a seguinte forma:

$$y(x) = A \operatorname{sen}(kx) + B \operatorname{cos}(kx) - \frac{H_d}{2N_{sd}}x \quad (5.3.1.6)$$

A constante B é calculada de modo que y se anule em $x = 0$:

$$B = 0 \quad (5.3.1.7)$$

A constante A é calculada de modo que $y'(l_e/2) = 0$:

$$y' \left(\frac{l_e}{2} \right) = 0 = k A \operatorname{cos} \left(k \frac{l_e}{2} \right) - \frac{H_d}{2N_{sd}} \quad (5.3.1.8)$$

$$A = \frac{H_d}{2N_{sd} k \cos\left(k \frac{l_e}{2}\right)} \quad (5.3.1.9)$$

A equação (5.3.1.6) assume a seguinte forma, onde $0 \leq x \leq l_e/2$:

$$y(x) = \frac{H_d \text{sen}(kx)}{2N_{sd} k \cos\left(k \frac{l_e}{2}\right)} - \frac{H_d}{2N_{sd}} x \quad (5.3.1.10)$$

$$y(x) = \frac{H_d}{2N_{sd} k} \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\cos\left(k \frac{l_e}{2}\right)} - kx \right] \quad (5.3.1.11)$$

Estas expressões só valem para $x \leq l_e/2$. Para $l_e/2 \leq x \leq l_e$ o momento de primeira ordem muda para $M_{1d} = H_d/2(l_e - x)$. Como, por simetria, a metade inferior é idêntica à superior, basta trocar nas equações x por $x' = l_e - x$.

A partir das equações (5.2.1) e (5.3.1.11), os momentos fletores assumem os seguintes valores:

$$M_{1d} = \frac{H_d}{2} x \quad (5.3.1.12)$$

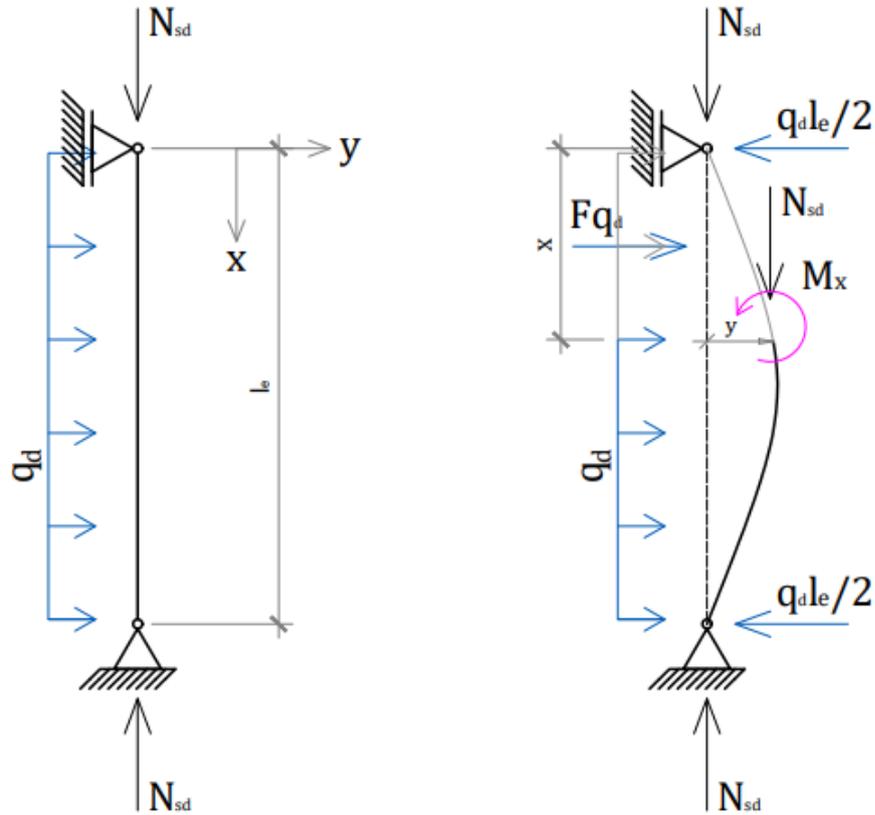
$$M_{2d} = \frac{H_d}{2k} \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\cos\left(k \frac{l_e}{2}\right)} - kx \right] \quad (5.3.1.13)$$

$$M_{sd, \text{total}} = \frac{H_d}{2k} \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\cos\left(k \frac{l_e}{2}\right)} \right] \quad (5.3.1.14)$$

5.3.2 Carga uniformemente distribuída

A Figura 5.5 ilustra o caso de carregamento para a carga uniformemente distribuída ao longo do lance, assim como o momento fletor nas condições deformada e indeformada. Considera-se assim o momento fletor na seção genérica:

Figura 5.5 – Momento fletor nas posições indeformada e deformada para carga uniformemente distribuída



Fonte: O autor

$$M_1(x) = \frac{q_d}{2}(x l_e - x^2) \tag{5.3.2.1}$$

$$EI_{sec} y''(x) + N_{sd} y(x) = -q_d \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x l_e}{2} \right) \tag{5.3.2.2}$$

Utiliza-se das equações (5.2.5), (5.2.6), (5.2.7) e (5.2.8) tem-se:

$$b_0 = -\frac{a_0}{N_{sd}} - 2 \frac{b_2}{k^2} \tag{5.3.2.3}$$

$$q_d \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x l_e}{2} \right) = -\frac{a_0}{N_{sd}} - \frac{b_1}{N_{sd}} x - \frac{b_2}{N_{sd}} x^2 - 2 \frac{b_2}{k^2} \tag{5.3.2.4}$$

$$b_2 = + \frac{q_d}{2 N_{sd}} \tag{5.3.2.5}$$

$$b_1 = -\frac{q_d l_e}{2N_{sd}} \quad (5.3.2.6)$$

$$a_0 = 0 \quad (5.3.2.7)$$

$$b_0 = -\frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \quad (5.3.2.8)$$

Assim, a equação (5.2.4) assume a seguinte forma:

$$y(x) = A \operatorname{sen}(kx) + B \operatorname{cos}(kx) - \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} - \frac{q_d l_e}{2N_{sd}} x + \frac{q_d}{2N_{sd}} x^2 \quad (5.3.2.9)$$

As constantes são calculadas de modo que y se anule em $x = 0$ e $x = l_e$:

$$B = \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \quad (5.3.2.10)$$

$$A = \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \frac{1 - \operatorname{cos}(k l_e)}{\operatorname{sen}(k l_e)} = \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \operatorname{tg}\left(\frac{k l_e}{2}\right) \quad (5.3.2.11)$$

A equação (5.3.2.9) assume as seguintes formas:

$$y(x) = \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \operatorname{tg}\left(\frac{k l_e}{2}\right) \operatorname{sen}(kx) + \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \operatorname{cos}(kx) - \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} - \frac{q_d l_e}{2N_{sd}} x + \frac{q_d}{2N_{sd}} x^2 \quad (5.3.2.12)$$

$$y(x) = \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{k l_e}{2}\right) \operatorname{sen}(kx) + \operatorname{cos}(kx) - 1 \right] - \frac{q_d}{2N_{sd}} (l_e x - x^2) \quad (5.3.2.13)$$

$$y(x) = \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \left[\frac{\operatorname{cos} k \left(\frac{l_e}{2} - x\right)}{\operatorname{cos} \left(\frac{k l_e}{2}\right)} - 1 \right] - \frac{q_d}{2N_{sd}} (l_e x - x^2) \quad (5.3.2.14)$$

A partir das equações (5.2.1) e (5.3.2.14), os momentos fletores assumem os seguintes valores:

$$M_{1d} = \frac{q_d}{2} (xl_e - x^2) \quad (5.3.2.15)$$

$$M_{2d} = \frac{q_d}{k^2} \left[\frac{\cos k \left(\frac{l_e}{2} - x \right)}{\cos \left(\frac{k l_e}{2} \right)} - 1 \right] - \frac{q_d}{2} (l_e x - x^2) \quad (5.3.2.16)$$

$$M_{sd,total} = \frac{q_d}{k^2} \left[\frac{\cos k \left(\frac{l_e}{2} - x \right)}{\cos \left(\frac{k l_e}{2} \right)} - 1 \right] \quad (5.3.2.17)$$

5.3.3 Momentos aplicados nas extremidades

A Figura 5.6 ilustra o caso de carregamento para os momentos aplicados nas extremidades do pilar, assim como o momento fletor nas condições deformada e indeformada. Considera-se assim o momento fletor na seção genérica:

$$M_1(x) = M_{ad} + (M_{bd} - M_{ad}) \frac{x}{l_e} \quad (5.3.3.1)$$

$$EI_{sec} y''(x) + N_{sd} y(x) = -M_{ad} - (M_{bd} - M_{ad}) \frac{x}{l_e} \quad (5.3.3.2)$$

Utiliza-se das equações (5.2.5), (5.2.6) e (5.2.7) tem-se:

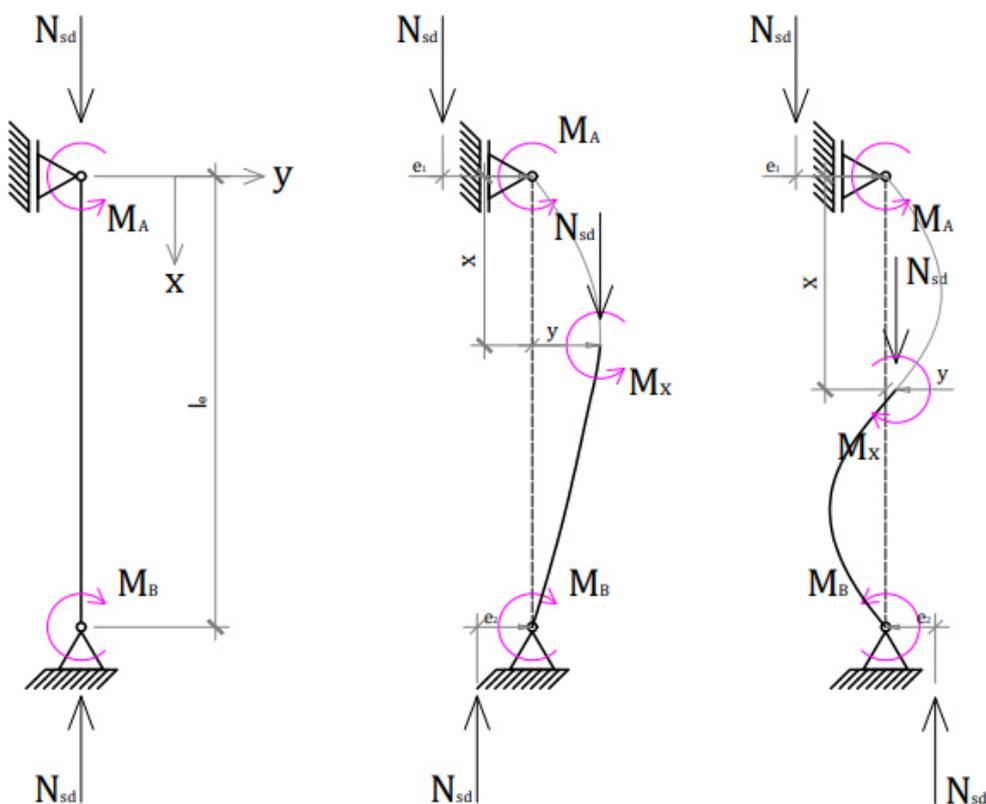
$$b_0 = -\frac{a_0}{N_{sd}} \quad (5.3.3.3)$$

$$b_0 = -e_1 = -\frac{M_{ad}}{N_{sd}} \quad (5.3.3.4)$$

$$b_1 = -\frac{a_1}{N_{sd}} \quad (5.3.3.5)$$

$$b_1 = -\frac{e_2}{l_e} + \frac{e_1}{l_e} = \frac{M_{ad}}{N_{sd} l_e} - \frac{M_{bd}}{N_{sd} l_e} \quad (5.3.3.6)$$

Figura 5.6 – Momento fletor nas posições indeformada e deformada para os momentos aplicados nas extremidades



Fonte: O autor

Assim, a equação (5.2.4) assume a seguinte forma:

$$y(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) - e_1 + \frac{e_1}{l_e} x - \frac{e_2}{l_e} x \quad (5.3.3.7)$$

As constantes são calculadas de modo que y se anule em $x = 0$ e $x = l_e$:

$$B = e_1 \quad (5.3.3.8)$$

$$A = -e_1 \frac{\cos(kl_e)}{\sin(kl_e)} + \frac{e_2}{\sin(kl_e)} \quad (5.3.3.9)$$

A equação (5.3.3.5) assume as seguintes formas:

$$y(x) = -e_1 \frac{\cos(kl_e)}{\text{sen}(kl_e)} \text{sen}(kx) + \frac{e_2 \text{sen}(kx)}{\text{sen}(kl_e)} + e_1 \cos(kx) + \frac{e_1}{l_e} x - \frac{e_2}{l_e} x \quad (5.3.3.10)$$

$$y(x) = e_1 \left[\cos(kx) - \frac{\cos(kl_e)}{\text{sen}(kl_e)} \text{sen}(kx) - 1 + \frac{x}{l_e} \right] + e_2 \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\text{sen}(kl_e)} - \frac{x}{l_e} \right] \quad (5.3.3.11)$$

$$y(x) = e_1 \left[\frac{\text{sen } k(l_e - x)}{\text{sen}(kl_e)} - 1 + \frac{x}{l_e} \right] + e_2 \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\text{sen}(kl_e)} - \frac{x}{l_e} \right] \quad (5.3.3.12)$$

A partir das equações (5.2.1) e (5.3.3.12), os momentos fletores assumem os seguintes valores:

Enfatiza-se que x é sempre medido de cima para baixo, a partir da extremidade A, onde se aplica M_{ad} .

$$M_{1d} = M_{ad} + \frac{x}{l} (M_{bd} - M_{ad}) \quad (5.3.3.13)$$

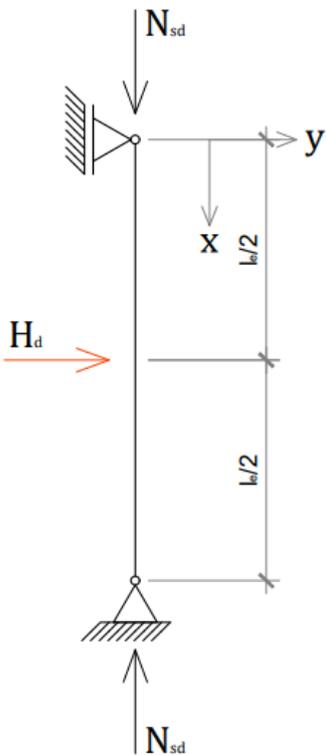
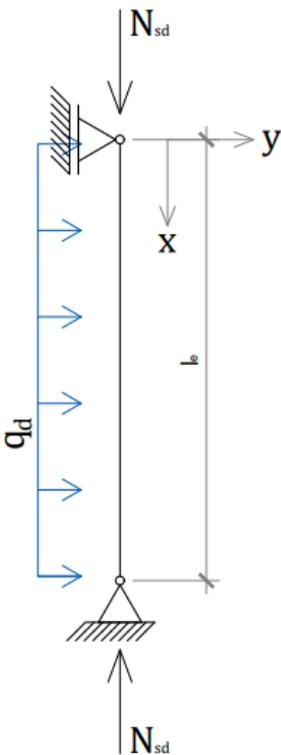
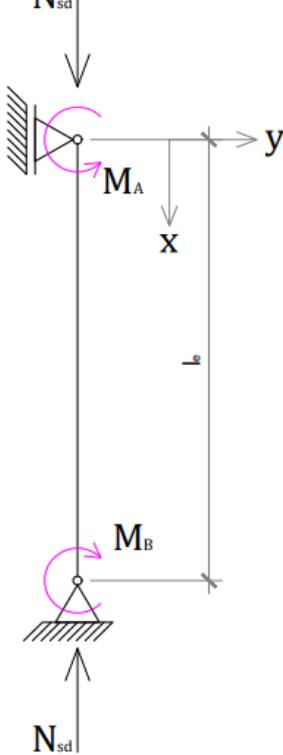
$$M_{2d} = M_{ad} \left[\frac{\text{sen } k(l_e - x)}{\text{sen}(kl_e)} - 1 + \frac{x}{l_e} \right] + M_{bd} \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\text{sen}(kl_e)} - \frac{x}{l_e} \right] \quad (5.3.3.14)$$

$$M_{sd, \text{total}} = \frac{M_{ad} \text{sen } k(l_e - x) + M_{bd} \text{sen}(kx)}{\text{sen}(kl_e)} \quad (5.3.3.15)$$

5.3.4 Exemplo

A tabela a seguir apresenta os momentos de primeira e de segunda ordem ao longo do lance, onde os momentos das extremidades são iguais e tracionam a mesma face do pilar.

Tabela 5.1 – Carregamentos do pilar biarticulado

HORIZONTAL NO MEIO DO VÃO	UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA	MOMENTOS NAS EXTREMIDADES
		
$M_{1d} = \frac{H_d}{2} x$	$M_{1d} = \frac{q_d}{2} (x l_e - x^2)$	$M_{1d} = M_a + \frac{x}{l} (M_b - M_a)$
$M_{2d} = \frac{H_d}{2k} \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\cos\left(k\frac{l_e}{2}\right)} - kx \right]$	$M_{2d} = \frac{q_d}{k^2} \left[\frac{\cos k\left(\frac{l_e}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{k l_e}{2}\right)} - 1 \right] - \frac{q_d}{2} (l_e x - x^2)$	$M_{2d} = M_a \left[\frac{\text{sen } k(l_e - x)}{\text{sen}(k l_e)} \right] + M_a \left(\frac{x}{l_e} - 1 \right) + M_b \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\text{sen}(k l_e)} - \frac{x}{l_e} \right]$

Fonte: O autor

O exemplo a seguir apresenta um pilar biarticulado, de seção retangular e vazada (Exemplo 4.2.1 e Apêndice A).

São dados: $f_{ck} = 60 \text{ MPa}$, o agregado graúdo basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$), 10 barras de armadura lateral, representando 10% da proporção A_{s1}/A_{s0} . Na seção vazada,

as dimensões são $B_e = H_e = 1000 \text{ mm}$, $B_i = H_i = 800 \text{ mm}$, $d' = 50 \text{ mm}$. O comprimento do pilar é $l_e = 13,0 \text{ m}$.

As ações consideradas são: $N_{sd} = 13.115 \text{ kN}$, $M_{Ad} = M_{Bd} = 720 \text{ kNm}$, $H_d = 225 \text{ kN}$ e $q_d = 35 \text{ kN/m}$ e a excentricidade e_a , dada abaixo.

A partir do diagrama momento-curvatura (Exemplo 4.2.1), a seção mais solicitada do pilar analisado tem rigidez $EI_{sec} = 2.002.639,0 \text{ kNm}^2$. Com este valor obtém-se:

$$k = \sqrt{\frac{N_{sd}}{EI_{sec}}} = \sqrt{\frac{13.115}{2.002.639,0}} = 0,0809 \text{ m}^{-1} \quad (5.3.4.1)$$

$$\alpha_d = \frac{k^2 l_e^2}{\pi^2} = \frac{0,0809^2 13^2}{\pi^2} = 0,1121 \quad (5.3.4.2)$$

Com o intuito de fazer uma análise mais completa do exemplo, divide-se o pilar em 10 segmentos, obtendo 11 valores de momento fletor ao longo do lance.

A análise da falta de retilinearidade inicia-se com o cálculo do coeficiente θ_1 e e_a , de acordo com o item 2.8.1 deste trabalho.

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{l_e}} = \frac{1}{100\sqrt{13}} = \frac{1}{360,55} \quad (5.3.4.3)$$

$$e_a = \max\left(\theta_1 \frac{l_e}{2}; \frac{h_e}{30}\right) = \max\left(\frac{13}{720}; \frac{1}{30}\right) \quad (5.3.4.4)$$

$$e_a = \frac{1}{30} = 0,0333 \text{ m} \quad (5.3.4.5)$$

Os momentos de primeira, de segunda ordem e os deslocamentos devidos a falta de retilinearidade:

$$M_{1d}(x) = N_{sd} e_a \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l_e}\right) = 437,1667 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{13}\right) \quad (5.3.4.6)$$

$$M_{2d}(x) = \frac{\alpha_d}{1 - \alpha_d} N_{sd} e_a \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l_e}\right) = 55,2145 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{13}\right) \quad (5.3.4.7)$$

$$y_2(x) = \frac{\alpha_d}{1 - \alpha_d} e_a \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l_e}\right) = 0,0042 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{13}\right) \quad (5.3.4.8)$$

A Tabela 5.2 apresenta os valores de momentos de primeira, de segunda ordem e os deslocamentos devidos a falta de retilinearidade ao longo do lance:

Tabela 5.2 – Esforços de primeira e de segunda ordem para a falta de retilinearidade para o Exemplo 1 – Pilar biarticulado com seção retangular

i	$l_e(x)$ (m)	$M_{1d}(x)$ (kNm)	$M_{2d}(x)$ (kNm)	$M_{sd}(x)$ (kNm)	$y_2(x)$ (m)
1	0,00	0,0	0,0	0,0	0,0000
2	1,30	135,1	17,1	152,2	0,0013
3	2,60	257,0	32,5	289,4	0,0025
4	3,90	353,7	44,7	398,3	0,0034
5	5,20	415,8	52,5	468,3	0,0040
6	6,50	437,2	55,2	492,4	0,0042
7	7,80	415,8	52,5	468,3	0,0040
8	9,10	353,7	44,7	398,3	0,0034
9	10,40	257,0	32,5	289,4	0,0025
10	11,70	135,1	17,1	152,2	0,0013
11	13,00	0,0	0,0	0,0	0,0000

Fonte: O autor

Os momentos de primeira, de segunda ordem e os deslocamentos devidos a Carga horizontal no meio do vão:

$$M_{1d}(x) = \frac{H_d}{2} x = 225 * \frac{x}{2} \tag{5.3.4.9}$$

$$M_{2d} = \frac{H_d}{2k} \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\cos\left(k\frac{l_e}{2}\right)} - kx \right] = \frac{225}{0,1618} \left[\frac{\text{sen}(0,0809x)}{\cos(0,52585)} - 0,0809x \right] \tag{5.3.4.10}$$

$$y(x) = \frac{H_d}{2N_{sd} k} \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\cos\left(k\frac{l_e}{2}\right)} - kx \right] \tag{5.3.4.11}$$

$$y(x) = \frac{225}{2122,6613} \left[\frac{\text{sen}(0,0809x)}{\cos(0,52585)} - 0,0809x \right] \tag{5.3.4.12}$$

A Tabela 5.3 apresenta os valores de momentos de primeira, de segunda ordem e os deslocamentos devidos a carga horizontal no meio do vão:

Tabela 5.3 – Esforços de primeira e de segunda ordem para a carga horizontal no meio do vão para o Exemplo 1 – Pilar biarticulado com seção retangular

i	$l_e(x)$ (m)	$M_{1d}(x)$ (kNm)	$M_{2d}(x)$ (kNm)	$M_{sd}(x)$ (kNm)	$y_2(x)$ (m)
1	0,00	0,0	0,0	0,0	0,0000
2	1,30	146,3	22,5	168,8	0,0017
3	2,60	292,5	43,2	335,7	0,0033
4	3,90	438,8	60,2	499,0	0,0046
5	5,20	585,0	71,7	656,7	0,0055
6	6,50	731,3	75,8	807,1	0,0058
7	7,80	585,0	71,7	656,7	0,0055
8	9,10	438,8	60,2	499,0	0,0046
9	10,40	292,5	43,2	335,7	0,0033
10	11,70	146,3	22,5	168,8	0,0017
11	13,00	0,0	0,0	0,0	0,0000

Fonte: O autor

Os momentos de primeira, de segunda ordem e os deslocamentos devidos a carga uniformemente distribuída ao longo do lance:

$$M_{1d} = \frac{q_d}{2} (x l_e - x^2) = \frac{35}{2} (13x - x^2) \quad (5.3.4.13)$$

$$M_{2d} = \frac{q_d}{k^2} \left[\frac{\cos k \left(\frac{l_e}{2} - x \right)}{\cos \left(\frac{k l_e}{2} \right)} - 1 \right] - \frac{q_d}{2} (l_e x - x^2) \quad (5.3.4.14)$$

$$M_{2d} = \frac{35}{0,0809^2} \left[\frac{\cos 0,0809 \left(\frac{13}{2} - x \right)}{\cos (0,52585)} - 1 \right] - \frac{35}{2} (13x - x^2) \quad (5.3.4.15)$$

$$y(x) = \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \left[\frac{\cos k \left(\frac{l_e}{2} - x \right)}{\cos \left(\frac{k l_e}{2} \right)} - 1 \right] - \frac{q_d}{2 N_{sd}} (l_e x - x^2) \quad (5.3.4.16)$$

$$y(x) = \frac{35}{85,8881} \left[\frac{\cos 0,0809 \left(\frac{13}{2} - x \right)}{\cos (0,52585)} - 1 \right] - \frac{35}{26230} (13x - x^2) \quad (5.3.4.17)$$

A Tabela 5.4 apresenta os valores de momentos de primeira, de segunda ordem e os deslocamentos devido a carga uniformemente distribuída ao longo do lance:

Tabela 5.4 – Esforços de primeira e de segunda ordem para a carga uniformemente distribuída ao longo do lance para o Exemplo 1 – Pilar biarticulado com seção retangular

i	$l_e(x)$ (m)	$M_{1d}(x)$ (kNm)	$M_{2d}(x)$ (kNm)	$M_{sd}(x)$ (kNm)	$y_2(x)$ (m)
1	0,00	0,0	0,0	0,0	0,0000
2	1,30	266,2	30,1	296,3	0,0023
3	2,60	473,2	57,0	530,2	0,0043
4	3,90	621,1	78,1	699,1	0,0060
5	5,20	709,8	91,5	801,3	0,0070
6	6,50	739,4	96,0	835,4	0,0073
7	7,80	709,8	91,5	801,3	0,0070
8	9,10	621,1	78,1	699,1	0,0060
9	10,40	473,2	57,0	530,2	0,0043
10	11,70	266,2	30,1	296,3	0,0023
11	13,00	0,0	0,0	0,0	0,0000

Fonte: O autor

Os momentos de primeira, de segunda ordem e os deslocamentos devido aos momentos aplicados nas extremidades:

$$M_{1d} = M_{ad} + \frac{x}{l} (M_{bd} - M_{ad}) = 720 \text{ kNm} \quad (5.3.4.18)$$

$$M_{2d} = M_{ad} \left[\frac{\text{sen } k(l_e - x)}{\text{sen}(kl_e)} - 1 + \frac{x}{l_e} \right] + M_{bd} \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\text{sen}(kl_e)} - \frac{x}{l_e} \right] \quad (5.3.4.19)$$

$$M_{2d} = 720 \left[\frac{\text{sen } 0,0809(13 - x)}{\text{sen}(1,0517)} - 1 + \frac{x}{13} \right] + 720 \left[\frac{\text{sen}(0,0809x)}{\text{sen}(1,0517)} - \frac{x}{13} \right] \quad (5.3.4.20)$$

$$y(x) = \frac{M_{ad}}{N_{sd}} \left[\frac{\text{sen } k(l_e - x)}{\text{sen}(kl_e)} - 1 + \frac{x}{l_e} \right] + \frac{M_{bd}}{N_{sd}} \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\text{sen}(kl_e)} - \frac{x}{l_e} \right] \quad (5.3.4.21)$$

$$y(x) = \frac{720}{13115} \left[\frac{\text{sen } 0,0809(13 - x)}{\text{sen}(1,0517)} - 1 + \frac{x}{13} \right] + \frac{720}{13115} \left[\frac{\text{sen}(0,0809x)}{\text{sen}(1,0517)} - \frac{x}{13} \right] \quad (5.3.4.22)$$

A Tabela 5.5 apresenta os valores de momentos de primeira e de segunda ordem devido a carga uniformemente distribuída ao longo do lance:

Tabela 5.5 - Esforços de primeira e de segunda ordem para momentos aplicados nas extremidades do pilar para o Exemplo 1 - Pilar biarticulado com seção retangular

i	$l_e(x)$ (m)	$M_{1d}(x)$ (kNm)	$M_{2d}(x)$ (kNm)	$M_{sd}(x)$ (kNm)	$y_2(x)$ (m)
1	0,00	720,0	0,0	720,0	0,0000
2	1,30	720,0	39,9	759,9	0,0030
3	2,60	720,0	71,4	791,4	0,0054
4	3,90	720,0	94,2	814,2	0,0072
5	5,20	720,0	107,9	827,9	0,0082
6	6,50	720,0	112,5	832,5	0,0086
7	7,80	720,0	107,9	827,9	0,0082
8	9,10	720,0	94,2	814,2	0,0072
9	10,40	720,0	71,4	791,4	0,0054
10	11,70	720,0	39,9	759,9	0,0030
11	13,00	720,0	0,0	720,0	0,0000

Fonte: O autor

A Tabela 5.6 apresenta o somatório de todos os momentos de primeira, segunda ordem e os deslocamentos advindos de todos os carregamentos:

Tabela 5.6 – Esforços totais para o Exemplo 1 – Pilar biarticulado com seção retangular

i	$l_e(x)$ (m)	$M_{1d}(x)$ (kNm)	$M_{2d}(x)$ (kNm)	$M_{sd}(x)$ (kNm)	$y_2(x)$ (m)
1	0,00	720,0	0,0	720,0	0,0000
2	1,30	1267,5	109,6	1377,1	0,0084
3	2,60	1742,7	204,1	1946,8	0,0156
4	3,90	2133,5	277,1	2410,6	0,0211
5	5,20	2430,6	323,6	2754,1	0,0247
6	6,50	2627,8	339,7	2967,4	0,0259
7	7,80	2430,6	323,6	2754,1	0,0247
8	9,10	2133,5	277,1	2410,6	0,0211
9	10,40	1742,7	204,1	1946,8	0,0156
10	11,70	1267,5	109,6	1377,1	0,0084
11	13,00	720,0	0,0	720,0	0,0000

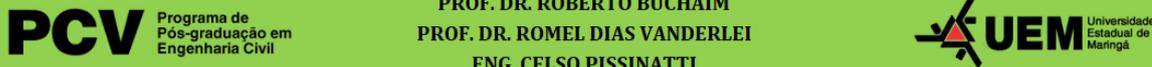
Fonte: O autor

A Figura 5.7 mostra os dados utilizados no dimensionamento, assim como os dados de saída do programa.

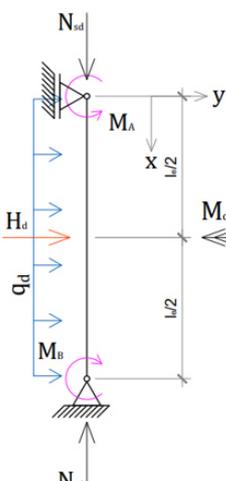
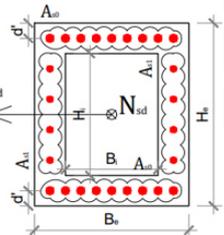
Figura 5.7 – Dados de entrada e de saída para o Exemplo 1 - Pilar biarticulado com seção retangular

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

PROF. DR. ROBERTO BUCHAIM
 PROF. DR. ROMEL DIAS VANDERLEI
 ENG. CELSO PISSINATTI



DIMENSIONAMENTO DE PILARES ESBELTOS DE SEÇÕES RETANGULARES CHEIAS E VAZADAS

f_{ck}	γ_c	$0,85 f_{cd}$	α_g	f_{yk}	f_{yd}
60 MPa	1,40	36,43 MPa	1,20	500 MPa	435 MPa

ϵ_{c2}	ϵ_{cu}	γ_m	A_{s1}/A_{s0}	n_{lat}^2	$\rho_{s,max}$
2,29‰	2,88‰	1,00	10%	10	8%

B	H	B_1	H_1	d'	l_a
1000 mm	1000 mm	800 mm	800 mm	50 mm	13,0 m

Vinculação	N_{sd}	M_{1d}	M_{2d}	H_d	q_d
Biapoiado	13115 kN	720,0 kNm	720,0 kNm	225,0 kN	35,0 kN/m

A_0	I_0	$\sqrt{I_0/A_0}$	λ
360000,0 mm ²	4,920E+10 mm ⁴	369,7 mm	35,2

CALCULAR

v_d	e_a	M_{1d}	μ_{1d}	$M_{sd,tot}$	$H_{sd,tot}$
1,000	0,033 m	2627,8 kNm	0,200	2967,4 kNm	0,226

α_d	$\alpha_{d,tot}$	$A_{s,tot}$	$\rho_{s,tot}$	y_2	$(EI)_{sec}$
0,11	0,621	18725 mm ²	5,20%	0,026 m	2002639 kNm ²

Fonte: O autor

5.4 PILAR EM BALANÇO

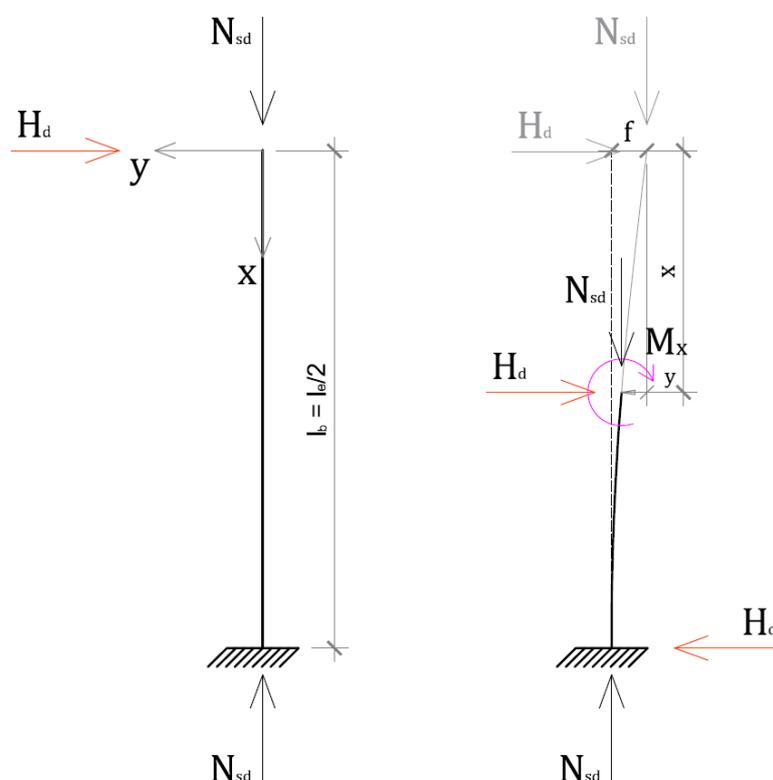
Mostram-se nos próximos itens as deduções dos carregamentos advindos de cada carregamento transversal, baseado nos textos de LANGENDONCK, T. (1944).

Os valores de H_d , q_d e M_{0d} , assim como a força axial, são aqui também convencionados como positivos.

5.4.1 Carga horizontal no topo do pilar

A Figura 5.8 ilustra o caso de carregamento para a carga horizontal no topo do pilar, assim como o momento fletor nas condições deformada e indeformada. Considera-se assim o momento fletor na seção genérica:

Figura 5.8 – Momento fletor nas posições indeformada e deformada para carga horizontal no topo do pilar



Fonte: O autor

$$M_1(x) = H_d x \quad (5.4.1.1)$$

$$EI_{\text{sec}} y''(x) + N_{\text{sd}} y(x) = -H_d x \quad (5.4.1.2)$$

Utiliza-se das equações (5.2.5) e (5.2.6) tem-se:

$$b_0 + b_1 x = H_d x \quad (5.4.1.3)$$

$$b_1 = -\frac{a_1}{N_{\text{sd}}} = -\frac{H_d}{N_{\text{sd}}} \quad (5.4.1.4)$$

$$b_0 = 0 \quad (5.4.1.5)$$

Assim, a equação (5.2.4) assume a seguinte forma:

$$y(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) - \frac{H_d}{N_{\text{sd}}} x \quad (5.4.1.6)$$

A constante B é calculada de modo que y se anule em $x = l_b$:

$$B = 0 \quad (5.4.1.7)$$

A constante A é calculada de modo que $y'(l_b) = 0$:

$$y'(l_b) = 0 = k A \cos(kl_b) - \frac{H_d}{N_{\text{sd}}} \quad (5.4.1.8)$$

$$A = \frac{H_d}{N_{\text{sd}} k \cos(kl_b)} \quad (5.4.1.9)$$

A equação (5.4.1.6) assume as seguintes formas:

$$y(x) = \frac{H_d}{k N_{\text{sd}}} \frac{\sin(kx)}{\cos(kl_b)} - \frac{H_d}{N_{\text{sd}}} x \quad (5.4.1.10)$$

$$y(x) = \frac{H_d}{k N_{\text{sd}}} \left[\frac{\sin(kx)}{\cos(kl_b)} - kx \right] \quad (5.4.1.11)$$

A partir das equações (5.2.1) e (5.4.1.11), os momentos fletores assumem os seguintes valores:

$$M_{1d} = H_d x \quad (5.4.1.12)$$

$$M_{2d} = \frac{H_d}{k} \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\cos(kl_b)} - kx \right] \quad (5.4.1.13)$$

$$M_{sd, \text{total}} = \frac{H_d}{k} \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\cos(kl_b)} \right] \quad (5.4.1.14)$$

5.4.2 Carga uniformemente distribuída

A Figura 5.9 ilustra o caso de carregamento para a carga uniformemente distribuída ao longo do lance, assim como o momento fletor nas condições deformada e indeformada. Considera-se assim o momento fletor na seção genérica:

$$M_1(x) = \frac{q_d}{2} x^2 \quad (5.4.2.1)$$

$$EI_{\text{sec}} y''(x) + N_{sd} y(x) = -\frac{q_d}{2} x^2 \quad (5.4.2.2)$$

Utiliza-se das equações (5.2.5) e (5.2.6) tem-se:

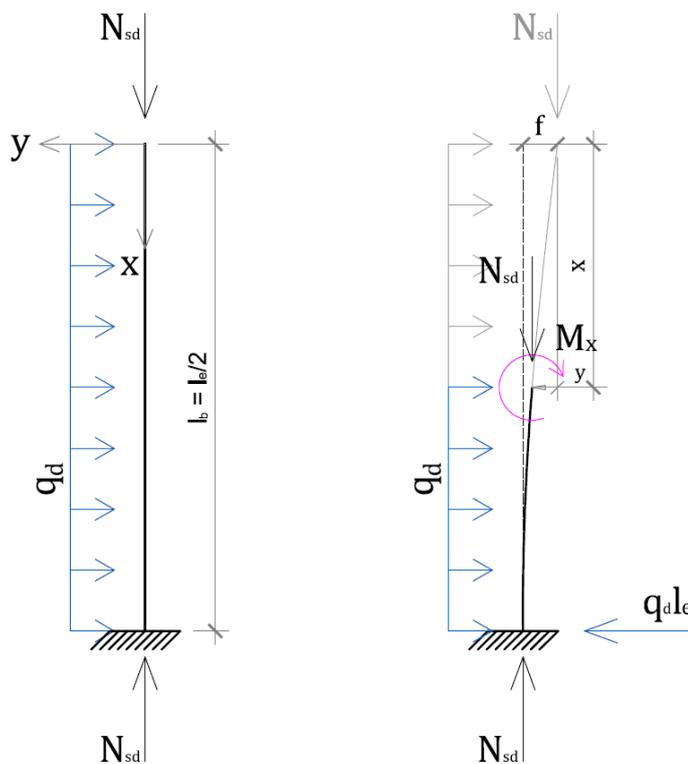
$$b_0 = -\frac{a_0}{N_{sd}} - 2 \frac{b_2}{k^2} \quad (5.4.2.3)$$

$$b_2 = -\frac{q_d}{2N_{sd}} \quad (5.4.2.4)$$

$$b_1 = 0 \quad (5.4.2.5)$$

$$b_0 = +\frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \quad (5.4.2.6)$$

Figura 5.9 – Momento fletor nas posições indeformada e deformada para carga uniformemente distribuída



Fonte: O autor

Assim, a equação (5.2.4) assume a seguinte forma:

$$y(x) = A \operatorname{sen}(kx) + B \operatorname{cos}(kx) - \frac{q_d}{2N_{sd}} x^2 + \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \quad (5.4.2.7)$$

As constantes são calculadas de modo que y se anule em $x = 0$:

$$B = -\frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \quad (5.4.2.8)$$

A constante A é calculada de modo que $y'(l_b) = 0$:

$$0 = k A \operatorname{cos}(kl_b) + k \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \operatorname{sen}(kl_b) - \frac{q_d l_b}{N_{sd}} \quad (5.4.2.9)$$

$$A = -\frac{q_d \operatorname{sen}(kl_b)}{k^2 N_{sd} \operatorname{cos}(kl_b)} + \frac{q_d l_b}{k N_{sd} \operatorname{cos}(kl_b)} \quad (5.4.2.10)$$

$$A = \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \left[\frac{kl_b - \text{sen}(kl_b)}{\cos(kl_b)} \right] \quad (5.4.2.11)$$

A equação (5.3.2.7) assume as seguintes formas:

$$y(x) = \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \left[\frac{kl_b - \text{sen}(kl_b)}{\cos(kl_b)} \right] \text{sen}(kx) - \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \cos(kx) - \frac{q_d}{2 N_{sd}} x^2 + \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \quad (5.4.2.12)$$

$$y(x) = \frac{q_d}{k^2 N_{sd}} \left[\frac{kl_b - \text{sen}(kl_b)}{\cos(kl_b)} \text{sen}(kx) - \cos(kx) - \frac{k^2 x^2}{2} + 1 \right] \quad (5.4.2.13)$$

A partir das equações (5.2.1) e (5.4.2.13), os momentos fletores assumem os seguintes valores:

$$M_{1d} = \frac{q_d}{2} x^2 \quad (5.4.2.15)$$

$$M_{2d} = \frac{q_d}{k^2} \left[\frac{kl_b - \text{sen}(kl_b)}{\cos(kl_b)} \text{sen}(kx) - \cos(kx) - \frac{k^2 x^2}{2} + 1 \right] \quad (5.4.2.16)$$

$$M_{sd, \text{total}} = \frac{q_d}{k^2 \cos(kl_b)} [kl_b \text{sen}(kx) - \cos k(l_b - x) + \cos(kl_b)] \quad (5.4.2.17)$$

5.4.3 Momento aplicado no topo

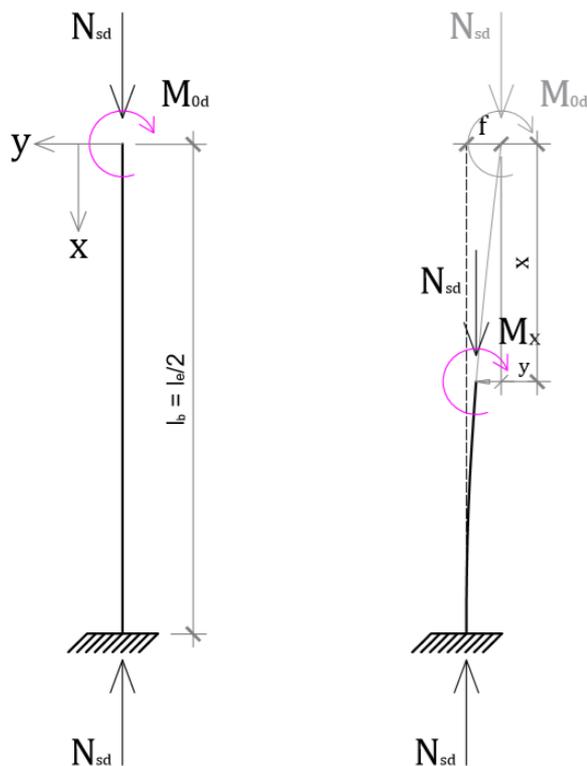
A Figura 5.10 ilustra o caso de carregamento para o momento aplicado no topo do pilar, assim como o momento fletor nas condições deformada e indeformada. Considera-se assim o momento fletor na seção genérica:

$$e = -\frac{M_{0d}}{N_{sd}} \quad (5.4.3.1)$$

$$M_{1d}(x) = N_{sd} e \quad (5.4.3.2)$$

$$EI_{\text{sec}} y''(x) + N_{sd} y(x) = -N_{sd} e \quad (5.4.3.3)$$

Figura 5.10 – Momento fletor nas posições indeformada e deformada para o momento aplicado no topo



Fonte: O autor

Utiliza-se das equações (5.2.5) e (5.2.6) tem-se:

$$b_0 = -\frac{a_0}{N_{sd}} \tag{5.4.3.4}$$

$$b_0 = -e \tag{5.4.3.5}$$

Assim, a equação (5.2.4) assume a seguinte forma:

$$y(x) = A\text{sen}(kx) + B\text{cos}(kx) - e \tag{5.4.3.6}$$

As constantes são calculadas de modo que y se anule em x = 0:

$$B = e \tag{5.4.3.7}$$

A constante A é calculada de modo que $y'(l_b) = 0$:

$$0 = k A \cos(kl_b) - k e \operatorname{sen}(kl_b) \quad (5.4.3.8)$$

$$A = e \frac{\operatorname{sen}(kl_b)}{\cos(kl_b)} = e \tan(kl_b) \quad (5.4.3.9)$$

A equação (5.3.3.5) assume as seguintes formas:

$$y(x) = e \tan(kl_b) \operatorname{sen}(kx) + e \cos(kx) - e \quad (5.4.3.10)$$

$$y(x) = e [\tan(kl_b) \operatorname{sen}(kx) + \cos(kx) - 1] \quad (5.4.3.11)$$

$$y(x) = e \left[\frac{\cos k(l_b - x)}{\cos(kl_b)} - 1 \right] \quad (5.4.3.12)$$

A partir das equações (5.2.1) e (5.4.3.11), os momentos fletores assumem os seguintes valores:

$$M_{1d} = N_{sd} e \quad (5.4.3.13)$$

$$M_{2d} = N_{sd} e \left[\frac{\cos k(l_b - x)}{\cos(kl_b)} - 1 \right] \quad (5.4.3.14)$$

$$M_{sd, \text{total}} = N_{sd} e \left[\frac{\cos k(l_b - x)}{\cos(kl_b)} \right] \quad (5.4.3.15)$$

5.4.4 Exemplo

A tabela a seguir apresenta os momentos de primeira e de segunda ordem ao longo do lance.

Tabela 5.7 – Carregamentos do pilar em balanço

HORIZONTAL NO TOPO	UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA	MOMENTO NO TOPO
$M_{1d} = H_d x$	$M_{1d} = \frac{q_d}{2} x^2$	$M_{1d} = M_{0d}$
$M_{2d} = \frac{H_d}{k} \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\cos(kl_b)} - kx \right]$	$M_{2d} = \frac{q_d}{k^2} \left[\text{sen}(kx) \frac{kl_b - \text{sen}(kl_b)}{\cos(kl_b)} + 1 \right]$ $-\cos(kx) - \frac{k^2 x^2}{2}$	$M_{2d} = M_{0d} \left[\frac{\cos k(l_b - x)}{\cos(kl_b)} - 1 \right]$

Fonte: O autor

O exemplo a seguir apresenta um pilar em balanço, de seção circular cheia (Exemplo 4.2.2 e Apêndice B).

São dados: $f_{ck} = 25$ MPa, o agregado graúdo basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$), com 32 barras de armadura distribuídas uniformemente ao longo da circunferência de raio R_s . Na seção cheia, as dimensões são: $R_e = 250$ mm, $R_i = 0$ mm, $R_s = 200$ mm, $d' = 50$ mm, $l_b = 5,0$ m. o comprimento do pilar é $l_e = 10,0$ m.

As ações consideradas são: $N_{sd} = 1.490$ kN, $M_{0d} = 53,0$ kNm, $H_d = 20,0$ kN e $q_d = 10,0$ kN/m e a excentricidade e_a , dada abaixo.

A partir do diagrama momento-curvatura (Exemplo 4.2.2), a seção mais solicitada do pilar analisado tem rigidez $EI_{sec} = 45.183$ kNm². Com este valor obtém-se:

$$k = \sqrt{\frac{N_{sd}}{EI_{sec}}} = \sqrt{\frac{1.490}{45.183}} = 0,1816 \text{ m}^{-1} \quad (5.3.4.1)$$

$$\alpha_d = \frac{k^2 l_e^2}{\pi^2} = \frac{0,1816^2 10^2}{\pi^2} = 0,3341 \quad (5.3.4.2)$$

Com o intuito de fazer uma análise mais completa do exemplo, divide-se o pilar em 10 segmentos, obtendo 11 valores de momento fletor ao longo do lance.

A análise da falta de retilineidade inicia-se com o cálculo do coeficiente θ_1 e e_a , de acordo com o item 2.8.1 deste trabalho.

$$\theta_1 = \frac{1}{200} \quad (5.3.4.3)$$

$$e_a = \max\left(\frac{l_b}{200}; \frac{D_e}{30}\right) = \max\left(\frac{5}{200}; \frac{0,5}{30}\right) \quad (5.3.4.4)$$

$$e_a = \frac{5}{200} = 0,025 \quad (5.3.4.5)$$

Os momentos de primeira, de segunda ordem e os deslocamentos devidos a falta de retilineidade:

$$M_{1d}(x) = N_{sd} e_a \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l_e}\right) = 37,25 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{10}\right) \quad (5.3.4.6)$$

$$M_{2d}(x) = \frac{\alpha_d}{1 - \alpha_d} N_{sd} e_a \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l_e}\right) = 18,6916 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{10}\right) \quad (5.3.4.7)$$

$$y_2(x) = \frac{\alpha_d}{1 - \alpha_d} e_a \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l_e}\right) = 0,0125 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{10}\right) \quad (5.3.4.8)$$

A Tabela 5.8 apresenta os valores de momentos de primeira, de segunda ordem e os deslocamentos devidos a falta de retilineidade ao longo do lance:

Tabela 5.8 – Esforços de primeira e de segunda ordem para a falta de retilinearidade para o Exemplo 2 - Pilar em balanço com seção circular

i	$l_b(x)$ (m)	$M_{1d}(x)$ (kNm)	$M_{2d}(x)$ (kNm)	$M_{sd}(x)$ (kNm)	$y_2(x)$ (m)
1	0,00	0,0	0,0	0,0	0,0000
2	0,50	5,8	2,9	8,8	0,0020
3	1,00	11,5	5,8	17,3	0,0039
4	1,50	16,9	8,5	25,4	0,0057
5	2,00	21,9	11,0	32,9	0,0074
6	2,50	26,3	13,2	39,6	0,0089
7	3,00	30,1	15,1	45,3	0,0101
8	3,50	33,2	16,7	49,8	0,0112
9	4,00	35,4	17,8	53,2	0,0119
10	4,50	36,8	18,5	55,3	0,0124
11	5,00	37,3	18,7	55,9	0,0125

Fonte: O autor

Os momentos de primeira, de segunda ordem e os deslocamentos devidos a Carga horizontal no meio do vão:

$$M_{1d}(x) = H_d x = 20 * x \quad (5.3.4.9)$$

$$M_{2d} = \frac{H_d}{k} \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\cos(kl_b)} - kx \right] = \frac{20}{0,1816} \left[\frac{\text{sen}(0,1816x)}{\cos(0,908)} - 0,1816x \right] \quad (5.3.4.10)$$

$$y(x) = \frac{H_d}{N_{sd}k} \left[\frac{\text{sen}(kx)}{\cos(kl_b)} - kx \right] \quad (5.3.4.11)$$

$$y(x) = \frac{20}{270,5776} \left[\frac{\text{sen}(0,1816x)}{\cos(0,908)} - 0,1816x \right] \quad (5.3.4.12)$$

A Tabela 5.9 apresenta os valores de momentos de primeira, de segunda ordem e os deslocamentos devidos a carga horizontal no meio do vão:

Tabela 5.9 – Esforços de primeira e de segunda ordem para a carga horizontal no topo do pilar para o Exemplo 2 - Pilar em balanço com seção circular

i	$l_b(x)$ (m)	$M_{1d}(x)$ (kNm)	$M_{2d}(x)$ (kNm)	$M_{sd}(x)$ (kNm)	$y_2(x)$ (m)
1	0,00	0,0	0,0	0,0	0,0000
2	0,50	10,0	6,2	16,2	0,0042
3	1,00	20,0	12,3	32,3	0,0083
4	1,50	30,0	18,2	48,2	0,0122
5	2,00	40,0	23,6	63,6	0,0158
6	2,50	50,0	28,5	78,5	0,0191
7	3,00	60,0	32,8	92,8	0,0220
8	3,50	70,0	36,3	106,3	0,0243
9	4,00	80,0	38,9	118,9	0,0261
10	4,50	90,0	40,5	130,5	0,0272
11	5,00	100,0	41,1	141,1	0,0276

Fonte: O autor

Os momentos de primeira, de segunda ordem e os deslocamentos devidos a carga uniformemente distribuída ao longo do lance:

$$M_{1d} = \frac{q_d}{2}x^2 = \frac{10}{2}x^2 \quad (5.3.4.13)$$

$$M_{2d} = \frac{q_d}{k^2} \left[1 - \cos(kx) - \frac{k^2x^2}{2} + \frac{kl_e - \text{sen}(kl_e)}{\cos(kl_e)} \text{sen}(kx) \right] \quad (5.3.4.14)$$

$$M_{2d} = \frac{10}{0,033} \left[\begin{array}{l} 1 - \cos(0,1816x) - \frac{0,033x^2}{2} \\ + \frac{0,908 - \text{sen}(0,908)}{\cos(0,908)} \text{sen}(0,1816x) \end{array} \right] \quad (5.3.4.15)$$

$$y(x) = \frac{q_d}{N_{sd}k^2} \left[1 - \cos(kx) - \frac{k^2x^2}{2} + \frac{kl_e - \text{sen}(kl_e)}{\cos(kl_e)} \text{sen}(kx) \right] \quad (5.3.4.16)$$

$$y(x) = \frac{q_d}{49,1357} \left[\begin{array}{l} 1 - \cos(0,1816x) - \frac{0,033x^2}{2} \\ + \frac{0,908 - \sin(0,908)}{\cos(0,908)} \sin(0,1816x) \end{array} \right] \quad (5.3.4.17)$$

A Tabela 5.10 apresenta os valores de momentos de primeira, de segunda ordem e os deslocamentos devido a carga uniformemente distribuída ao longo do lance:

Tabela 5.10 - Esforços de primeira e de segunda ordem para a carga uniformemente distribuída ao longo do lance para o Exemplo 2 - Pilar em balanço com seção circular

i	$l_b(x)$ (m)	$M_{1d}(x)$ (kNm)	$M_{2d}(x)$ (kNm)	$M_{sd}(x)$ (kNm)	$y_2(x)$ (m)
1	0,00	0,0	0,0	0,0	0,0000
2	0,50	1,3	5,3	6,6	0,0036
3	1,00	5,0	10,6	15,6	0,0071
4	1,50	11,3	15,8	27,1	0,0106
5	2,00	20,0	20,7	40,7	0,0139
6	2,50	31,3	25,3	56,6	0,0170
7	3,00	45,0	29,5	74,5	0,0198
8	3,50	61,3	33,0	94,2	0,0221
9	4,00	80,0	35,7	115,7	0,0240
10	4,50	101,3	37,5	138,8	0,0252
11	5,00	125,0	38,1	163,1	0,0256

Fonte: O autor

Os momentos de primeira, de segunda ordem e os deslocamentos devido aos momentos aplicados nas extremidades:

$$M_{1d} = M_{0d} = 53 \text{ kNm} \quad (5.3.4.18)$$

$$M_{2d} = M_{0d} \left[\frac{\cos k(l_e - x)}{\cos(k l_e)} - 1 \right] = 53 \left[\frac{\cos 0,1816(5 - x)}{\cos(0,908)} - 1 \right] \quad (5.3.4.19)$$

$$y(x) = \frac{M_{0d}}{N_{sd}} \left[\frac{\cos k(l_e - x)}{\cos(k l_e)} - 1 \right] = \frac{53}{1490} \left[\frac{\cos 0,1816(5 - x)}{\cos(0,908)} - 1 \right] \quad (5.3.4.20)$$

A Tabela 5.11 apresenta os valores de momentos de primeira e de segunda ordem devido ao momento aplicado no topo do pilar em balanço:

Tabela 5.11 – Esforços de primeira e de segunda ordem para o momento aplicado no topo do pilar para o Exemplo 2 - Pilar em balanço com seção circular

i	$l_b(x)$ (m)	$M_{1d}(x)$ (kNm)	$M_{2d}(x)$ (kNm)	$M_{sd}(x)$ (kNm)	$y_2(x)$ (m)
1	0,00	53,0	0,0	53,0	0,0000
2	0,50	53,0	5,9	58,9	0,0040
3	1,00	53,0	16,3	64,4	0,0076
4	1,50	53,0	11,4	69,3	0,0109
5	2,00	53,0	20,7	73,7	0,0139
6	2,50	53,0	24,4	77,4	0,0164
7	3,00	53,0	27,5	80,5	0,0185
8	3,50	53,0	30,0	83,0	0,0201
9	4,00	53,0	31,7	84,7	0,0213
10	4,50	53,0	32,8	85,8	0,0220
11	5,00	53,0	33,1	86,1	0,0222

Fonte: O autor

A Tabela 5.12 apresenta o somatório de todos os momentos de primeira, segunda ordem e os deslocamentos advindos de todos os carregamentos:

Tabela 5.12 – Esforços totais para o Exemplo 2 - Pilar em balanço com seção circular

i	$l_b(x)$ (m)	$M_{1d}(x)$ (kNm)	$M_{2d}(x)$ (kNm)	$M_{sd}(x)$ (kNm)	$y_2(x)$ (m)
1	0,00	53,0	0,0	53,0	0,0000
2	0,50	70,1	20,4	90,5	0,0137
3	1,00	89,5	40,1	129,6	0,0269
4	1,50	111,2	58,8	169,9	0,0394
5	2,00	134,9	76,0	210,9	0,0510
6	2,50	160,6	91,5	252,0	0,0614
7	3,00	188,1	104,9	293,0	0,0704
8	3,50	217,4	115,9	333,3	0,0778
9	4,00	248,4	124,1	372,5	0,0833
10	4,50	281,0	129,3	410,3	0,0868
11	5,00	315,3	131,1	446,3	0,0880

Fonte: O autor

A Figura 5.11 mostra os dados utilizados no dimensionamento, assim como os dados de saída do programa.

Figura 5.11 – Dados de entrada e de saída para o Exemplo 2 - Pilar em balanço com seção circular

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

PCV Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil
 UEM Universidade Estadual de Maringá

PROF. DR. ROBERTO BUCHAIM
 PROF. DR. ROMEL DIAS VANDERLEI
 ENG. CELSO PISSINATTI

DIMENSIONAMENTO DE PILARES ESBELTOS DE SEÇÕES CIRCULARES CHEIAS E VAZADAS

f_{cd}	γ_c	$0.85 f_{cd}$	α_g	f_{yk}	f_{yd}
25 MPa	1.40	15.18 MPa	1.20	500 MPa	435 MPa

ϵ_{c2}	ϵ_{cu}	ϵ_{yd}	ϵ_{su}	n° barras	$\rho_{s,max}$
2.00‰	3.50‰	2.07‰	10.00‰	32	8%

R_e	R_i	R_d	l_b	D_i / D_e	d' / D_e
250 mm	0 mm	200 mm	5.00 m	-	0.10

Vinculação	l_e	N_{sd}	M_{0d}	H_d	q_d
Balanço	10.00 m	1490 kN	53.0 kNm	20.0 kN	10.0 kN/m

A_0	I_0	$\sqrt{I_0} / \sqrt{A_0}$	λ
196349.5 mm ²	3.068E+09 mm ⁴	125.0 mm	80.0

CALCULAR

v_d	e_a	M_{1d}	μ_{1d}	$M_{sd,tot}$	$\mu_{sd,tot}$
0.500	0.025 m	315.3 kNm	0.212	446.3 kNm	0.300

α_d	$\alpha_{d,tot}$	$A_{s,tot}$	$\rho_{s,tot}$	y_2	(E) ρ_{ec}
0.33	0.924	6331 mm ²	3.22%	0.088 m	45183 kNm ²

Fonte: O autor

Capítulo 6

METODOLOGIA

6.1 FERRAMENTA COMPUTACIONAL

Baseado nos estudos de barras esbeltas de LANGENDONCK, T. (1944) e MENN, C. (1990), a dedução das equações diferenciais da deformada do lance permitem obter o momento solicitante total da peça, a ser igualado ao momento resistente do estado limite último.

Ocorre que ambos os momentos dependem da armadura, a qual é também incógnita. Com isto, a solução é obrigatoriamente iterativa.

Portanto, é fundamental desenvolver um programa computacional, via Excel/VBA, capaz de dimensionar este tipo de elemento estrutural, seguindo as equações deduzidas, e em conformidade com a ABNT NBR 6118:2014.

6.2 OBTENÇÃO DO MOMENTO SOLICITANTE TOTAL

Na procura da armadura do pilar, os programas desenvolvidos calculam de início a solução com a taxa mecânica mínima. Se o momento solicitante for inferior ao resistente, o programa indica que a seção e/ou a resistência do concreto é superabundante e é encerrado.

O segundo passo é buscar a solução para taxas sucessivas de armadura. Se for atingida a taxa máxima e se o respectivo momento solicitante for superior ao resistente, o programa também é encerrado, devendo-se aumentar a geometria da seção ou a resistência do concreto.

Se não for, a solução está em obter o intervalo mais preciso em que o produto da diferença entre os momentos resistente e solicitante para duas taxas sucessivas muda de sinal, com o que se determina o intervalo mais refinado da taxa.

Excluídos os dois casos de taxas extremas, a solução é única. Divide-se o intervalo entre as taxas extremas em 5 partes iguais, com o que ficam definidos, no total, 6 valores de taxas. Com este procedimento tem-se uma sequência crescente de taxa de armadura.

Para cada valor da taxa de armadura, constrói-se o diagrama momento-curvatura para o ELU, quando os valores de cálculo das resistências do concreto e do aço são respectivamente iguais a $f_{cd} = 0,85f_{ck}/1,4$ e $f_{yd} = f_{yk}/1,15$, encontrando o valor do momento resistente último M_{du} , quando terá sido atingida uma deformação limite no concreto ou na armadura tracionada. O valor de M_{du} é interpolado entre dois valores sucessivos de curvatura, em cujo intervalo ocorre a deformação limite. Neste caso usa-se a lei parábola-retângulo, conforme 2.5.2.1.

Com a mesma taxa da armadura, constrói-se o diagrama momento-curvatura, mas neste caso considera-se, para a deformabilidade do pilar, o valor de cálculo das resistências do concreto $f_{cdo} = f_{ck}/1,2$, conforme o diagrama tensão-deformação dado pela lei de Grasser, conforme 2.5.2.2.

Neste diagrama, em correspondência ao momento M_{du} (do primeiro diagrama), obtém-se a respectiva curvatura, e do quociente destas duas grandezas, encontra-se o valor da rigidez secante à flexão $(EI)_{sec}$. Com este dado, pode-se calcular o respectivo momento solicitante.

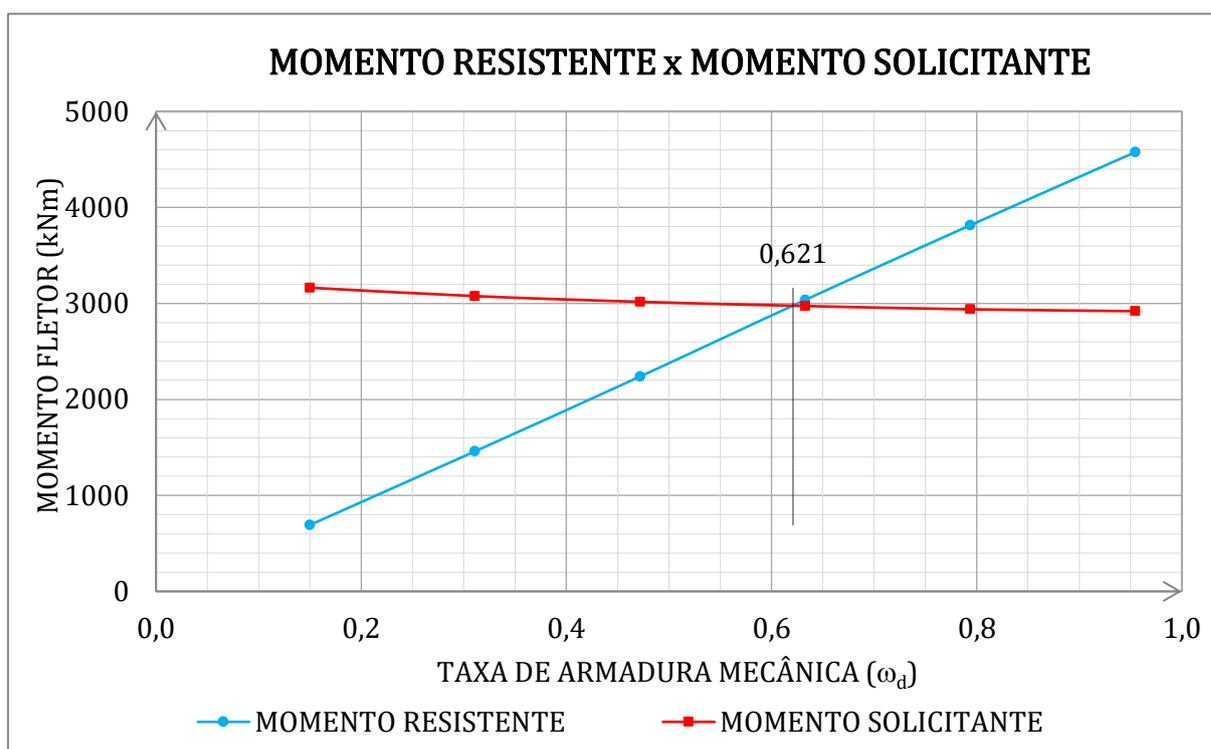
Caso a taxa de armadura não seja suficiente para resistir ao momento solicitante, o programa repete o procedimento anterior com o valor seguinte da taxa de armadura.

Haverá um intervalo de taxa em que ocorre mudança de sinal do produto da diferença entre os momentos solicitante e resistente, e nele está a resposta. Com isto, têm-se novos valores inicial e final de intervalo da taxa de armadura, mais precisos e no qual se encontra a resposta.

Com o refinamento do intervalo, o processo é repetido até obter-se um erro desprezível entre os valores inicial e final da taxa. Com isto, têm-se momentos solicitante e resistente praticamente iguais. Com a taxa de armadura definida, o programa emite as respostas e é encerrado.

A Figura 5.7 e a Figura 6.1 mostram os dados para o dimensionamento e diagramas momento solicitante versus momento resistente para a seção retangular. Na Figura 5.11 e na Figura 6.2 considera-se a seção circular.

Figura 6.1 – Curvas momentos resistente e solicitante em função da taxa mecânica da armadura para a seção retangular

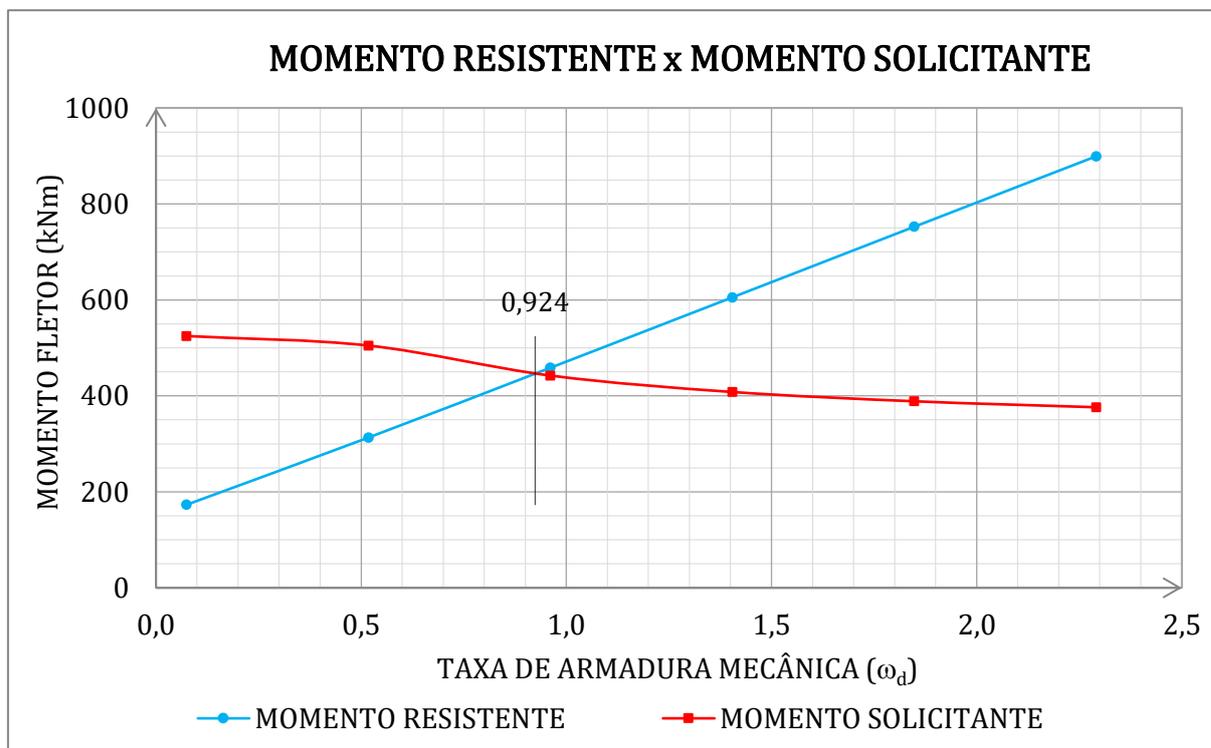


Fonte: O autor

Como a armadura na seção retangular é mais eficiente (camadas de armadura escoam simultaneamente) e o coeficiente α_d é baixo (o que representa um elevado coeficiente de segurança a flambagem), o momento resistente apresentou um comportamento muito próximo a de uma reta.

Para o exemplo com seção circular, além do coeficiente α_d mais elevado, a armadura distribuída na circunferência é menos eficiente, visto que o escoamento se dá barra por barra. Com isso, o momento resistente apresenta um comportamento linear após encontrar a solução de taxa de armadura ω_d .

Figura 6.2 – Curvas momentos resistente e solicitante em função da taxa mecânica da armadura para a seção circular



Fonte: O autor

6.3 COMPARAÇÃO COM OUTROS TIPOS DE ANÁLISE

Objetiva-se neste item comparar os valores de taxa de armadura e momento solicitante total com os resultados obtidos nos seguintes trabalhos:

- Aplicação de séries de Fourier (séries de senóides) para o momento solicitante total conforme BUCHAIM e DASCHEVI (2016);
- Análise M-N-1/r com a analogia do pilar-padrão e correção do coeficiente c conforme MC-2010 e conforme PISSINATTI (2017);
- Análise através do método da aproximação de Dischinger, conforme BUCHAIM e PISSINATTI (2017).

Com isso, pode-se quantificar possíveis diferenças entre os métodos de análise, assim como a influência de diferentes fatores no comportamento dos pilares.

6.3.1 Esbeltez

Escolhem-se para análise oito modelos de pilares, com seções retangulares e circulares e diferentes níveis de esbeltezes, que variam de $\lambda \cong 37,5$ até $\lambda \cong 86,6$ para a vinculação biarticulada.

6.3.2 Resistência à compressão do concreto

Entre os oito modelos analisados anteriormente, há variação na resistência à compressão do concreto. As faixas escolhidas foram 30 MPa, 40 MPa, 70 MPa e 80 MPa.

6.3.3 Agregado graúdo (coeficiente α_E)

Em todas as análises, verifica-se a influência da utilização de cada um dos quatro tipos de agregados graúdos: o basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$); o granito/gnaiss ($\alpha_E = 1,0$); o calcário ($\alpha_E = 0,90$); e o arenito ($\alpha_E = 0,7$). Além disso, verifica-se a influência da utilização do diagrama parábola-retângulo para a deformabilidade do pilar.

Capítulo 7

ANÁLISES

7.1 PILAR BIARTICULADO, SEÇÃO RETANGULAR

Analisa-se o pilar biarticulado de seção retangular com os seguintes dados geométricos: $B_e = H_e = 200$ mm e $d' = 30$ mm. Distribuem-se as armaduras apenas em duas camadas extremas paralelas à largura da seção, cada uma delas com área igual a $A_{s,tot}/2$.

Consideram-se dois valores de comprimento: $l_e = 3,0$ m ($\lambda = 52,0$) e $l_e = 5,0$ m ($\lambda = 86,6$) e dois valores de f_{ck} para cada esbeltez: um na primeira classe de resistência com $f_{ck} = 30$ MPa e outro na segunda classe de resistência com $f_{ck} = 70$ MPa.

Nos carregamentos, considera-se o efeito da força normal, do momento fletor gerado pela falta de retilineidade (excentricidade e_a) e dos momentos aplicados nas extremidades do pilar, com $M_{Ad} = M_{Bd}$.

Fixa-se $\alpha_E = 1,0$ e dois valores de taxa de armadura: $\rho_s = 2\%$ para os casos de menor esbeltez e $\rho_s = 4\%$ para os casos de maior esbeltez. Com os dados geométricos constantes, varia-se os valores da esbeltez do pilar e da resistência do concreto.

Para cada um dos casos, constrói-se o diagrama para obtenção do máximo momento de primeira ordem que pode ser aplicado no pilar para as taxas de armadura indicadas, decorrente das ações de falta de retilineidade e dos momentos iguais nas extremidades do lance biarticulado. Com isso, obtêm-se valores de N_{sd} e M_{Ad} (igual a M_{Bd}) ao longo de todo diagrama de interação no primeiro quadrante, i.e., com força normal de compressão.

Em uma primeira análise, com os dados geométricos e os esforços N_{sd} e $M_{Ad} = M_{Bd}$, verifica-se a validade do método apresentado neste trabalho e as diferenças entre outros três métodos de dimensionamento: Séries de Fourier; Amplificação com coeficiente c e a Aproximação de Dischinger.

Em uma segunda análise, com os dados geométricos e os esforços N_{sd} e $M_{Ad} = M_{Bd}$ verifica-se a influência de cada um dos quatro tipos de agregados graúdos sobre o módulo de elasticidade do concreto e na deformabilidade do pilar, a saber: o basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$), o granito/gnaiss ($\alpha_E = 1,0$), o calcário ($\alpha_E = 0,9$) e o arenito ($\alpha_E = 0,7$). A quinta análise considera o diagrama Parábola-Retângulo tanto para o ELU quanto para deformabilidade do pilar (exclui-se o Diagrama de Grasser, assim como o coeficiente α_E).

Em ambas análises, apresenta-se variação percentual da taxa da armadura para cada um dos casos de carregamento, definida pela expressão $(A'_{s,tot}/A_{s,tot} - 1)$, onde $A_{s,tot}$ representa a armadura total para a solução proposta com $\alpha_E = 1,0$ e $A'_{s,tot}$ representa a armadura total para o método ou agregado analisado.

7.1.1 Pilar biarticulado, seção retangular, $\lambda = 86,6$ e $f_{ck} = 70$ MPa

A Tabela 7.1 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura para cada um dos diferentes métodos de dimensionamento para o pilar de seção retangular com esbeltez $\lambda = 86,6$ ($l_e = 5,0$ m), $f_{ck} = 70$ MPa e taxa de armadura $\rho_{s,tot} = 4\%$ na solução proposta com $\alpha_E = 1,0$. $e_a = 0,0112$ m.

Tabela 7.1 – Pilar biarticulado, seção retangular: Carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 86,6$, $f_{ck} = 70$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$, $\alpha_E = 1,0$

v_d (-)	N_{sd} (kN)	$M_{Ad} = M_{Bd}$ (kNm)	Solução pr. (mm ²)	Fourier (mm ²)	Amplif. c (mm ²)	Dischinger (mm ²)
0,64	1088,0	12,8	1601,9	1723,7	1711,7	1734,3
0,60	1020,0	15,1	1599,6	1707,9	1698,2	1722,8
0,50	850,0	20,9	1598,3	1671,1	1659,5	1685,3
0,40	680,0	27,9	1601,1	1645,3	1635,2	1659,5
0,30	510,0	37,0	1598,5	1624,0	1617,0	1639,3
0,20	340,0	45,6	1599,7	1613,5	1628,5	1646,2

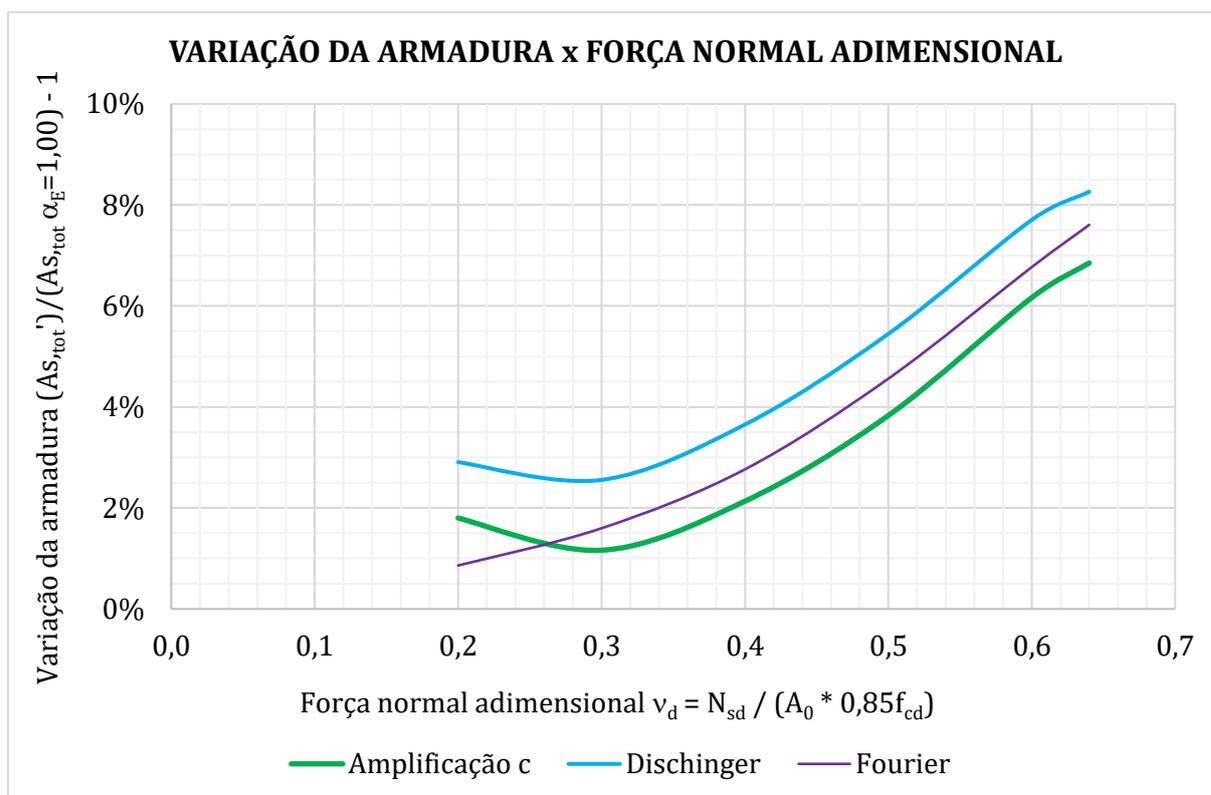
Fonte: O autor

A Figura 7.1 apresenta a comparação gráfica e percentual da Tabela 7.1. Para esta configuração de esbeltez e resistência do concreto, a aproximação de Dischinger e o

método da amplificação com o coeficiente c apresentaram diferenças próximas, entre 7% e 8% em relação a solução proposta.

A solução por séries de Fourier apresentou comportamento semelhante os métodos aproximados, com diferenças máximas próximas a 7,5%.

Figura 7.1 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da taxa de armadura versus força normal v_d para três métodos de dimensionamento em comparação com o método proposto - $\lambda = 86,6$, $f_{ck} = 70$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$ e $\alpha_E = 1,0$



Fonte: O autor

A Tabela 7.2 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura resultante de cada um dos tipos de agregados analisados.

Tabela 7.2 – Pilar biarticulado, seção retangular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 86,6$, $f_{ck} = 70$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$

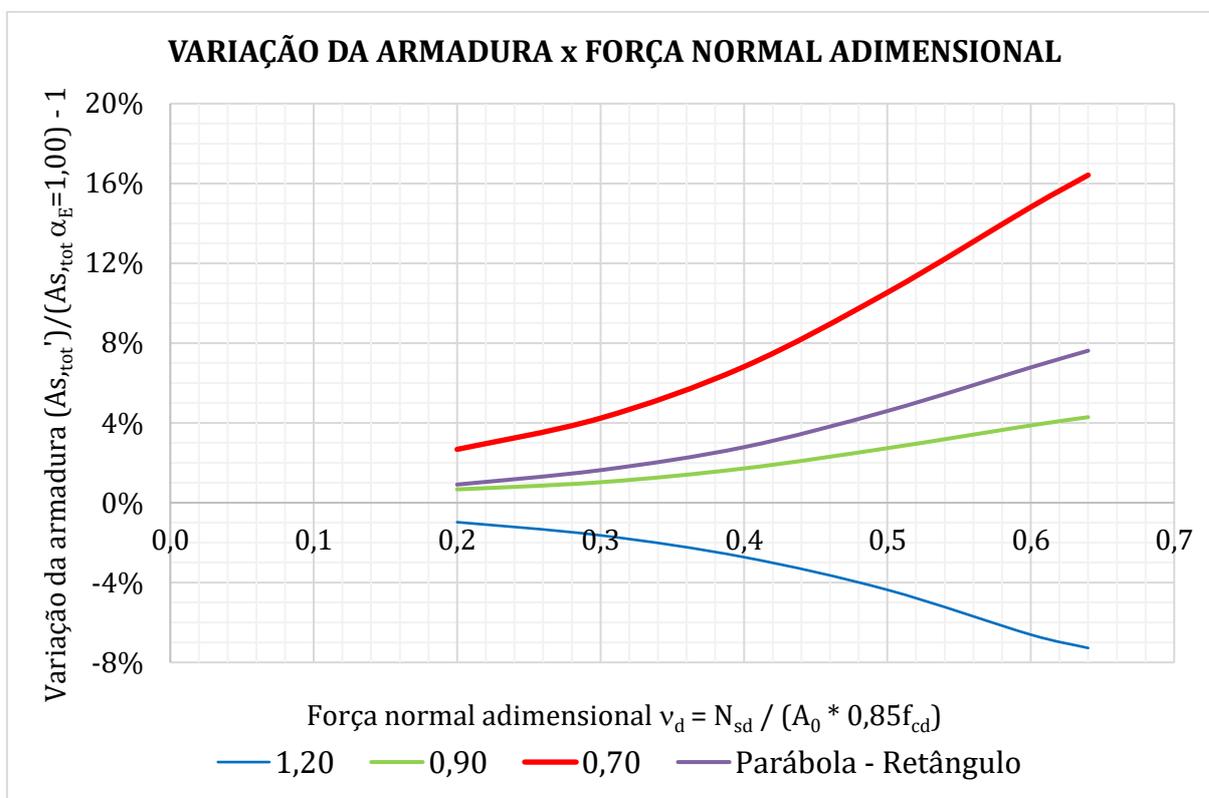
v_d (-)	N_{sd} (kN)	M_{Ad} $= M_{Bd}$ (kNm)	Solução p. $\alpha_E = 1,00$ (mm ²)	Solução p. $\alpha_E = 1,20$ (mm ²)	Solução p. $\alpha_E = 0,90$ (mm ²)	Solução p. $\alpha_E = 0,70$ (mm ²)	Solução p. Par.-Retâ. (mm ²)
0,64	1088,0	12,8	1601,9	1485,3	1670,6	1865,0	1724,0
0,60	1020,0	15,1	1599,6	1493,9	1661,6	1836,6	1708,1
0,50	850,0	20,9	1598,3	1528,5	1642,0	1766,6	1671,7
0,40	680,0	27,9	1601,1	1557,4	1628,6	1710,2	1645,7
0,30	510,0	37,0	1598,5	1572,3	1614,9	1666,2	1624,6
0,20	340,0	45,6	1599,7	1584,2	1610,4	1642,5	1614,3

Fonte: O autor

A Figura 7.2 apresenta a comparação gráfica e percentual da taxa de armadura, conforme a Tabela 7.2. Para esta configuração de esbeltez e resistência do concreto, a utilização do arenito ($\alpha_E = 0,7$) como agregado graúdo apresenta diferenças máximas na ordem de 16%, enquanto a utilização do basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$) traz uma economia de armadura próxima a 8%.

A análise que considera o diagrama Parábola-Retângulo tanto para o ELU quanto para deformabilidade apresenta diferenças de até 8%, próximo as diferenças dos métodos apresentados anteriormente (Fourier, Dischinger e Amplificação com coeficiente c).

Figura 7.2 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da armadura versus força normal v_d , influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_e = 1,0$ cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 86,6, f_{ck} = 70 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 4\%$



Fonte: O autor

7.1.2 Pilar biarticulado, seção retangular, $\lambda = 86,6$ e $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$

A Tabela 7.3 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura em cada um dos diferentes métodos de dimensionamento para o pilar de seção retangular com esbeltez $\lambda = 86,6$ ($l_e = 5,0 \text{ m}$), $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ e taxa de armadura $\rho_{s,tot} = 4\%$ na solução proposta com $\alpha_E = 1,0$. $e_a = 0,0112 \text{ m}$.

Tabela 7.3 – Pilar biarticulado, seção retangular: carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 86,6$, $f_{ck} = 30$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$, $\alpha_E = 1,0$

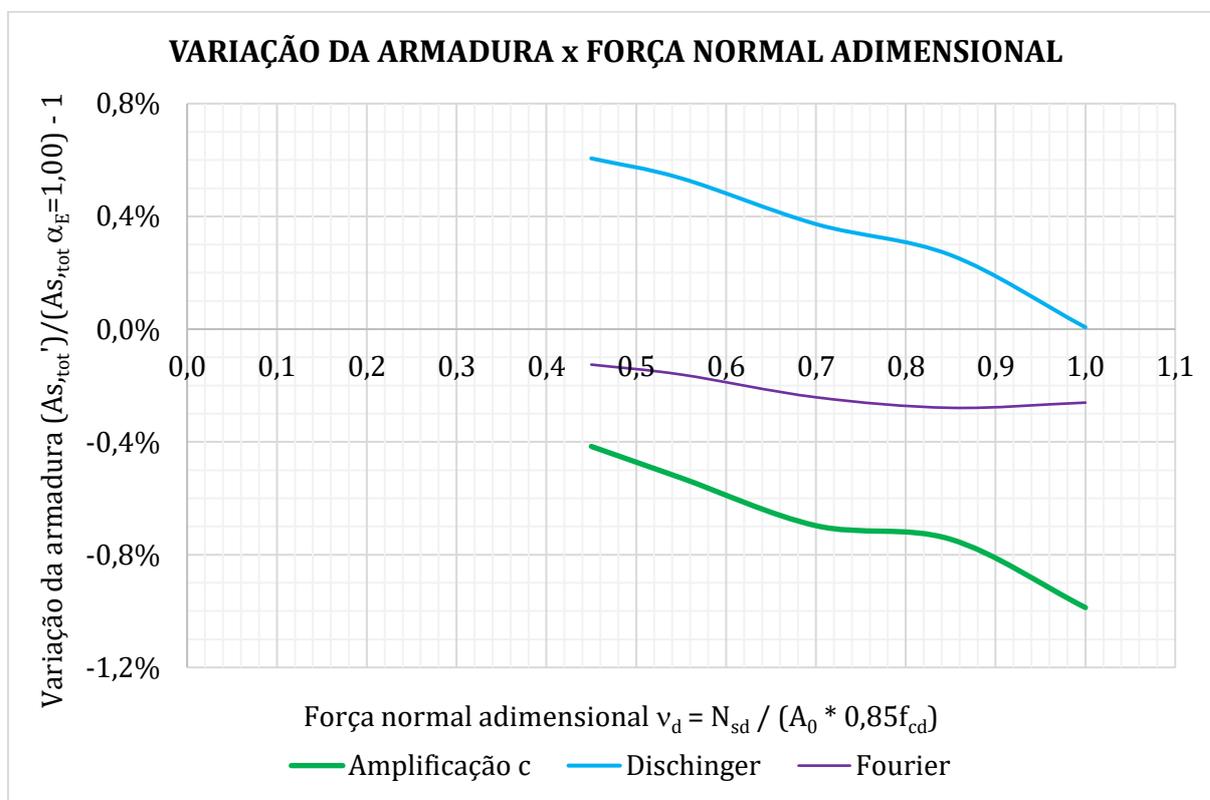
v_d (-)	N_{sd} (kN)	$M_{Ad} = M_{Bd}$ (kNm)	Solução pr. (mm ²)	Fourier (mm ²)	Amplif. c (mm ²)	Dischinger (mm ²)
1,00	728,6	8,5	1599,7	1595,5	1583,9	1599,8
0,85	619,3	14,0	1600,3	1595,8	1588,3	1604,5
0,70	510,0	20,5	1599,4	1595,6	1588,3	1605,4
0,55	400,7	28,8	1599,7	1597,2	1591,3	1608,3
0,45	327,9	35,5	1599,7	1597,7	1593,1	1609,4

Fonte: O autor

A Figura 7.3 apresenta uma comparação gráfica e percentual da Tabela 7.3. Para esta configuração de esbeltez e resistência do concreto, a solução por Séries de Fourier apresentou resultados semelhantes à solução proposta (para $\alpha_E = 1,0$), com diferenças máximas de -0,3%. Estas diferenças podem ser atribuídas a aproximações numéricas implícitas em cada método.

A aproximação de Dischinger mostrou-se levemente a favor da segurança, enquanto o método da amplificação com o coeficiente c mostrou-se levemente contrário a segurança, ambos variando entre $\pm 1,0\%$. Para o valor máximo de $v_d = 0,85$ a aproximação de Dischinger e a solução proposta (para $\alpha_E = 1,0$) apresentam a menor diferença entre os métodos.

Figura 7.3 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da taxa de armadura versus força normal v_d para cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 86,6$, $f_{ck} = 30$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$, $\alpha_E = 1,0$



Fonte: O autor

A Tabela 7.4 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura resultante de cada um dos tipos de agregados analisados.

Tabela 7.4 – Pilar biarticulado, seção retangular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos $\lambda = 86,6$, $f_{ck} = 30$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$

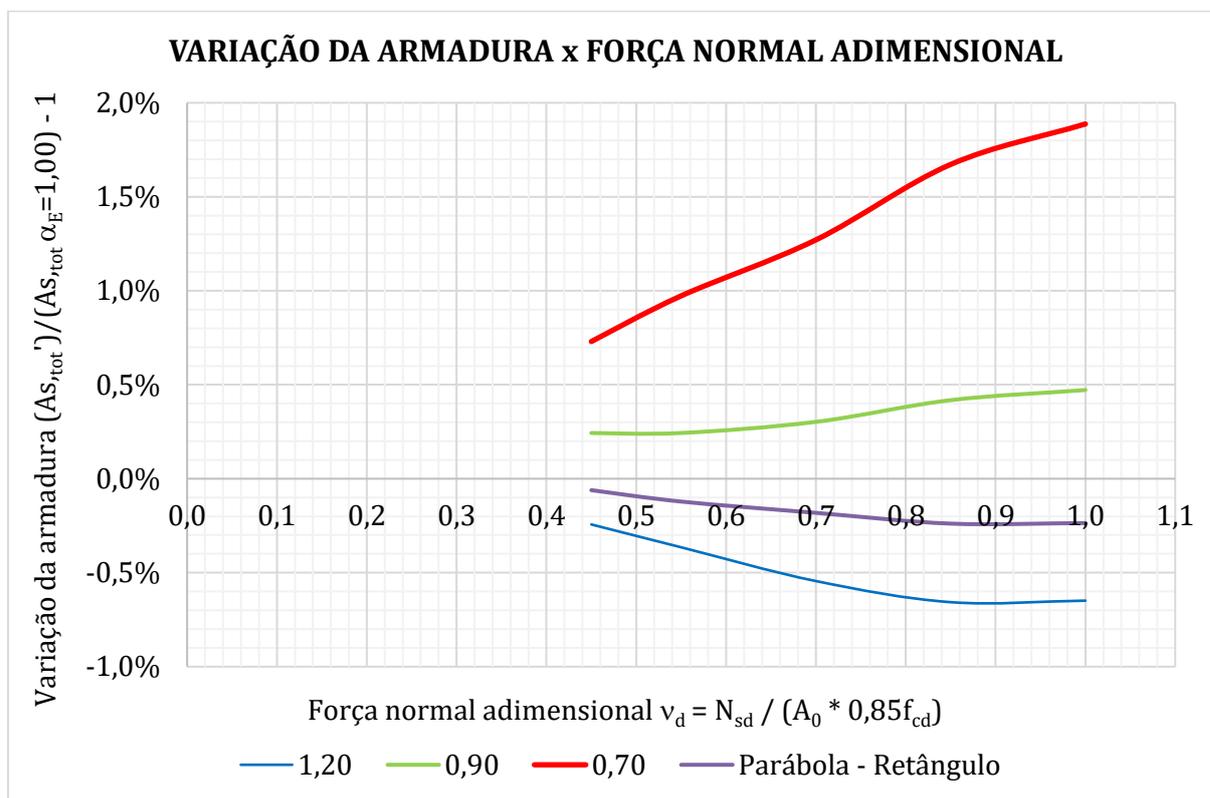
v_d	N_{sd}	M_{Ad} = M_{Bd}	Solução p. $\alpha_E = 1,00$	Solução p. $\alpha_E = 1,20$	Solução p. $\alpha_E = 0,90$	Solução p. $\alpha_E = 0,70$	Solução p. Par.-Retâ.
(-)	(kN)	(kNm)	(mm ²)	(mm ²)	(mm ²)	(mm ²)	(mm ²)
1,00	728,6	8,5	1599,7	1589,3	1607,3	1629,9	1595,9
0,85	619,3	14,0	1600,3	1589,8	1607,0	1627,0	1596,5
0,70	510,0	20,5	1599,4	1590,7	1604,3	1619,8	1596,5
0,55	400,7	28,8	1599,7	1593,9	1603,6	1615,3	1597,8
0,45	327,9	35,5	1599,7	1595,9	1603,6	1611,4	1598,8

Fonte: O autor

A Figura 7.4 apresenta a comparação gráfica e percentual da Tabela 7.4. Para esta configuração de esbeltez e resistência do concreto, a utilização do arenito ($\alpha_E = 0,7$) como agregado graúdo apresenta diferenças máximas da ordem de 2,0%, enquanto a utilização do basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$) gera uma economia de armadura próxima a 0,7%.

A análise que considera o diagrama Parábola-Retângulo tanto para o ELU quanto para deformabilidade apresentou diferenças de -0,3%, próximo as diferenças da solução por séries de Fourier.

Figura 7.4 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da taxa de armadura versus força normal adimensional, influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_e = 1,0$; $\lambda = 86,6$, $f_{ck} = 30$ MPa, $\rho_{s,tot} = 4\%$



Fonte: O autor

7.1.3 Pilar biarticulado, seção retangular, $\lambda = 52$ e $f_{ck} = 70$ MPa

A Tabela 7.5 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura para cada um dos diferentes métodos de dimensionamento para o pilar de seção retangular com esbeltez $\lambda = 52$ ($l_e = 3,0$ m), $f_{ck} = 70$ MPa e taxa de armadura $\rho_s = 2\%$ na solução proposta com $\alpha_E = 1,0$. $e_a = 0,0075$ m.

Tabela 7.5 – Pilar biarticulado, seção retangular: Carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 52$, $f_{ck} = 70$ MPa, $\rho_s = 2\%$, $\alpha_E = 1,0$

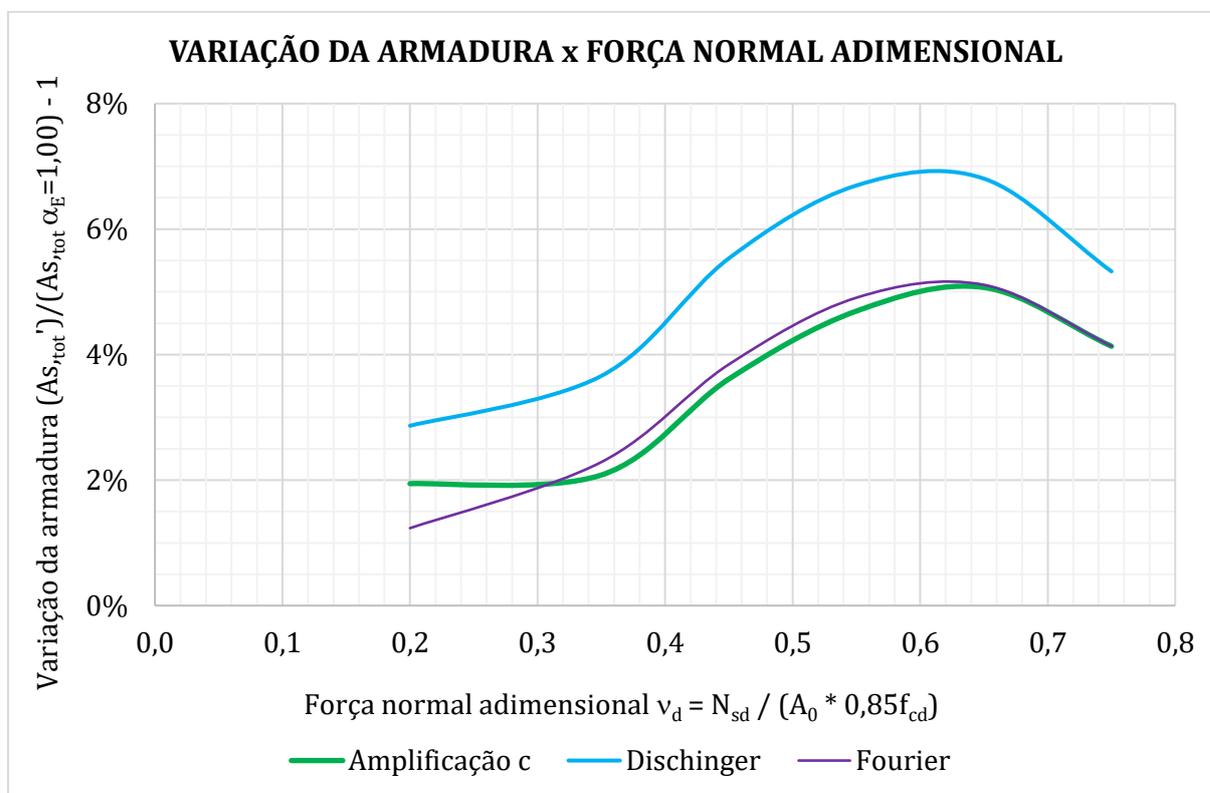
v_d (-)	N_{sd} (kN)	$M_{Ad} = M_{Bd}$ (kNm)	Solução pr. (mm ²)	Fourier (mm ²)	Amplif. c (mm ²)	Dischinger (mm ²)
0,75	1275,0	17,7	799,4	832,4	832,4	841,9
0,65	1105,0	25,6	800,7	841,6	841,2	855,1
0,55	935,0	31,1	800,5	839,7	838,0	854,0
0,45	765,0	34,9	801,3	832,1	830,3	845,7
0,35	595,0	37,8	801,3	819,7	818,0	830,7
0,20	340,0	38,7	801,1	811,0	816,6	824,0

Fonte: O autor

A Figura 7.5 apresenta uma comparação gráfica e percentual da Tabela 7.5. Para esta configuração de esbeltez e resistência do concreto, a aproximação de Dischinger apresentou diferenças próximas a 7% em relação a solução proposta com $\alpha_E = 1,0$, o método da amplificação com o coeficiente c apresentou comportamento semelhante, com diferenças máximas próximas a 5%.

A solução por séries de Fourier apresentou comportamento semelhante ao método da amplificação com coeficiente c, com diferenças máximas próximas a 5%.

Figura 7.5 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da armadura versus força normal adimensional para cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 52$, $f_{ck} = 70$ MPa, $\rho_{s,tot} = 2\%$, $\alpha_E = 1,0$



Fonte: O autor

A Tabela 7.6 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura resultante de cada um dos tipos de agregados analisados.

Tabela 7.6 – Pilar biarticulado, seção retangular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 52$, $f_{ck} = 70$ MPa, $\rho_{s,tot} = 2\%$

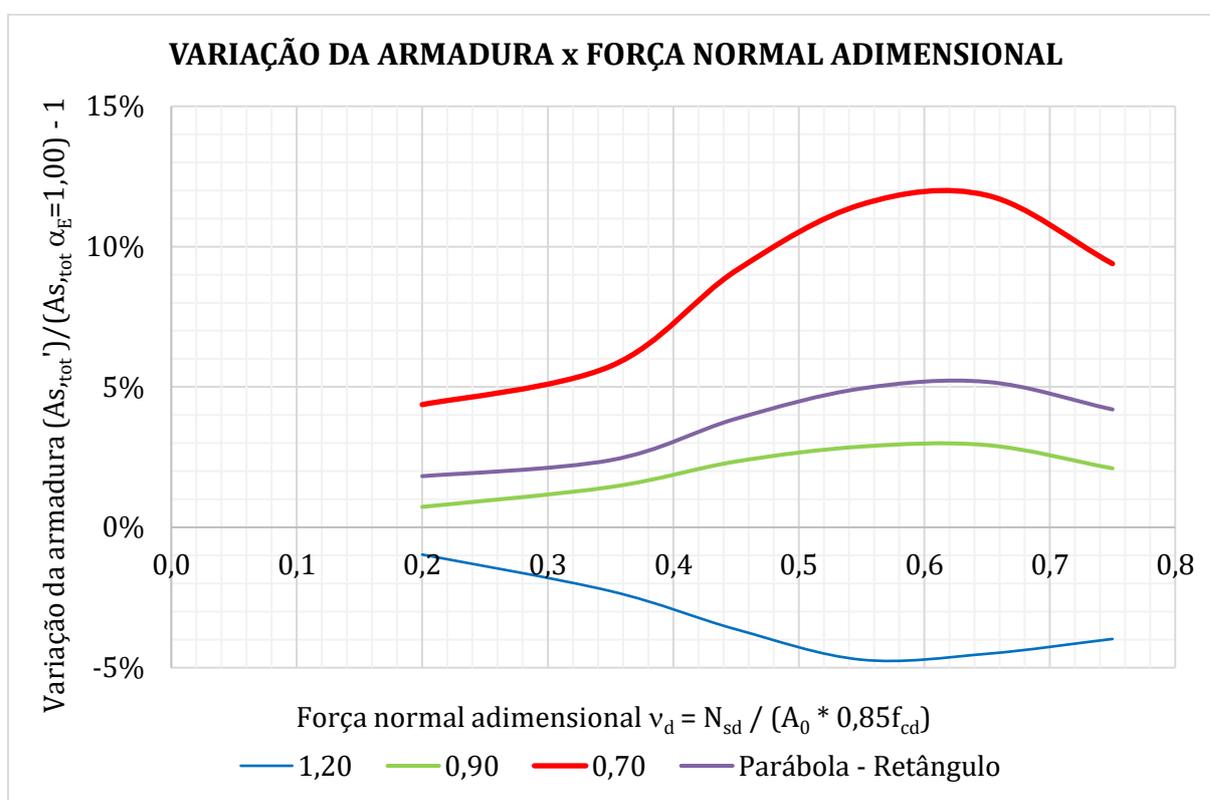
v_d (-)	N_{sd} (kN)	M_{Ad} = M_{Bd} (kNm)	Solução p. $\alpha_E = 1,00$ (mm ²)	Solução p. $\alpha_E = 1,20$ (mm ²)	Solução p. $\alpha_E = 0,90$ (mm ²)	Solução p. $\alpha_E = 0,70$ (mm ²)	Solução p. Par.-Retâ. (mm ²)
0,75	1275,0	17,7	799,4	767,6	816,1	874,4	832,9
0,65	1105,0	25,6	800,7	764,6	824,1	895,4	842,2
0,55	935,0	31,1	800,5	762,7	823,5	892,5	840,1
0,45	765,0	34,9	801,3	772,2	820,1	874,6	832,3
0,35	595,0	37,8	801,3	783,1	812,8	847,3	820,5
0,20	340,0	38,7	801,1	793,3	806,9	836,1	815,7

Fonte: O autor

A Figura 7.6 apresenta a comparação gráfica e percentual da Tabela 7.6. Para esta configuração de esbelteza e resistência do concreto, a utilização do arenito ($\alpha_E = 0,7$) como agregado graúdo apresenta diferenças máximas na ordem de 12%, enquanto a utilização do basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$) gera uma economia de armadura próxima a 5%.

A análise que considera o diagrama Parábola-Retângulo tanto para o ELU quanto para deformabilidade apresenta diferenças de até 5%, iguais as diferenças das séries de Fourier e Amplificação com coeficiente c.

Figura 7.6 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da armadura versus força normal v_d , influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_e = 1,0$ cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 52, f_{ck} = 70 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%$



Fonte: O autor

7.1.4 Pilar biarticulado, seção retangular, $\lambda = 52$ e $f_{ck} = 30$ MPa

A Tabela 7.7 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura para cada um dos diferentes métodos de dimensionamento para o pilar de seção retangular com esbeltez $\lambda = 52$ ($l_e = 3,0$ m), $f_{ck} = 30$ MPa e taxa de armadura $\rho_s = 2\%$ na solução proposta com $\alpha_E = 1,0$. $e_a = 0,0075$ m.

Tabela 7.7 – Pilar biarticulado, seção retangular: Carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 52$, $f_{ck} = 30$ MPa, $\rho_s = 2\%$, $\alpha_E = 1,0$

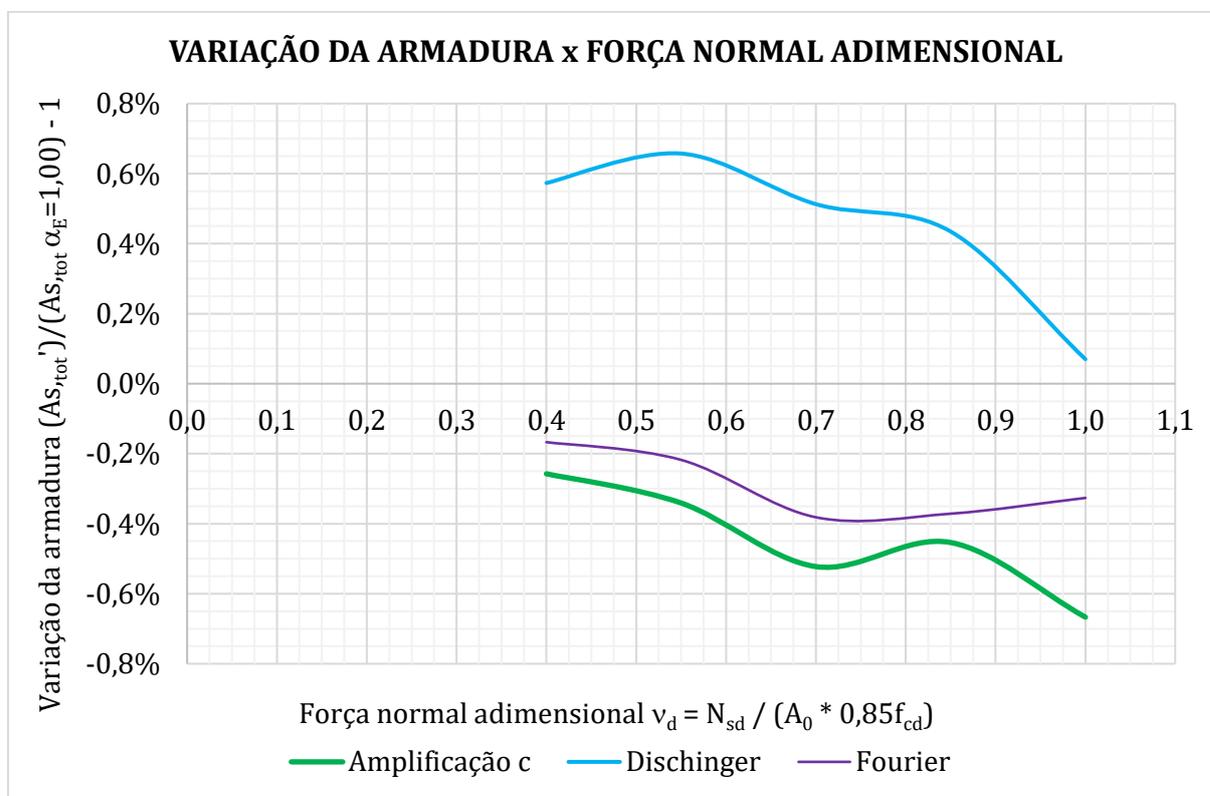
v_d (-)	N_{sd} (kN)	$M_{Ad} = M_{Bd}$ (kNm)	Solução pr. (mm ²)	Fourier (mm ²)	Amplif. c (mm ²)	Dischinger (mm ²)
1,00	728,6	11,2	800,5	797,9	795,2	801,1
0,85	619,3	17,0	800,4	797,4	796,8	803,9
0,70	510,0	21,8	800,1	797,1	795,9	804,2
0,55	400,7	26,3	799,1	797,4	796,4	804,4
0,40	291,4	31,1	801,1	799,7	799,0	805,7

Fonte: O autor

A Figura 7.7 apresenta uma comparação gráfica e percentual da Tabela 7.7. Para esta configuração de esbeltez e resistência do concreto, a solução por Séries de Fourier apresentou diferenças próximas a -0,4%, mostrando-se contrária a segurança em relação a solução proposta. Igual a análise em 7.1.2, estas diferenças podem ser atribuídas a aproximações numéricas implícitas em cada método.

A aproximação de Dischinger mostrou-se levemente a favor da segurança, enquanto o método da amplificação com o coeficiente c mostrou-se levemente contrário a segurança, ambos variando entre $\pm 0,8\%$.

Figura 7.7 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da armadura versus força normal adimensional para cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 52, f_{ck} = 30 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%, \alpha_E = 1,0$



Fonte: O autor

A Tabela 7.8 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura resultante de cada um dos tipos de agregados analisados.

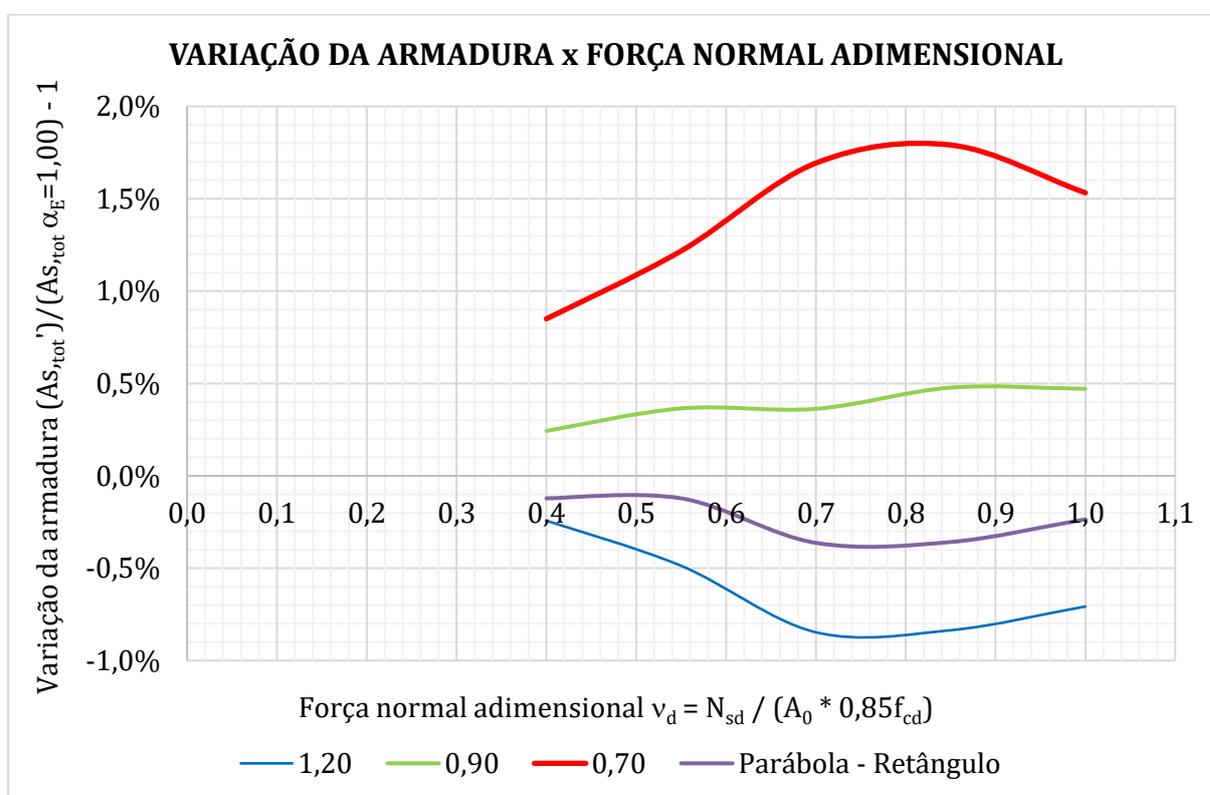
Tabela 7.8 – Pilar biarticulado, seção retangular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 52, f_{ck} = 30 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%$

v_d	N_{sd}	$M_{Ad} = M_{Bd}$	Solução p. $\alpha_E = 1,00$	Solução p. $\alpha_E = 1,20$	Solução p. $\alpha_E = 0,90$	Solução p. $\alpha_E = 0,70$	Solução p. Par.-Retâ.
(-)	(kN)	(kNm)	(mm ²)	(mm ²)	(mm ²)	(mm ²)	(mm ²)
1,00	728,6	11,2	800,5	794,9	804,3	812,8	798,6
0,85	619,3	17,0	800,4	793,7	804,2	814,7	797,5
0,70	510,0	21,8	800,1	793,3	803,0	813,7	797,2
0,55	400,7	26,3	799,1	795,2	802,0	808,9	798,2
0,40	291,4	31,1	801,1	799,1	803,0	807,9	800,1

Fonte: O autor

A Figura 7.8 apresenta a comparação gráfica e percentual da Tabela 7.8. Para esta configuração de esbelte e resistência do concreto, a utilização do arenito ($\alpha_E = 0,7$) como agregado graúdo apresenta diferenças máximas na ordem de 2,0%, enquanto a utilização do basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$) gera uma economia de armadura próxima a 1,0%.

Figura 7.8 – Pilar biarticulado, seção retangular: Variação da armadura versus força normal v_d , influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_e = 1,0$ cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 52, f_{ck} = 30 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%$



Fonte: O autor

7.2 PILAR BIARTICUADO, SEÇÃO CIRCULAR

Analisa-se o pilar biarticulado de seção circular com os seguintes dados: $R_e = 250$ mm, $R_s = 210$ mm, $d' = 40$ mm, com 64 barras de armadura distribuídas uniformemente ao longo do raio de distribuição R_s .

Consideram-se dois valores de comprimento: $l_e = 5,0$ m ($\lambda = 40,0$) e $l_e = 10,0$ m ($\lambda = 80,0$) e dois valores de f_{ck} : um na primeira classe de resistência com $f_{ck} = 40$ MPa e outro na segunda classe de resistência com $f_{ck} = 80$ MPa.

Nos carregamentos, considera-se o efeito da força normal, do momento fletor gerado pela falta de retilineidade (excentricidade e_a) e dos momentos aplicados nas extremidades do pilar, com $M_{Ad} = M_{Bd}$.

Fixa-se $\alpha_E = 1,0$ e dois valores de taxa de armadura: $\rho_s = 2\%$ para os casos de menor esbeltez e $\rho_s = 4\%$ para os casos de maior esbeltez. Com os dados geométricos constantes, varia-se os valores de esbeltez do pilar e da resistência do concreto.

Para cada um dos casos, constrói-se o diagrama para obtenção do máximo momento de primeira ordem que pode ser aplicado no pilar para as taxas de armadura indicadas, decorrente das ações de falta de retilineidade e dos momentos iguais nas extremidades do lance biarticulado. Com isso, obtêm-se valores de N_{sd} e M_{Ad} (igual a M_{Bd}) ao longo de todo diagrama de interação no primeiro quadrante, i.e., com força normal de compressão.

Em uma primeira análise, com os dados geométricos e os esforços N_{sd} e $M_{Ad} = M_{Bd}$, verifica-se a validade do método apresentado neste trabalho e as diferenças entre outros três métodos de dimensionamento: Séries de Fourier; Amplificação com coeficiente c e a Aproximação de Dischinger.

Em uma segunda análise, com os dados geométricos e os esforços N_{sd} e $M_{Ad} = M_{Bd}$ verifica-se a influência de cada um dos quatro tipos de agregados graúdos sobre o módulo de elasticidade do concreto e na deformabilidade do pilar, a saber: o basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$), o granito/gnaiss ($\alpha_E = 1,0$), o calcário ($\alpha_E = 0,9$) e o arenito ($\alpha_E = 0,7$). A quinta análise considera o diagrama Parábola-Retângulo tanto para o ELU quanto para deformabilidade do pilar (exclui-se o Diagrama de Grasser, assim como o coeficiente α_E).

Em ambas análises, apresenta-se variação percentual da taxa da armadura para cada um dos casos de carregamento, definida pela expressão $(A'_{s,tot}/A_{s,tot} - 1)$, onde $A_{s,tot}$ representa a armadura total para a solução proposta com $\alpha_E = 1,0$ e $A'_{s,tot}$ representa a armadura total para o método ou agregado analisado.

7.2.1 Pilar biarticulado, seção circular, $\lambda = 80$ e $f_{ck} = 80$ MPa

A Tabela 7.9 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura para cada um dos diferentes métodos de dimensionamento para o pilar de seção circular com esbeltez $\lambda = 80$ ($l_e = 10,0$ m), $f_{ck} = 80$ MPa e taxa de armadura $\rho_s = 4\%$ na solução proposta com $\alpha_E = 1,0$. $e_a = 0,0167$ m.

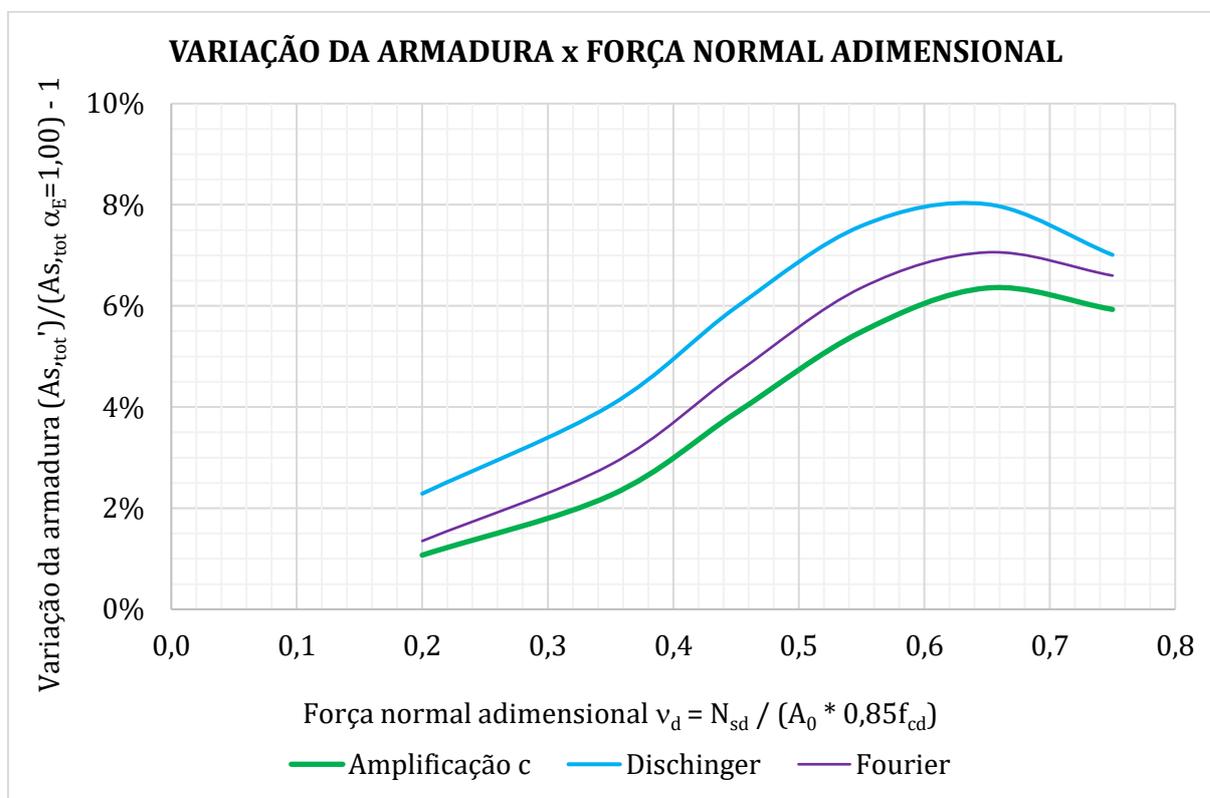
Tabela 7.9 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 80$, $f_{ck} = 80$ MPa e $\rho_s = 4\%$

v_d (-)	N_{sd} (kN)	$M_{Ad} = M_{Bd}$ (kNm)	Solução pr. (mm ²)	Fourier (mm ²)	Amplif. c (mm ²)	Dischinger (mm ²)
0,75	7152,7	96,5	7859,1	8377,7	8325,2	8409,9
0,65	6199,0	170,5	7859,5	8414,3	8358,8	8489,1
0,55	5245,3	233,5	7860,4	8360,3	8291,8	8456,4
0,45	4291,6	290,0	7852,2	8218,5	8157,2	8321,1
0,35	3337,9	350,5	7852,2	8076,7	8029,2	8168,9
0,20	1907,4	461,5	7852,2	7958,2	7936,3	8031,8

Fonte: O autor

A Figura 7.9 apresenta uma comparação gráfica e percentual da Tabela 7.9. Para esta configuração de esbeltez e resistência do concreto, as três soluções apresentaram um comportamento semelhante, com diferenças máximas de até 8% em relação a solução proposta.

Figura 7.9 – Pilar biarticulado, seção circular: Variação da taxa de armadura versus força normal v_d para três métodos de dimensionamento em comparação com o método proposto - $\lambda = 80, f_{ck} = 80 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 4\%, \alpha_E = 1,0$



Fonte: O autor

A Tabela 7.10 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura resultante para cada um dos tipos de agregados analisados.

Tabela 7.10 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 80, f_{ck} = 80 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 4\%$

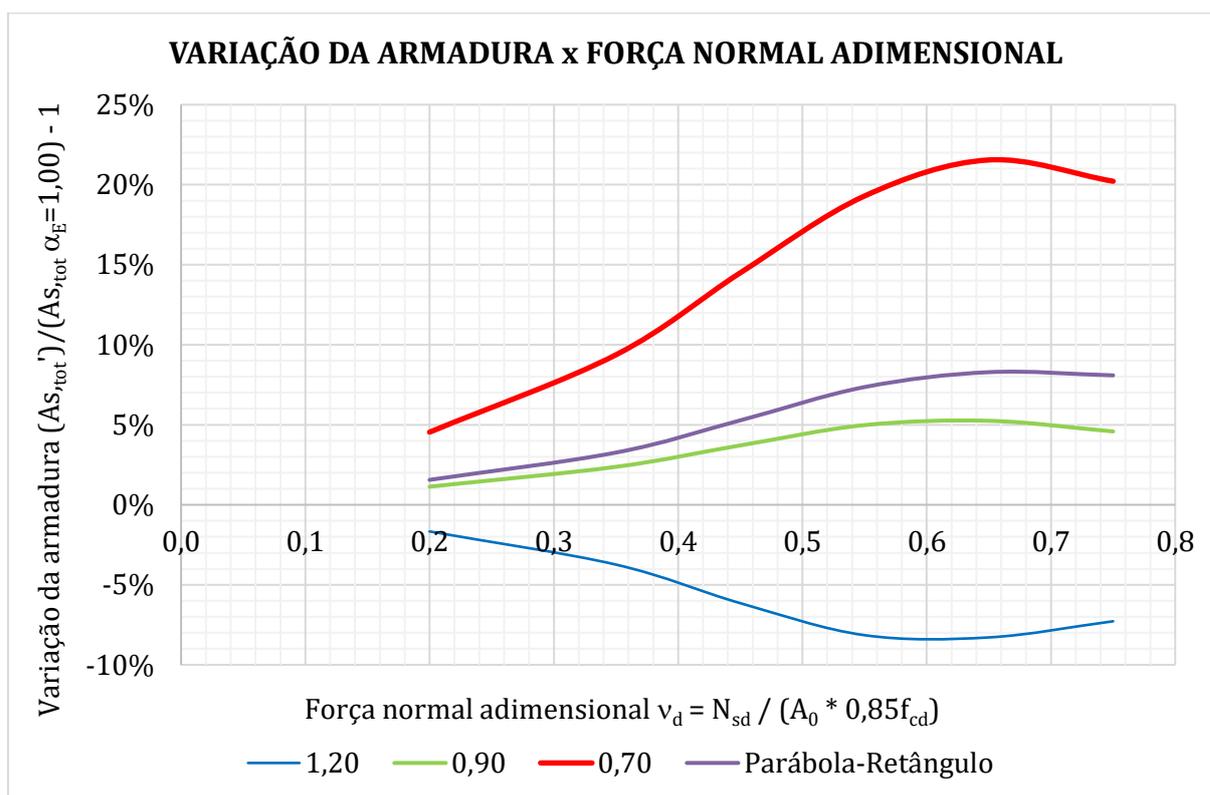
v_d (-)	N_{sd} (kN)	M_{Ad} = M_{Bd} (kNm)	Solução p. $\alpha_E = 1,00$ (mm^2)	Solução p. $\alpha_E = 1,20$ (mm^2)	Solução p. $\alpha_E = 0,90$ (mm^2)	Solução p. $\alpha_E = 0,70$ (mm^2)	Solução p. Par.-Retâ. (mm^2)
0,75	7152,7	96,5	7859,1	7287,2	8219,3	9448,0	8494,7
0,65	6199,0	170,5	7859,5	7208,2	8272,0	9552,9	8510,8
0,55	5245,3	233,5	7860,4	7220,0	8251,8	9377,0	8438,6
0,45	4291,6	290,0	7852,2	7369,6	8143,6	8990,4	8266,5
0,35	3337,9	350,5	7852,2	7558,7	8038,5	8588,2	8108,4
0,20	1907,4	461,5	7852,2	7721,4	7941,1	8208,5	7974,5

Fonte: O autor

A Figura 7.10 apresenta a comparação gráfica e percentual da Tabela 7.10. Para esta configuração de esbeltez e resistência do concreto, a utilização do arenito ($\alpha_E = 0,7$) como agregado graúdo apresenta diferenças máximas na ordem de 22%, enquanto a utilização do basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$) traz uma economia de armadura próxima a 9%.

A análise que considera o diagrama Parábola-Retângulo tanto para o ELU quanto para deformabilidade apresenta diferenças de até 8%, com comportamento semelhante as soluções por Séries de Fourier; Amplificação com coeficiente c e a Aproximação de Dischinger.

Figura 7.10 – Pilar biarticulado, seção circular: Variação da armadura versus força normal v_d , influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_e = 1,0$ cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 80, f_{ck} = 80 \text{ MPa}, \rho_s = 4,0\%$



Fonte: O autor

7.2.2 Pilar biarticulado, seção circular, $\lambda = 80$ e $f_{ck} = 40$ MPa

A Tabela 7.11 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura para cada um dos diferentes métodos de dimensionamento para o pilar de seção circular com esbeltez $\lambda = 80$ ($l_e = 10,0$ m), $f_{ck} = 40$ MPa e taxa de armadura $\rho_s = 2\%$ na solução proposta com $\alpha_E = 1,00$. $e_a = 0,0167$ m.

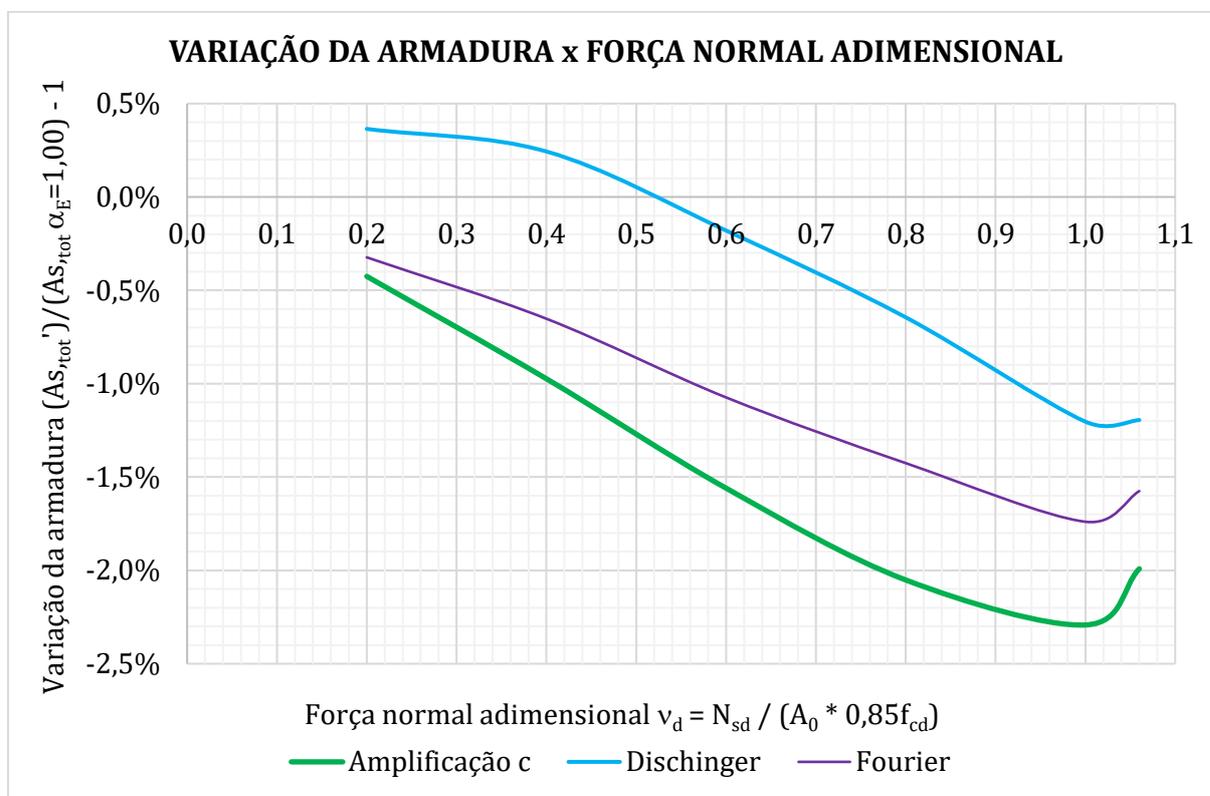
Tabela 7.11 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 80$, $f_{ck} = 40$ MPa e $\rho_s = 4\%$

v_d (-)	N_{sd} (kN)	$M_{Ad} = M_{Bd}$ (kNm)	Solução pr. (mm ²)	Fourier (mm ²)	Amplif. c (mm ²)	Dischinger (mm ²)
1,06	5054,6	78,5	7854,5	7730,8	7698,1	7760,7
1,00	4768,5	104,0	7853,0	7716,4	7673,0	7758,5
0,80	3814,8	184,5	7858,1	7746,0	7696,9	7807,4
0,60	2861,1	273,0	7852,9	7768,6	7730,4	7838,8
0,40	1907,4	379,0	7845,6	7794,4	7769,2	7864,7
0,20	953,7	462,0	7859,9	7834,5	7826,5	7888,5

Fonte: O autor

A Figura 7.11 apresenta uma comparação gráfica e percentual da Tabela 7.11. Para esta configuração de esbeltez e resistência do concreto, as soluções apresentaram um comportamento semelhante, com diferenças máximas da ordem de 2,5%, mostrando-se contrárias a segurança em relação a solução proposta. Apenas os resultados da aproximação de Dischinger apresentam um ramo do diagrama que é favorável a segurança.

Figura 7.11 – Pilar biarticulado, seção circular: Variação da taxa de armadura versus força normal v_d para três métodos de dimensionamento em comparação com o método proposto - $\lambda = 80, f_{ck} = 40 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 4\%, \alpha_E = 1,0$



Fonte: O autor

A Tabela 7.12 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura resultante para cada um dos tipos de agregados analisados.

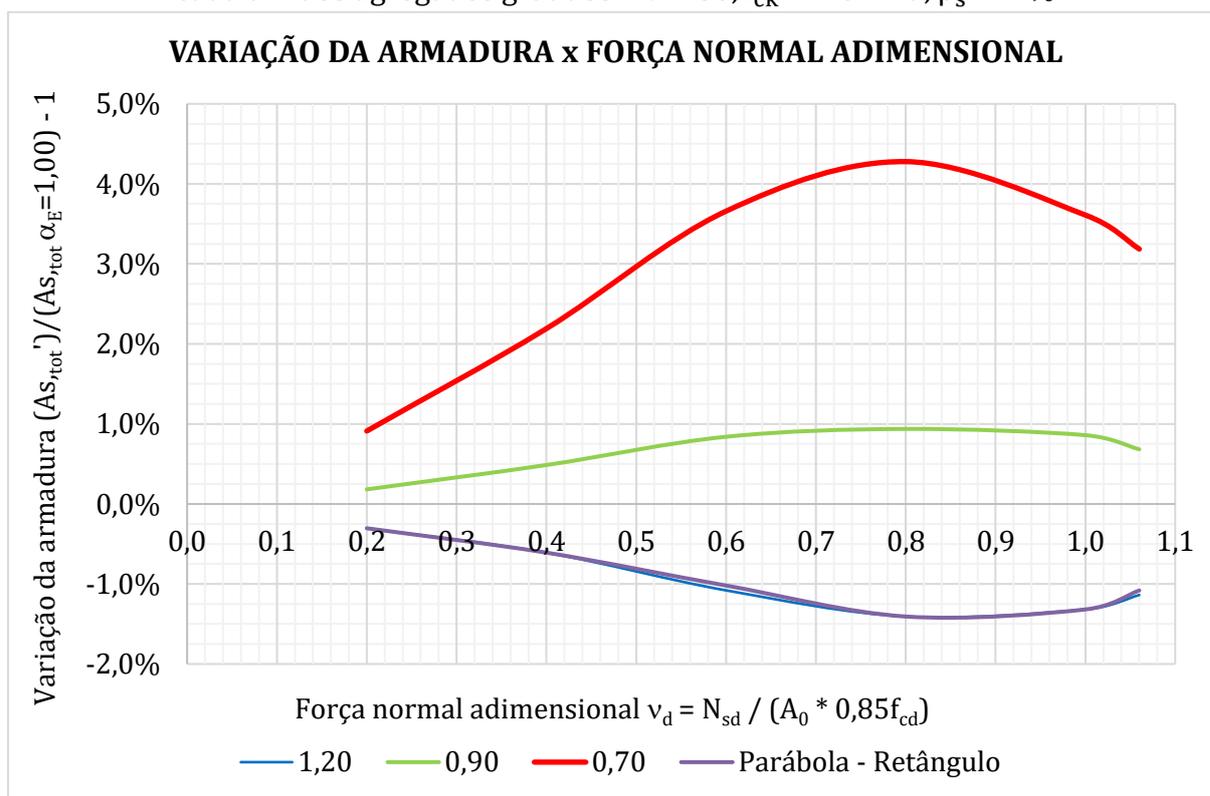
Tabela 7.12 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 80, f_{ck}, 40 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 4\%$

v_d (-)	N_{sd} (kN)	M_{Ad} = M_{Bd} (kNm)	Solução p. $\alpha_E = 1,00$ (mm^2)	Solução p. $\alpha_E = 1,20$ (mm^2)	Solução p. $\alpha_E = 0,90$ (mm^2)	Solução p. $\alpha_E = 0,70$ (mm^2)	Solução p. Par.-Retâ. (mm^2)
1,06	5054,6	78,5	7854,5	7765,2	7908,2	8104,8	7769,6
1,00	4768,5	104,0	7853,0	7749,5	7920,5	8136,5	7749,5
0,80	3814,8	184,5	7858,1	7747,5	7931,8	8194,3	7747,5
0,60	2861,1	273,0	7852,9	7768,1	7918,8	8140,3	7772,8
0,40	1907,4	379,0	7845,6	7797,8	7883,8	8017,5	7797,8
0,20	953,7	462,0	7859,9	7836,0	7874,2	7931,5	7836,0

Fonte: O autor

A Figura 7.12 apresenta a comparação gráfica e percentual da Tabela 7.12. Para esta configuração de esbelte e resistência do concreto, a utilização do arenito ($\alpha_E = 0,7$) como agregado graúdo apresenta diferenças máximas na ordem de 4,5%, enquanto a utilização do basalto ($\alpha_E = 1,2$) traz uma economia de armadura próxima a 1,5%.

Figura 7.12 – Pilar biarticulado, seção circular: Variação da armadura versus força normal v_d , influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_e = 1,0$ cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 80, f_{ck} = 40 \text{ MPa}, \rho_s = 4\%$



Fonte: O autor

7.2.3 Pilar biarticulado, seção circular, $\lambda = 40$ e $f_{ck} = 80$ MPa

A Tabela 7.13 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura para cada um dos diferentes métodos de dimensionamento para o pilar de seção circular com esbeltez $\lambda = 40$ ($l_e = 5,0$ m), $f_{ck} = 80$ MPa e taxa de armadura $\rho_s = 2\%$ na solução proposta com $\alpha_E = 1,00$. $e_a = 0,1387$ m. $e_a = 0,1387$ m.

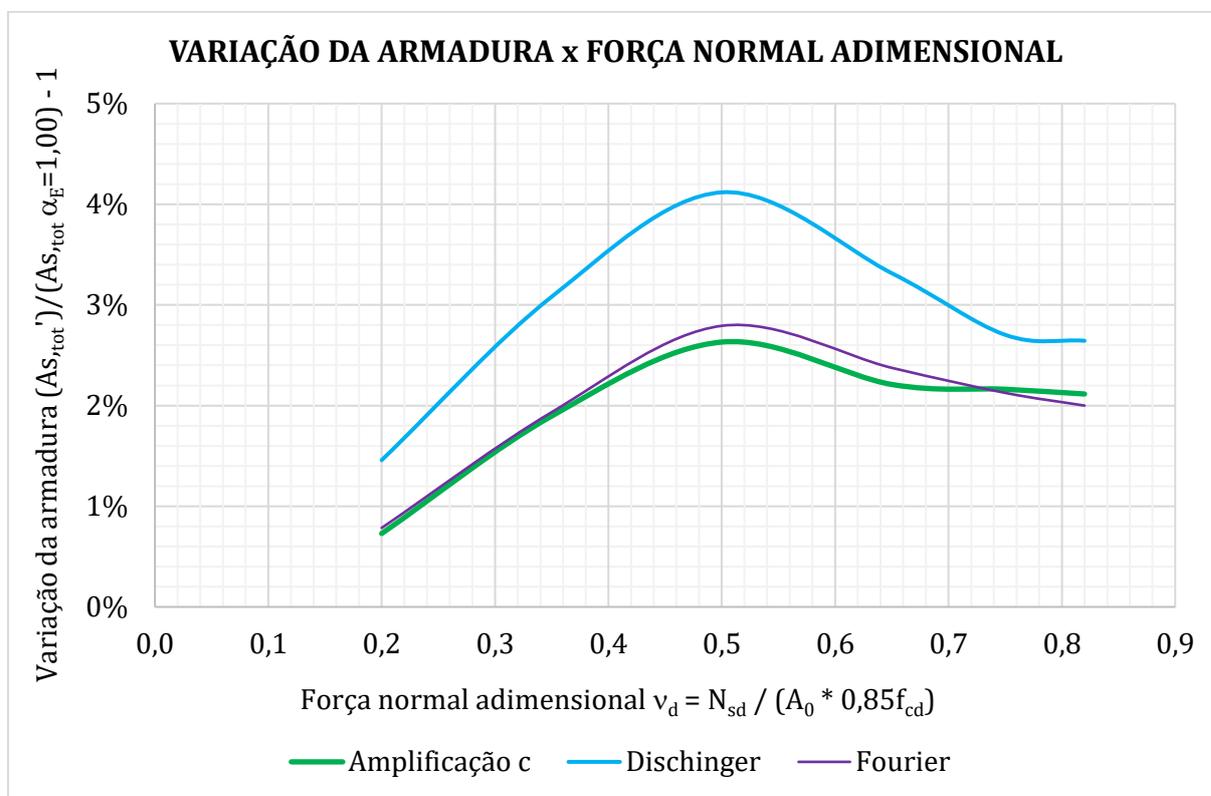
Tabela 7.13 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 40$, $f_{ck} = 80$ MPa e $\rho_s = 2\%$

v_d (-)	N_{sd} (kN)	$M_{Ad} = M_{Bd}$ (kNm)	Solução pr. (mm ²)	Fourier (mm ²)	Amplif. c (mm ²)	Dischinger (mm ²)
0,82	7820,3	110,5	3936,6	4015,3	4019,8	4040,6
0,75	7152,7	172,5	3918,8	4002,2	4003,6	4024,7
0,65	6199,0	263,0	3929,8	4023,1	4016,7	4060,1
0,50	4768,5	362,5	3933,4	4043,3	4036,9	4095,4
0,35	3337,9	413,5	3930,1	4006,2	4004,6	4051,2
0,20	1907,4	427,5	3929,9	3960,7	3958,5	3987,2

Fonte: O autor

A Figura 7.13 apresenta uma comparação gráfica e percentual da Tabela 7.13. Para esta configuração de esbeltez e resistência do concreto, mesmo com o menor nível de esbeltez e maior resistência a compressão do concreto, as soluções apresentaram diferenças próximas a 4% em relação a solução proposta. Novamente, houve sobreposição das curvas para a solução por Séries de Fourier e Amplificação com o coeficiente c.

Figura 7.13 – Pilar biarticulado, seção circular: Variação da taxa de armadura versus força normal v_d para três métodos de dimensionamento em comparação com o método proposto - $\lambda = 40, f_{ck} = 80 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%, \alpha_E = 1,0$



Fonte: O autor

A Tabela 7.14 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura resultante para cada um dos tipos de agregados analisados.

Tabela 7.14 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 40, f_{ck}, 80 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%$

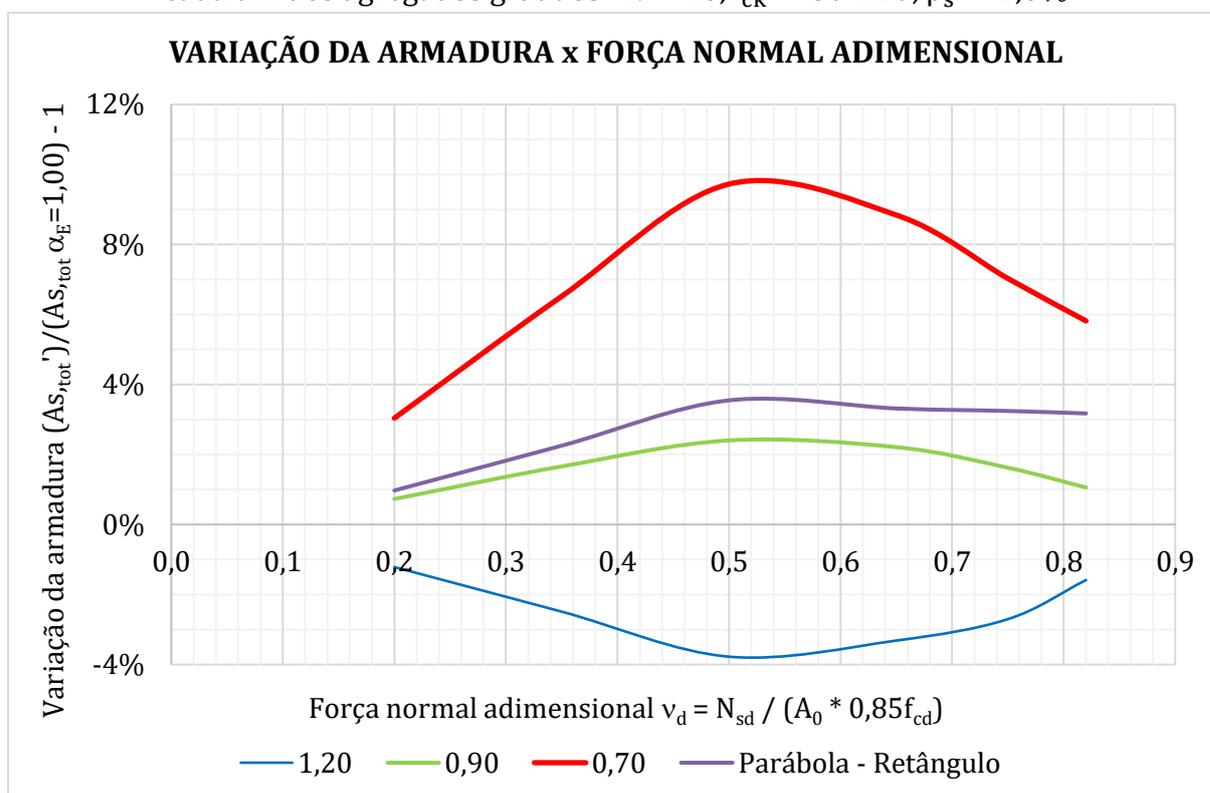
v_d (-)	N_{sd} (kN)	M_{Ad} = M_{Bd} (kNm)	Solução p. $\alpha_E = 1,00$ (mm^2)	Solução p. $\alpha_E = 1,20$ (mm^2)	Solução p. $\alpha_E = 0,90$ (mm^2)	Solução p. $\alpha_E = 0,70$ (mm^2)	Solução p. Par.-Retâ. (mm^2)
0,82	7820,3	110,5	3936,6	3874,1	3978,2	4165,5	4061,5
0,75	7152,7	172,5	3918,8	3812,9	3982,4	4194,2	4045,9
0,65	6199,0	263,0	3929,8	3799,5	4016,7	4277,2	4060,1
0,50	4768,5	362,5	3933,4	3784,9	4027,9	4315,9	4072,9
0,35	3337,9	413,5	3930,1	3832,3	3995,3	4186,3	4018,6
0,20	1907,4	427,5	3929,9	3882,1	3958,5	4049,3	3968,1

Fonte: O autor

A Figura 7.14 apresenta a comparação gráfica e percentual da Tabela 7.14. Para esta configuração de esbeltez e resistência do concreto, a utilização do arenito ($\alpha_E = 0,7$) como agregado graúdo apresenta diferenças máximas na ordem de 10%, enquanto a utilização do basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$) gera uma economia de armadura próxima a 4%.

A análise que considera o diagrama Parábola-Retângulo tanto para o ELU quanto para deformabilidade apresenta diferenças de até 4%, valor semelhante as diferenças apresentadas pelo método das Séries de Fourier e Amplificação com coeficiente c.

Figura 7.14 – Pilar biarticulado, seção circular: Variação da armadura versus força normal v_d , influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_e = 1,0$ cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 40, f_{ck} = 80 \text{ MPa}, \rho_s = 2,0\%$



Fonte: O autor

7.2.4 Pilar biarticulado, seção circular, $\lambda = 40$ e $f_{ck} = 40$ MPa

A Tabela 7.15 apresenta os esforços aplicados assim como a armadura para cada um dos diferentes métodos de dimensionamento para o pilar de seção circular com esbeltez $\lambda = 40$ ($l_e = 5,0$ m), $f_{ck} = 40$ MPa e taxa de armadura $\rho_s = 2\%$ na solução proposta com $\alpha_E = 1,0$. $e_a = 0,1387$ m.

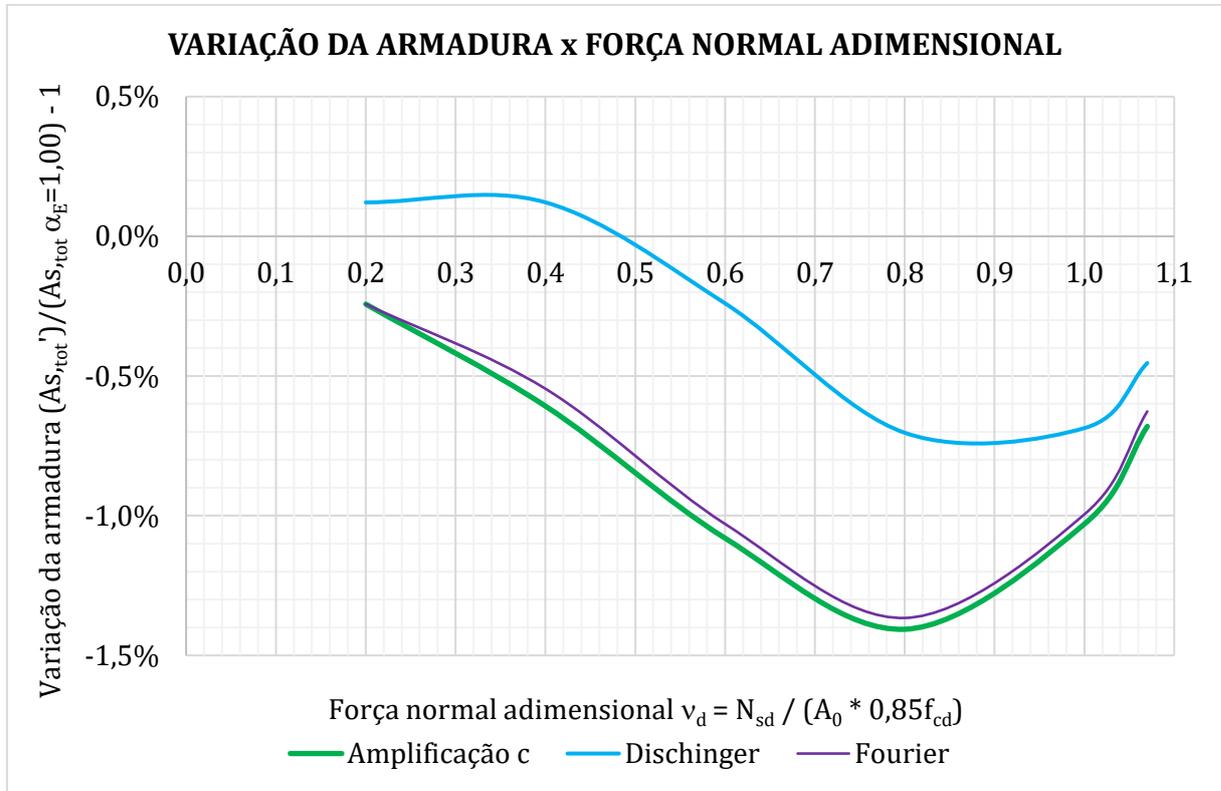
Tabela 7.15 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos métodos de dimensionamento - $\lambda = 40$, $f_{ck} = 40$ MPa e $\rho_s = 2\%$

v_d (-)	N_{sd} (kN)	$M_{Ad} = M_{Bd}$ (kNm)	Solução pr. (mm ²)	Fourier (mm ²)	Amplif. c (mm ²)	Dischinger (mm ²)
1,07	5102,3	75,5	3936,1	3911,5	3909,3	3918,3
1,00	4768,5	119,5	3933,4	3894,3	3892,9	3906,4
0,80	3814,8	226,0	3929,7	3876,0	3874,4	3902,0
0,60	2861,1	300,5	3924,2	3883,8	3881,8	3914,8
0,40	1907,4	351,0	3929,9	3908,4	3906,0	3934,7
0,20	953,7	350,0	3934,7	3925,1	3925,1	3939,4

Fonte: O autor

A Figura 7.15 apresenta uma comparação gráfica e percentual da Tabela 7.15. Para esta configuração de esbeltez e resistência do concreto, as soluções apresentaram um comportamento semelhante, com diferenças de até 1,5% em relação a solução proposta. Houve sobreposição das curvas para as soluções por Séries de Fourier e Amplificação com o coeficiente c.

Figura 7.15 – Pilar biarticulado, seção circular: Variação da taxa de armadura versus força normal v_d para três métodos de dimensionamento em comparação com o método proposto - $\lambda = 40, f_{ck} = 40 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%, \alpha_E = 1,0$



Fonte: O autor

A Tabela 7.16 apresenta os esforços utilizados assim como a armadura resultante para cada um dos tipos de agregados analisados.

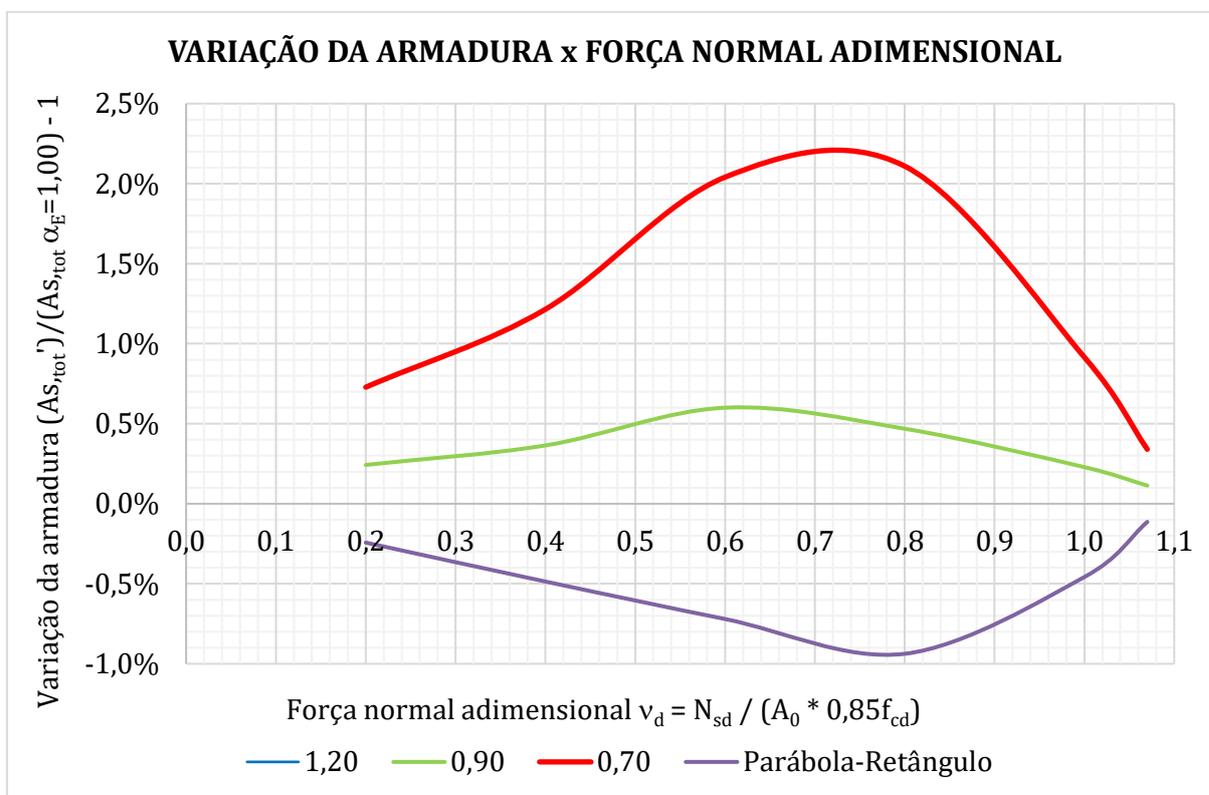
Tabela 7.16 – Pilar biarticulado, seção circular: Carregamentos e resultados de cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 40, f_{ck} = 40 \text{ MPa}, \rho_{s,tot} = 2\%$

v_d (-)	N_{sd} (kN)	M_{Ad} = M_{Bd} (kNm)	Solução p. $\alpha_E = 1,00$ (mm^2)	Solução p. $\alpha_E = 1,20$ (mm^2)	Solução p. $\alpha_E = 0,90$ (mm^2)	Solução p. $\alpha_E = 0,70$ (mm^2)	Solução p. Par.-Retâ. (mm^2)
1,07	5102,3	75,5	3936,1	3931,7	3940,6	3949,5	3931,7
1,00	4768,5	119,5	3933,4	3915,4	3942,4	3969,4	3915,4
0,80	3814,8	226,0	3929,7	3892,8	3948,1	4012,6	3892,8
0,60	2861,1	300,5	3924,2	3895,9	3947,7	4004,3	3895,9
0,40	1907,4	351,0	3929,9	3910,8	3944,2	3977,6	3908,4
0,20	953,7	350,0	3934,7	3925,1	3944,2	3963,3	3925,1

Fonte: O autor

A Figura 7.16 apresenta a comparação gráfica e percentual da Tabela 7.16. Para esta configuração de esbeltezo e resistência do concreto, a utilização do arenito ($\alpha_E = 0,7$) como agregado graúdo apresenta diferenças máximas na ordem de 2,5%, enquanto a utilização do basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$) gera uma economia de armadura próxima a 1,0%.

Figura 7.16 - Pilar biarticulado, seção circular: Variação da armadura versus força normal v_d , influência do agregado graúdo, em relação ao método proposto com $\alpha_e = 1,0$ cada um dos agregados graúdos - $\lambda = 40$, $f_{ck} = 40$ MPa, $\rho_s = 2\%$



Fonte: O autor

Capítulo 8

CONCLUSÃO

Após as comparações com outros tipos de análise e com a validação do programa em relação aos esforços de primeira e de segunda ordem, a solução proposta mostra-se útil como mais uma das etapas para a análise dos deslocamentos e dimensionamento de pilares, principalmente nos casos onde a esbeltez e a resistência do concreto são maiores, tornando os esforços de segunda ordem e a influência do diagrama de Grasser para a deformabilidade do pilar mais significativos.

Os métodos aproximados (amplificação dos esforços com o coeficiente c e aproximação de Dischinger) apresentaram um comportamento semelhante entre si quando comparados com a solução proposta. A diferença entre os métodos foi maior para os casos onde a resistência do concreto e a esbeltez do pilar são maiores.

A solução por séries de Fourier foi a que mais se aproximou da solução proposta, onde a diferença foi inferior a 2% para os casos onde a resistência do concreto é menor e chegou a 7,6% com o aumento da esbeltez e da resistência do concreto.

Apesar da diferença numérica não ser significativa, a solução proposta apresenta vantagens em relação aos outros métodos de dimensionamento: equações mais precisas para o cálculo dos deslocamentos e do momento de segunda ordem; introduz o dimensionamento de seções transversais vazadas; introduz o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração (Lei de Grasser) para a análise da deformabilidade do pilar.

A introdução deste diagrama (Lei de Grasser) para deformabilidade do pilar se mostra válida, pois sua utilização pode apresentar diferenças de +22% a -9% no valor da armadura do pilar, a depender dos dados geométricos, da resistência do concreto e do tipo de agregado (α_E) considerado.

Também se vê que a desconsideração do módulo de elasticidade na deformabilidade do concreto (explicitamente incluído na lei de Grasser, mas não nos

demais métodos) leva a um consumo maior de armadura. Em outras palavras, fica-se contra a segurança a desconsideração na deformabilidade do concreto para os casos em que $\alpha_E < 1,0$, e é possível a economia de armadura em caso contrário.

Ao comparar as diferenças entre a solução por séries de Fourier e a Solução proposta que considera o diagrama parábola-retângulo para o estado limite último e para deformabilidade do pilar (exclui-se o diagrama de Grasser), conclui-se que a interferência do Diagrama de Grasser para a deformabilidade do pilar é superior a alteração das equações diferenciais que calculam os deslocamentos e o momento solicitante total. Como se vê no Apêndice A, essa diferença cresce com o aumento da resistência do concreto.

Após o desenvolvimento deste trabalho verificou-se a possibilidade da realização de trabalhos futuros na abordagem dos seguintes itens:

- Introdução de outros tipos de carregamento, especialmente o da carga trapezoidal distribuída, para análise de empuxos;
- Introdução de seções variáveis com uma ampliação do método exato, analisando o momento solicitante e a rigidez secante em diversas seções ao longo do lance (e não apenas na seção mais solicitada);
- Realização de ensaios experimentais, de modo a verificar a confiabilidade dos resultados práticos com os obtidos por meio deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118: Projeto de estruturas de Concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

_____. **ABNT NBR 7187: Projeto e Execução de Pontes de Concreto Armado e Protendido**. Rio de Janeiro, 2014.

_____. **ABNT NBR 8522: Concreto - Determinação do módulo estático de elasticidade à compressão**. Rio de Janeiro, 2008.

BORGES, A. C. L. **Análise de pilares esbeltos de concreto armado submetidos a flexo-compressão oblíqua**. 1999. 98f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

BUCHAIM, R. **Efeitos de segunda ordem e estado limite último de instabilidade em pilares de concreto armado**. 1979. 113f. Dissertação de Mestrado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1979.

BUCHAIM, R. **A influência da não-linearidade física do concreto armado na rigidez à flexão e na capacidade de rotação plástica**. 2001. 260f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

BUCHAIM, R. **Concreto Estrutural: Fundamentos e Projeto. Flexão simples e composta normal, Pilares esbeltos, C20 a C90**. 1ª ed. Londrina. Editora da Universidade Estadual de Londrina EDUEL, 2016.

BUENO, M. M. E. **Avaliação dos parâmetros de instabilidade global em estruturas de concreto armado**. 2009. 88f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

CADAMURO Jr. I. W. **Dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado com seção qualquer solicitados por flexão composta oblíqua**. 1997. 202f. Dissertação de Mestrado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

CARDOSO JÚNIOR, S. D. **Sistema computacional para análise não-linear de pilares de concreto armado**. 2014. 62f. Monografia (Especialista em Gestão de Projetos de Sistemas Estruturais) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

- CECCON, J. L. **Análise dos efeitos de segunda ordem em pilares solicitados a flexão oblíqua composta**. 2008. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- CHEREM, M. **Contribuição ao estudo dos pilares com seção transversal em formato geométrico de 'L' considerando a não-linearidade física e geométrica**. 2010. 236f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model Code 1990 - Design Code**. London: Thomas Telford, 1993.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CODE-MODÈLE CEB/FIP pour les Structures en Béton**. Paris: Bulletin d'Information, 1978.
- DISCHINGER, F. **Untersuchungen über die Knicksicherheit, die Elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken**. Der Bauingenieur, August 1937.
- ENCISO, R. O. **Comportamento de Pilares Esbeltos de Concreto de Alta Resistência Sujeitos à Flexão Composta Reta**. 2010. 88f. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2010.
- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings**. EN 1992-1-1. CEN. Bruxelas, Bélgica. 2004.
- FRANÇA, R. L. S. **Contribuição ao estudo dos efeitos de segunda ordem em pilares de concreto armado**. 1991. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- FRANÇA, R. L. S. **Relações momento-curvatura em peças de concreto armado submetidas à flexão oblíqua composta**. 291f. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, São Paulo. 1984.
- FUSCO, P. B. **Construções de Concreto: Solicitações Normais e Estados Limites Últimos** 2ªed. São Paulo: Editora Édile, 1978.
- GONÇALVES, A. A. J. **Análise da capacidade resistente de pilares de concreto submetidos à flexo-compressão conforme a ABNT NBR 6118:2014 e outras referências normativas**. 2016. 222f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2016.

- GRASSER, E. **Manual on bending and compression: Design of sections under axial action effects at the ultimate limit state**. London: Construction Press, 1981.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 5ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.
- INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE (FIP) CEB-FIP. **Model Code 2010 - First complete draft**. Federal Institute of Technology Lausanne - EPFL, Section Génie Civil. Lausanne, 2010, v.1.
- INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE (FIP) CEB-FIP. **Model Code 2010 - First complete draft**. Federal Institute of Technology Lausanne - EPFL, Section Génie Civil. Lausanne, 2010, v.2.
- KLEIN JÚNIOR, O. **Pilares de concreto armado em situação de incêndio submetidos à flexão normal composta**. 2011. 208f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.
- LANGENDONCK, T. **Cálculo de concreto armado**. 1 v. São Paulo: ABCP, 1944.
- LEE, J.H.; SON, H.S. **Failure and strength of high-strength concrete columns subjected to eccentric loads**, ACI Structural Journal, V.97, N° 1, Janeiro 2000.
- LLOYD, N. A.; RANGAN B. V. **Studies on high-strength concrete columns under eccentric compression**, ACI Structural Journal, V.93, N° 6, Novembro 1996.
- LIMA Jr., H. C. **Avaliação da ductilidade de pilares de concreto armado, submetidos à flexo-compressão reta com e sem adição de fibras metálicas**. Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 323f. São Carlos.
- MACGREGOR, J. G.; WIGHT, J. K. **Reinforced Concrete Mechanics and Design**. 6ª ed. Upper Saddle River: Pearson, 2012.
- MARTÍNEZ, M. M.; VIVAS, R. L.; VALIENTE, E. E. E. **Real and Apparent Direction of Inertia in the Ultimate Limit State in Doubly Symmetrical Reinforced Concrete Sections**, American Society of Civil Engineers (ASCE), Vol. 24, Issue 4, November 2019.
- MENN, C. **Prestressed Concrete Bridges**. 1ª ed. Berlin: Birkhäuser, 1990.
- NORIEGA, B. E. V. **Comportamento de pilares esbeltos de concreto de alta resistência sob flexão composta reta e oblíqua**. 2011. 118f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- OLIVEIRA, P. H. A. S. **Processo aproximado para consideração da não-linearidade física de pilares em concreto armado**. 2004. 125f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

- OLIVEIRA, W. L. A. **Análise teórica e experimental de pilares de concreto armado sob ação de força centrada com resistência média à compressão do concreto de 40MPa.** 2004. 214f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- PINTO, R. S. **Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado.** 1997. 108f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.
- RAMOS, R. F. **Análise experimental de pilares de concreto armado sob ação centrada com resistência do concreto de 25MPa.** 2001. 247f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 2001.
- RÜSCH, H. **Researches toward a general flexural theory for structural concrete.** Journal of the American Concrete Institute 57.1, 1960.
- SCADELAI, M.A. **Dimensionamento de pilares de acordo com a NBR 6118:2003.** 2004. 124f. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 2004.
- SILVA, L. M. **Programa Computacional para Análise e Verificação de Seções de Concreto Armado e Protendido com Flexão Oblíqua Composta.** 2015. 192f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.
- SMANIOTTO, A. **Dimensionamento e Detalhamento Automático de Pilares Retangulares Submetidos à Flexão Composta Oblíqua.** 2005. 242f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.
- TIMOSHENKO, S.P. and GERE, J.M. **Theory of Elastic Stability.** 2^a ed. International Student Edition. McGraw-Hill Book Company, Ltd. Tokyo. 1961.
- TORRICO, F. A. **Análise teórica e experimental do comportamento de pilares esbeltos de concreto de alta resistência, considerando a ductilidade.** 2010. 345f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.
- VANDERLEI, R. D. **Análise experimental de pilares de concreto armado de alta resistência sob flexo-compressão reta.** 1999. 183f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

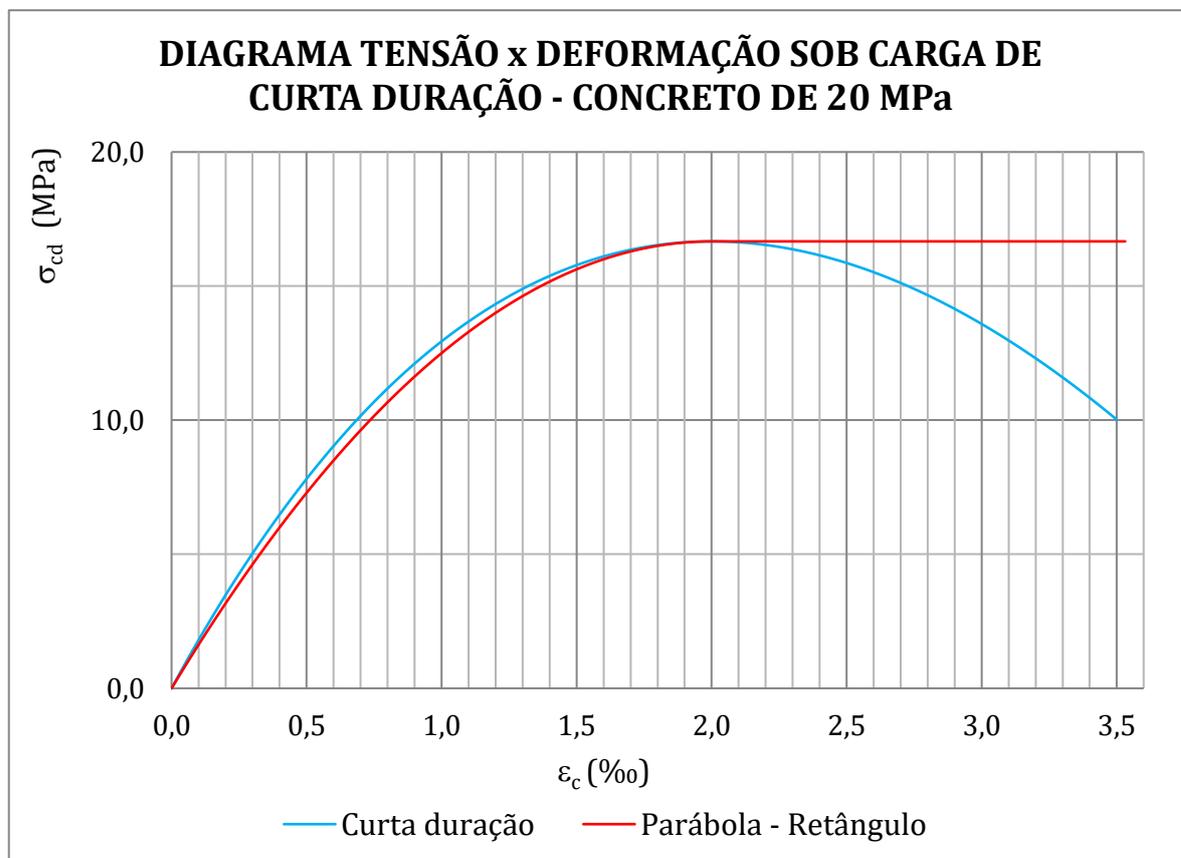
Apêndice A

RESISTÊNCIA PARA DEFORMABILIDADE DO CONCRETO

A.1 ANÁLISE GRÁFICA

As figuras e as tabelas a seguir expõem a tensão obtida para cada deformação considerando os diagramas de Grasser e o Parábola-retângulo, assim como a diferença entre os diagramas em relação ao diagrama parábola-retângulo.

Figura A.1 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 20 MPa



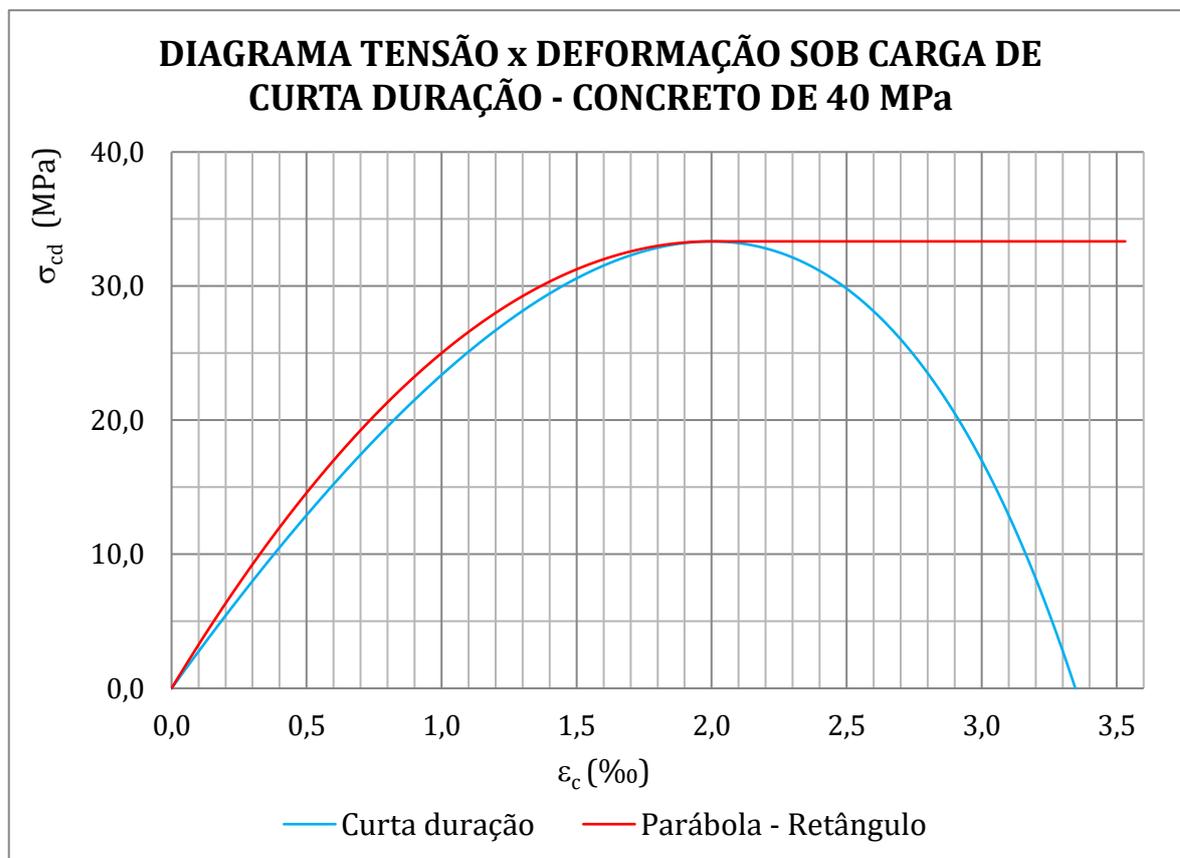
Fonte: O autor

Tabela A.1 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 20 MPa

ϵ_c (‰)	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
Par. - Retâng. (MPa)	0,0	7,3	12,5	15,6	16,7	16,7	16,7	16,7
Grasser (MPa)	0,0	7,8	12,9	15,8	16,7	15,9	13,6	10,0
%	-	7,1	3,5	1,0	0,0	-4,8	-18,5	-39,8

Fonte: O autor

Figura A.2 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 40 MPa



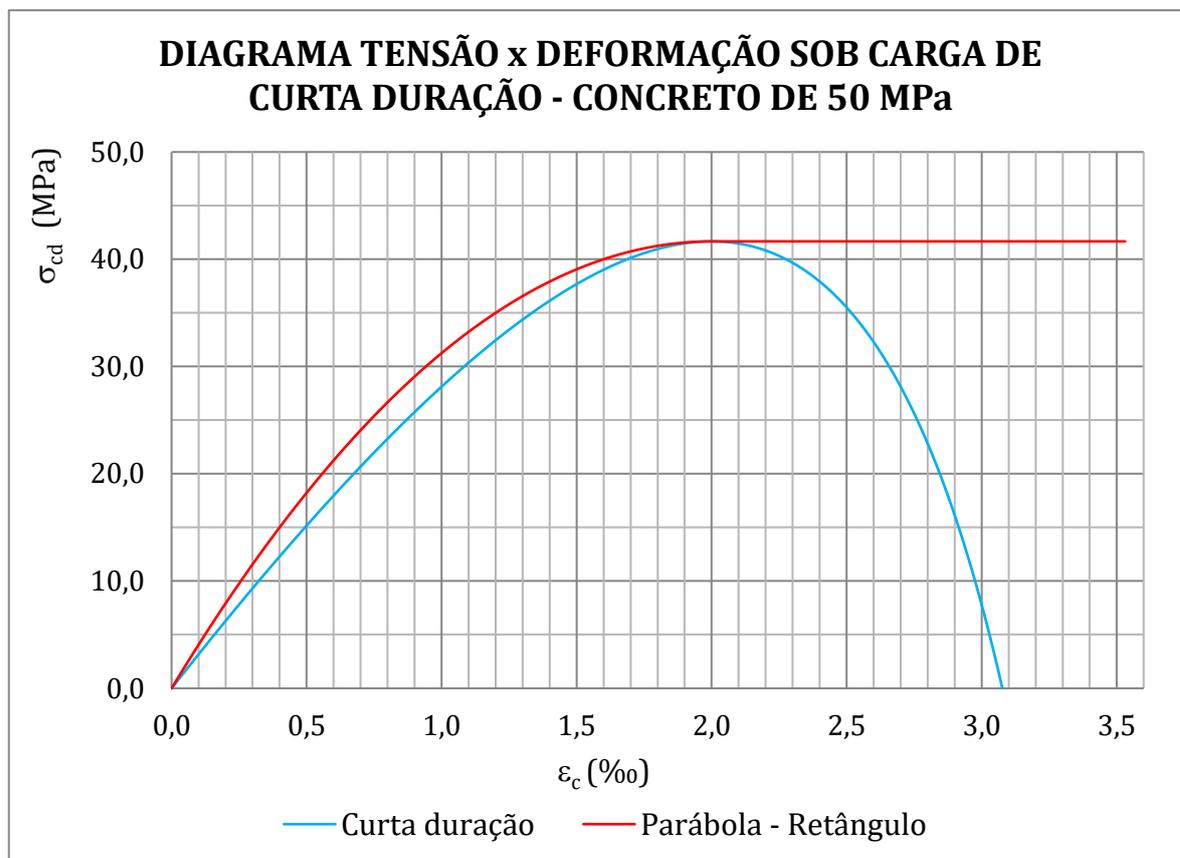
Fonte: O autor

Tabela A.2 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 40 MPa

ϵ_c (‰)	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,35
Par. - Retâng. (MPa)	0,0	14,6	25,0	31,3	33,3	33,3	33,3	33,3
Grasser (MPa)	0,0	12,9	23,4	30,6	33,3	29,8	17,0	0,0
%	-	-11,4	-6,5	-2,2	0,0	-10,6	-49,0	-

Fonte: O autor

Figura A.3 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 50 MPa



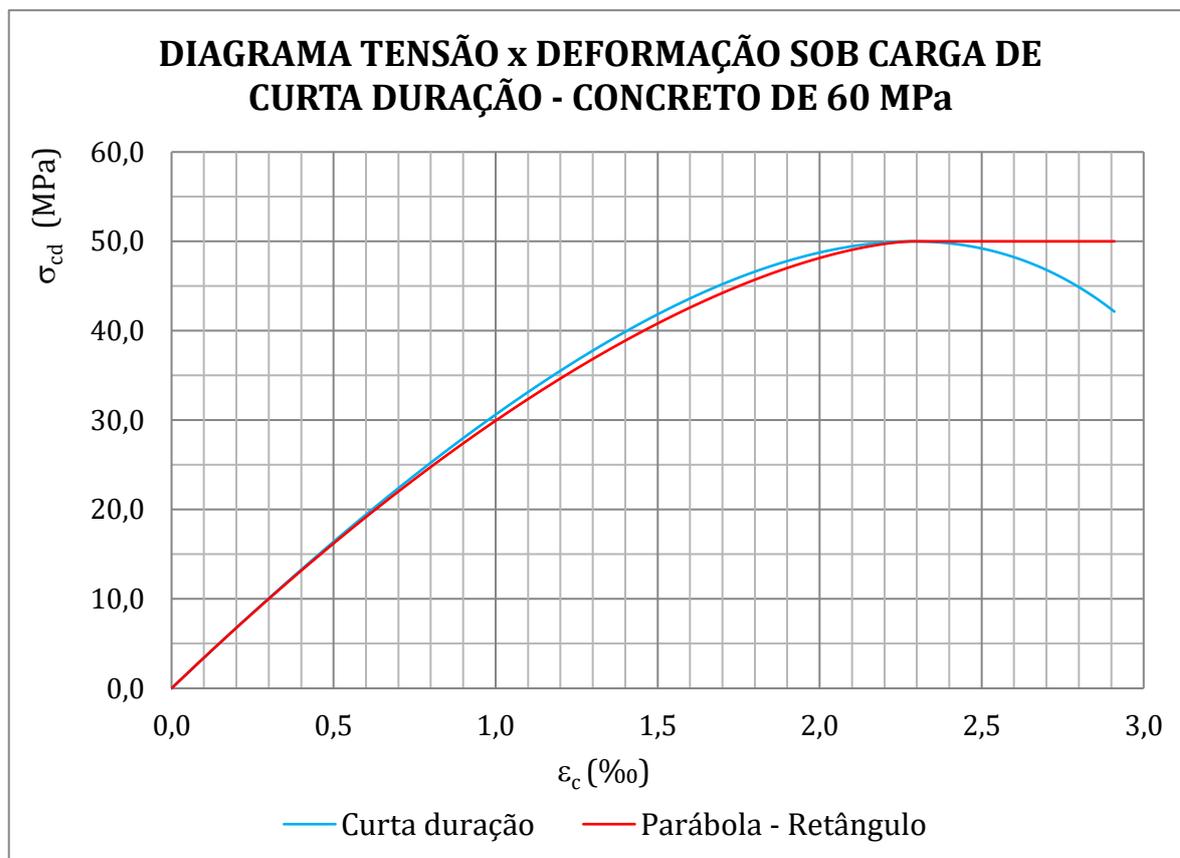
Fonte: O autor

Tabela A.3 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 50 MPa

ϵ_c (‰)	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,08
Par. - Retâng. (MPa)	0,0	18,2	31,3	39,1	41,7	41,7	41,7	41,7
Grasser (MPa)	0,0	15,2	28,1	37,7	41,7	35,5	7,8	0,0
%	-	-16,8	-10,0	-3,5	0,0	-14,8	-81,3	-

Fonte: O autor

Figura A.4 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 60 MPa



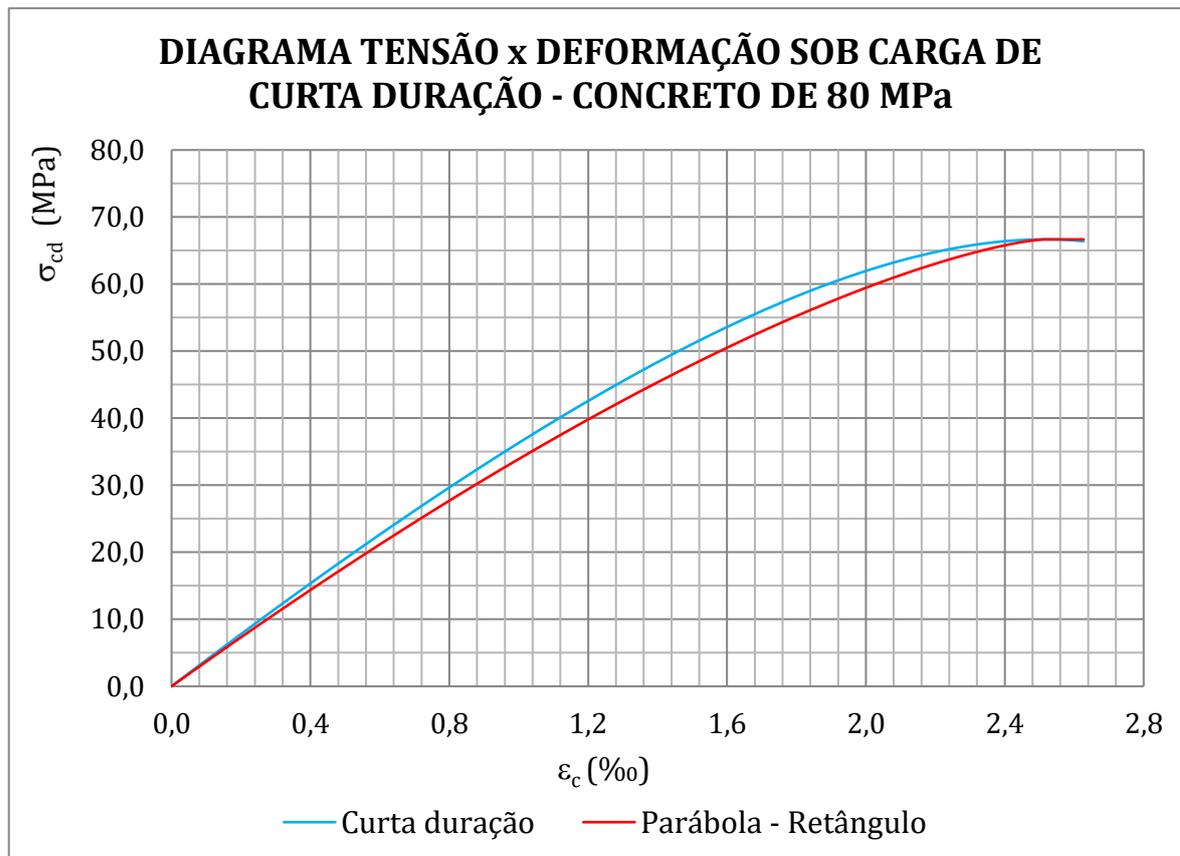
Fonte: O autor

Tabela A.4 - Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 60 MPa

ϵ_c (‰)	0,00	0,41	0,82	1,24	1,65	2,06	2,47	2,88
Par. - Retâng. (MPa)	0,0	13,5	25,4	35,5	43,4	48,7	50,0	50,0
Grasser (MPa)	0,0	13,7	25,9	36,3	44,4	49,2	49,4	42,9
%	-	0,9	2,0	2,5	2,3	1,0	-1,2	-14,3

Fonte: O autor

Figura A.5 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 80 MPa



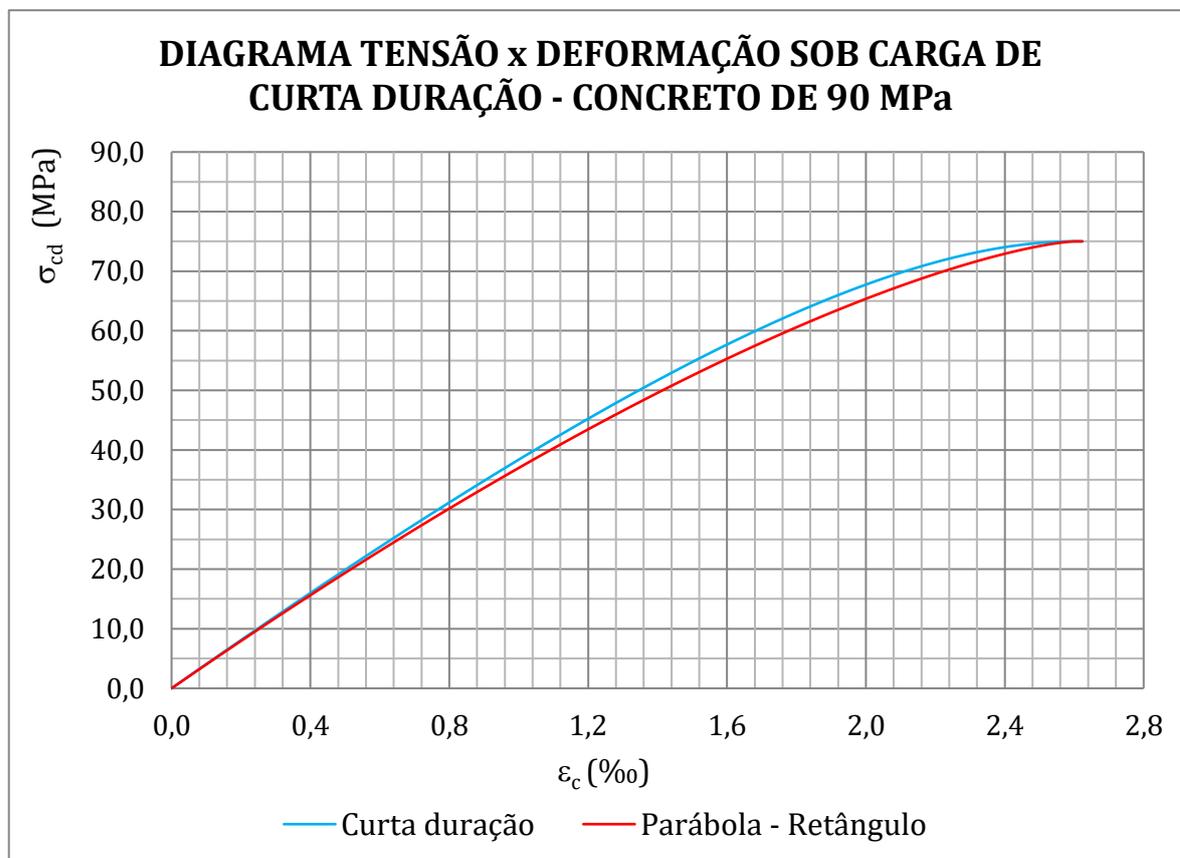
Fonte: O autor

Tabela A.5 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 80 MPa

ϵ_c (‰)	0,00	0,37	0,74	1,12	1,49	1,86	2,23	2,60
Par. - Retâng. (MPa)	0,0	13,4	25,9	37,4	47,7	56,5	63,5	66,7
Grasser (MPa)	0,0	14,3	27,7	40,0	50,7	59,4	65,1	66,5
%	-	6,8	7,1	7,0	6,4	5,0	2,5	-0,3

Fonte: O autor

Figura A.6 - Diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 90 MPa



Fonte: O autor

Tabela A.6 – Comparação entre o diagrama tensão-deformação sob carga de curta duração e o diagrama parábola-retângulo, concreto de 90 MPa

ϵ_c (‰)	0,00	0,37	0,74	1,11	1,49	1,86	2,23	2,60
Par. - Retâng. (MPa)	0,0	14,6	28,2	40,7	52,1	62,0	70,1	75,0
Grasser (MPa)	0,0	14,9	29,1	42,3	54,3	64,5	71,9	75,0
%	-	2,3%	3,2%	4,0%	4,3%	4,0%	2,7%	0,0%

Fonte: O autor

Apêndice B

CAPACIDADE RESISTENTE DA SEÇÃO

EXEMPLOS

B.1 SEÇÃO RETANGULAR VAZADA

O exemplo a seguir utiliza-se dos mesmos dados da análise em 5.3.4 e 4.2.1, um pilar biarticulado de seção retangular e vazada. Considera-se o $f_{ck} = 60$ MPa, o agregado graúdo considerado foi o basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$), $\varepsilon_{c2} = 2,29$ ‰ e $\varepsilon_{cu} = 2,88$ ‰.

Nos carregamentos, considera-se $N_{sd} = 13.115$ kN, $M_{Ad} = M_{Bd} = 720$ kNm, $H_d = 225$ kN e $q_d = 35$ kN/m, com $M_{sd} = 2.967,4$ kNm.

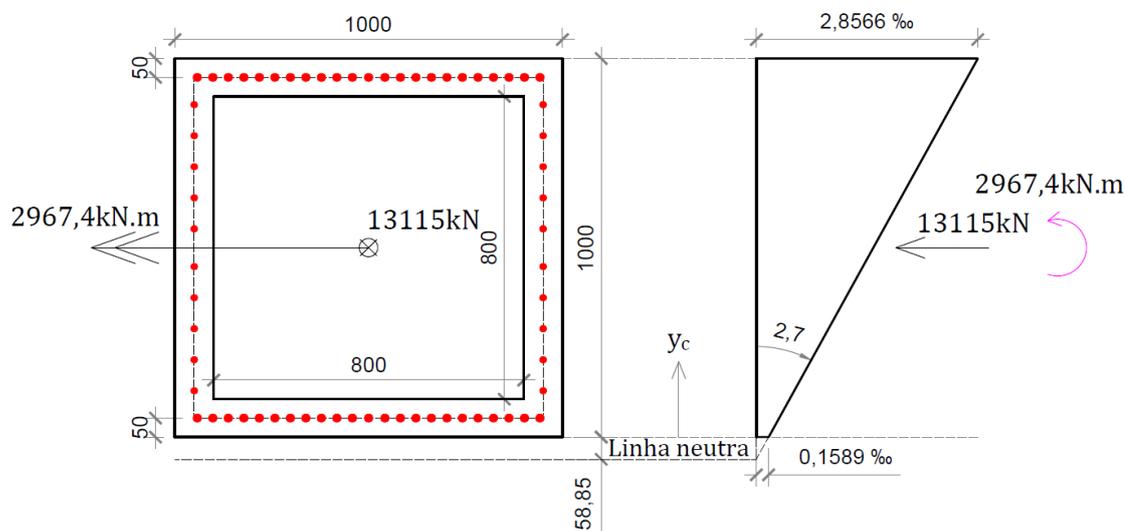
Na seção vazada é dividida em 300 faixas, considera-se $B_e = H_e = 1000$ mm, $B_i = H_i = 800$ mm, $d' = 50$ mm. Os banzos são divididos em 60 faixas, onde cada uma das faixas tem área igual a $B_e(H_e/2 - H_i/2)/60 = 1666,67$ mm². A mesa é dividida em 180 faixas, onde cada uma das faixas tem área igual a $H_i(B_e - B_i)/180 = 888,88$ mm².

Além da área, cada faixa recebe um valor de y_c e de x , que representam a distância do C.G da faixa até a borda inferior da seção transversal e até a posição da linha neutra, respectivamente. A Figura 5.7 mostra os dados que foram utilizados nesta análise.

Com a curvatura igual a $2,7 \times 10^{-3}$ e a posição da linha-neutra, calcula-se a deformação ε_c e a tensão (equações 2.5.2.1.5, 2.5.2.1.6 e 2.5.2.1.7) de cada uma das faixas da seção de concreto. Do produto entre a área e a tensão da faixa, encontra-se a força resistida por cada uma das faixas. Do produto desta força com a distância do C.G da faixa até o C.G da seção transversal, tem-se o momento resistido pela faixa.

A Figura B.1 mostra a seção transversal com a distribuição das armaduras, posição da linha neutra e diagrama de deformações da seção retangular vazada.

Figura B.1 – Posição da linha neutra e diagrama de deformações da seção retangular vazada



Fonte: O autor

Somando a contribuição de cada uma das faixas, encontra-se a força e o momento resistido pela seção de concreto. A tabela a seguir apresenta os dados de cada uma das faixas da seção.

Tabela B.1 – Contribuição de cada uma das faixas da seção de concreto para seção retangular vazada

(continua)

Faixa nº	A_c (mm ²)	y_c (mm)	x (mm)	ϵ_c (‰)	σ_c (MPa)	R_c (kN)	M_{c1} (kNm)
1	1666,7	0,8	59,7	0,16	3,99	6,7	-3,3
2	1666,7	2,5	61,3	0,17	4,10	6,8	-3,4
3	1666,7	4,2	63,0	0,17	4,21	7,0	-3,5
4	1666,7	5,8	64,7	0,17	4,32	7,2	-3,6
5	1666,7	7,5	66,3	0,18	4,43	7,4	-3,6
6	1666,7	9,2	68,0	0,18	4,54	7,6	-3,7
7	1666,7	10,8	69,7	0,19	4,64	7,7	-3,8
8	1666,7	12,5	71,3	0,19	4,75	7,9	-3,9
9	1666,7	14,2	73,0	0,20	4,86	8,1	-3,9
10	1666,7	15,8	74,7	0,20	4,97	8,3	-4,0
11	1666,7	17,5	76,3	0,21	5,08	8,5	-4,1

Tabela B.1 - Contribuição de cada uma das faixas da seção de concreto para seção retangular vazada

(continuação)

Faixa nº	A_c (mm ²)	y_c (mm)	x (mm)	ε_c (‰)	σ_c (MPa)	R_c (kN)	M_{c1} (kNm)
12	1666,7	19,2	78,0	0,21	5,18	8,6	-4,2
13	1666,7	20,8	79,7	0,22	5,29	8,8	-4,2
14	1666,7	22,5	81,3	0,22	5,40	9,0	-4,3
15	1666,7	24,2	83,0	0,22	5,51	9,2	-4,4
16	1666,7	25,8	84,7	0,23	5,61	9,4	-4,4
17	1666,7	27,5	86,3	0,23	5,72	9,5	-4,5
18	1666,7	29,2	88,0	0,24	5,83	9,7	-4,6
19	1666,7	30,8	89,7	0,24	5,93	9,9	-4,6
20	1666,7	32,5	91,3	0,25	6,04	10,1	-4,7
21	1666,7	34,2	93,0	0,25	6,15	10,2	-4,8
22	1666,7	35,8	94,7	0,26	6,25	10,4	-4,8
23	1666,7	37,5	96,3	0,26	6,36	10,6	-4,9
24	1666,7	39,2	98,0	0,26	6,47	10,8	-5,0
25	1666,7	40,8	99,7	0,27	6,57	11,0	-5,0
26	1666,7	42,5	101,3	0,27	6,68	11,1	-5,1
27	1666,7	44,2	103,0	0,28	6,78	11,3	-5,2
28	1666,7	45,8	104,7	0,28	6,89	11,5	-5,2
29	1666,7	47,5	106,3	0,29	6,99	11,7	-5,3
30	1666,7	49,2	108,0	0,29	7,10	11,8	-5,3
31	1666,7	50,8	109,7	0,30	7,20	12,0	-5,4
32	1666,7	52,5	111,3	0,30	7,31	12,2	-5,5
33	1666,7	54,2	113,0	0,31	7,41	12,4	-5,5
34	1666,7	55,8	114,7	0,31	7,52	12,5	-5,6
35	1666,7	57,5	116,3	0,31	7,62	12,7	-5,6
36	1666,7	59,2	118,0	0,32	7,73	12,9	-5,7
37	1666,7	60,8	119,7	0,32	7,83	13,1	-5,7
38	1666,7	62,5	121,3	0,33	7,93	13,2	-5,8
39	1666,7	64,2	123,0	0,33	8,04	13,4	-5,8
40	1666,7	65,8	124,7	0,34	8,14	13,6	-5,9
41	1666,7	67,5	126,3	0,34	8,25	13,7	-5,9

Tabela B.1 - Contribuição de cada uma das faixas da seção de concreto para seção retangular vazada

(continuação)

Faixa nº	A_c (mm ²)	y_c (mm)	x (mm)	ε_c (‰)	σ_c (MPa)	R_c (kN)	M_{c1} (kNm)
42	1666,7	69,2	128,0	0,35	8,35	13,9	-6,0
43	1666,7	70,8	129,7	0,35	8,45	14,1	-6,0
44	1666,7	72,5	131,3	0,35	8,56	14,3	-6,1
45	1666,7	74,2	133,0	0,36	8,66	14,4	-6,1
46	1666,7	75,8	134,7	0,36	8,76	14,6	-6,2
47	1666,7	77,5	136,3	0,37	8,86	14,8	-6,2
48	1666,7	79,2	138,0	0,37	8,97	14,9	-6,3
49	1666,7	80,8	139,7	0,38	9,07	15,1	-6,3
50	1666,7	82,5	141,3	0,38	9,17	15,3	-6,4
51	1666,7	84,2	143,0	0,39	9,27	15,5	-6,4
52	1666,7	85,8	144,7	0,39	9,38	15,6	-6,5
53	1666,7	87,5	146,3	0,40	9,48	15,8	-6,5
54	1666,7	89,2	148,0	0,40	9,58	16,0	-6,6
55	1666,7	90,8	149,7	0,40	9,68	16,1	-6,6
56	1666,7	92,5	151,3	0,41	9,78	16,3	-6,6
57	1666,7	94,2	153,0	0,41	9,88	16,5	-6,7
58	1666,7	95,8	154,7	0,42	9,99	16,6	-6,7
59	1666,7	97,5	156,3	0,42	10,09	16,8	-6,8
60	1666,7	99,2	158,0	0,43	10,19	17,0	-6,8
61	888,9	102,2	161,1	0,43	10,37	9,2	-3,7
62	888,9	106,7	165,5	0,45	10,64	9,5	-3,7
63	888,9	111,1	170,0	0,46	10,91	9,7	-3,8
64	888,9	115,6	174,4	0,47	11,17	9,9	-3,8
65	888,9	120,0	178,8	0,48	11,44	10,2	-3,9
66	888,9	124,4	183,3	0,49	11,70	10,4	-3,9
67	888,9	128,9	187,7	0,51	11,96	10,6	-3,9
68	888,9	133,3	192,2	0,52	12,22	10,9	-4,0
69	888,9	137,8	196,6	0,53	12,48	11,1	-4,0
70	888,9	142,2	201,1	0,54	12,74	11,3	-4,1
71	888,9	146,7	205,5	0,55	13,00	11,6	-4,1

Tabela B.1 - Contribuição de cada uma das faixas da seção de concreto para seção retangular vazada

(continuação)

Faixa nº	A_c (mm ²)	y_c (mm)	x (mm)	ε_c (‰)	σ_c (MPa)	R_c (kN)	M_{c1} (kNm)
72	888,9	151,1	210,0	0,57	13,26	11,8	-4,1
73	888,9	155,6	214,4	0,58	13,52	12,0	-4,1
74	888,9	160,0	218,8	0,59	13,77	12,2	-4,2
75	888,9	164,4	223,3	0,60	14,03	12,5	-4,2
76	888,9	168,9	227,7	0,61	14,28	12,7	-4,2
77	888,9	173,3	232,2	0,63	14,53	12,9	-4,2
78	888,9	177,8	236,6	0,64	14,78	13,1	-4,2
79	888,9	182,2	241,1	0,65	15,03	13,4	-4,2
80	888,9	186,7	245,5	0,66	15,28	13,6	-4,3
81	888,9	191,1	250,0	0,67	15,53	13,8	-4,3
82	888,9	195,6	254,4	0,69	15,77	14,0	-4,3
83	888,9	200,0	258,8	0,70	16,02	14,2	-4,3
84	888,9	204,4	263,3	0,71	16,26	14,5	-4,3
85	888,9	208,9	267,7	0,72	16,51	14,7	-4,3
86	888,9	213,3	272,2	0,73	16,75	14,9	-4,3
87	888,9	217,8	276,6	0,75	16,99	15,1	-4,3
88	888,9	222,2	281,1	0,76	17,23	15,3	-4,3
89	888,9	226,7	285,5	0,77	17,47	15,5	-4,2
90	888,9	231,1	290,0	0,78	17,71	15,7	-4,2
91	888,9	235,6	294,4	0,79	17,94	16,0	-4,2
92	888,9	240,0	298,8	0,81	18,18	16,2	-4,2
93	888,9	244,4	303,3	0,82	18,41	16,4	-4,2
94	888,9	248,9	307,7	0,83	18,65	16,6	-4,2
95	888,9	253,3	312,2	0,84	18,88	16,8	-4,1
96	888,9	257,8	316,6	0,85	19,11	17,0	-4,1
97	888,9	262,2	321,1	0,87	19,34	17,2	-4,1
98	888,9	266,7	325,5	0,88	19,57	17,4	-4,1
99	888,9	271,1	330,0	0,89	19,80	17,6	-4,0
100	888,9	275,6	334,4	0,90	20,02	17,8	-4,0
101	888,9	280,0	338,8	0,91	20,25	18,0	-4,0

Tabela B.1 - Contribuição de cada uma das faixas da seção de concreto para seção retangular vazada

(continuação)

Faixa nº	A_c (mm ²)	y_c (mm)	x (mm)	ε_c (‰)	σ_c (MPa)	R_c (kN)	M_{c1} (kNm)
102	888,9	284,4	343,3	0,93	20,47	18,2	-3,9
103	888,9	288,9	347,7	0,94	20,70	18,4	-3,9
104	888,9	293,3	352,2	0,95	20,92	18,6	-3,8
105	888,9	297,8	356,6	0,96	21,14	18,8	-3,8
106	888,9	302,2	361,1	0,97	21,36	19,0	-3,8
107	888,9	306,7	365,5	0,99	21,58	19,2	-3,7
108	888,9	311,1	370,0	1,00	21,79	19,4	-3,7
109	888,9	315,6	374,4	1,01	22,01	19,6	-3,6
110	888,9	320,0	378,8	1,02	22,22	19,8	-3,6
111	888,9	324,4	383,3	1,03	22,44	19,9	-3,5
112	888,9	328,9	387,7	1,05	22,65	20,1	-3,4
113	888,9	333,3	392,2	1,06	22,86	20,3	-3,4
114	888,9	337,8	396,6	1,07	23,07	20,5	-3,3
115	888,9	342,2	401,1	1,08	23,28	20,7	-3,3
116	888,9	346,7	405,5	1,09	23,49	20,9	-3,2
117	888,9	351,1	410,0	1,11	23,69	21,1	-3,1
118	888,9	355,6	414,4	1,12	23,90	21,2	-3,1
119	888,9	360,0	418,8	1,13	24,10	21,4	-3,0
120	888,9	364,4	423,3	1,14	24,31	21,6	-2,9
121	888,9	368,9	427,7	1,15	24,51	21,8	-2,9
122	888,9	373,3	432,2	1,17	24,71	22,0	-2,8
123	888,9	377,8	436,6	1,18	24,91	22,1	-2,7
124	888,9	382,2	441,1	1,19	25,10	22,3	-2,6
125	888,9	386,7	445,5	1,20	25,30	22,5	-2,5
126	888,9	391,1	450,0	1,21	25,49	22,7	-2,5
127	888,9	395,6	454,4	1,23	25,69	22,8	-2,4
128	888,9	400,0	458,8	1,24	25,88	23,0	-2,3
129	888,9	404,4	463,3	1,25	26,07	23,2	-2,2
130	888,9	408,9	467,7	1,26	26,26	23,3	-2,1
131	888,9	413,3	472,2	1,27	26,45	23,5	-2,0

Tabela B.1 - Contribuição de cada uma das faixas da seção de concreto para seção retangular vazada

(continuação)

Faixa nº	A_c (mm ²)	y_c (mm)	x (mm)	ε_c (‰)	σ_c (MPa)	R_c (kN)	M_{c1} (kNm)
132	888,9	417,8	476,6	1,29	26,64	23,7	-1,9
133	888,9	422,2	481,1	1,30	26,82	23,8	-1,9
134	888,9	426,7	485,5	1,31	27,01	24,0	-1,8
135	888,9	431,1	490,0	1,32	27,19	24,2	-1,7
136	888,9	435,6	494,4	1,33	27,37	24,3	-1,6
137	888,9	440,0	498,8	1,35	27,55	24,5	-1,5
138	888,9	444,4	503,3	1,36	27,73	24,7	-1,4
139	888,9	448,9	507,7	1,37	27,91	24,8	-1,3
140	888,9	453,3	512,2	1,38	28,09	25,0	-1,2
141	888,9	457,8	516,6	1,39	28,26	25,1	-1,1
142	888,9	462,2	521,1	1,41	28,44	25,3	-1,0
143	888,9	466,7	525,5	1,42	28,61	25,4	-0,8
144	888,9	471,1	530,0	1,43	28,78	25,6	-0,7
145	888,9	475,6	534,4	1,44	28,95	25,7	-0,6
146	888,9	480,0	538,8	1,45	29,12	25,9	-0,5
147	888,9	484,4	543,3	1,47	29,28	26,0	-0,4
148	888,9	488,9	547,7	1,48	29,45	26,2	-0,3
149	888,9	493,3	552,2	1,49	29,61	26,3	-0,2
150	888,9	497,8	556,6	1,50	29,77	26,5	-0,1
151	888,9	502,2	561,1	1,51	29,94	26,6	0,1
152	888,9	506,7	565,5	1,53	30,10	26,8	0,2
153	888,9	511,1	570,0	1,54	30,25	26,9	0,3
154	888,9	515,6	574,4	1,55	30,41	27,0	0,4
155	888,9	520,0	578,8	1,56	30,56	27,2	0,5
156	888,9	524,4	583,3	1,57	30,72	27,3	0,7
157	888,9	528,9	587,7	1,59	30,87	27,4	0,8
158	888,9	533,3	592,2	1,60	31,02	27,6	0,9
159	888,9	537,8	596,6	1,61	31,17	27,7	1,0
160	888,9	542,2	601,1	1,62	31,32	27,8	1,2
161	888,9	546,7	605,5	1,63	31,46	28,0	1,3

Tabela B.1 - Contribuição de cada uma das faixas da seção de concreto para seção retangular vazada

(continuação)

Faixa nº	A_c (mm ²)	y_c (mm)	x (mm)	ε_c (‰)	σ_c (MPa)	R_c (kN)	M_{c1} (kNm)
162	888,9	551,1	610,0	1,65	31,61	28,1	1,4
163	888,9	555,6	614,4	1,66	31,75	28,2	1,6
164	888,9	560,0	618,8	1,67	31,89	28,3	1,7
165	888,9	564,4	623,3	1,68	32,03	28,5	1,8
166	888,9	568,9	627,7	1,69	32,17	28,6	2,0
167	888,9	573,3	632,2	1,71	32,30	28,7	2,1
168	888,9	577,8	636,6	1,72	32,44	28,8	2,2
169	888,9	582,2	641,1	1,73	32,57	29,0	2,4
170	888,9	586,7	645,5	1,74	32,70	29,1	2,5
171	888,9	591,1	650,0	1,75	32,83	29,2	2,7
172	888,9	595,6	654,4	1,77	32,96	29,3	2,8
173	888,9	600,0	658,8	1,78	33,09	29,4	2,9
174	888,9	604,4	663,3	1,79	33,21	29,5	3,1
175	888,9	608,9	667,7	1,80	33,33	29,6	3,2
176	888,9	613,3	672,2	1,81	33,45	29,7	3,4
177	888,9	617,8	676,6	1,83	33,57	29,8	3,5
178	888,9	622,2	681,1	1,84	33,69	29,9	3,7
179	888,9	626,7	685,5	1,85	33,81	30,0	3,8
180	888,9	631,1	690,0	1,86	33,92	30,2	4,0
181	888,9	635,6	694,4	1,87	34,03	30,2	4,1
182	888,9	640,0	698,8	1,89	34,14	30,3	4,2
183	888,9	644,4	703,3	1,90	34,25	30,4	4,4
184	888,9	648,9	707,7	1,91	34,35	30,5	4,5
185	888,9	653,3	712,2	1,92	34,46	30,6	4,7
186	888,9	657,8	716,6	1,93	34,56	30,7	4,8
187	888,9	662,2	721,1	1,95	34,66	30,8	5,0
188	888,9	666,7	725,5	1,96	34,76	30,9	5,1
189	888,9	671,1	730,0	1,97	34,85	31,0	5,3
190	888,9	675,6	734,4	1,98	34,95	31,1	5,5
191	888,9	680,0	738,8	1,99	35,04	31,1	5,6

Tabela B.1 - Contribuição de cada uma das faixas da seção de concreto para seção retangular vazada

(continuação)

Faixa nº	A_c (mm ²)	y_c (mm)	x (mm)	ε_c (‰)	σ_c (MPa)	R_c (kN)	M_{c1} (kNm)
192	888,9	684,4	743,3	2,01	35,13	31,2	5,8
193	888,9	688,9	747,7	2,02	35,22	31,3	5,9
194	888,9	693,3	752,2	2,03	35,30	31,4	6,1
195	888,9	697,8	756,6	2,04	35,38	31,5	6,2
196	888,9	702,2	761,1	2,05	35,46	31,5	6,4
197	888,9	706,7	765,5	2,07	35,54	31,6	6,5
198	888,9	711,1	770,0	2,08	35,62	31,7	6,7
199	888,9	715,6	774,4	2,09	35,69	31,7	6,8
200	888,9	720,0	778,8	2,10	35,76	31,8	7,0
201	888,9	724,4	783,3	2,11	35,83	31,8	7,1
202	888,9	728,9	787,7	2,13	35,89	31,9	7,3
203	888,9	733,3	792,2	2,14	35,95	32,0	7,5
204	888,9	737,8	796,6	2,15	36,01	32,0	7,6
205	888,9	742,2	801,1	2,16	36,07	32,1	7,8
206	888,9	746,7	805,5	2,17	36,12	32,1	7,9
207	888,9	751,1	810,0	2,19	36,17	32,2	8,1
208	888,9	755,6	814,4	2,20	36,22	32,2	8,2
209	888,9	760,0	818,8	2,21	36,26	32,2	8,4
210	888,9	764,4	823,3	2,22	36,30	32,3	8,5
211	888,9	768,9	827,7	2,23	36,34	32,3	8,7
212	888,9	773,3	832,2	2,25	36,37	32,3	8,8
213	888,9	777,8	836,6	2,26	36,39	32,3	9,0
214	888,9	782,2	841,1	2,27	36,41	32,4	9,1
215	888,9	786,7	845,5	2,28	36,43	32,4	9,3
216	888,9	791,1	850,0	2,29	36,43	32,4	9,4
217	888,9	795,6	854,4	2,31	36,43	32,4	9,6
218	888,9	800,0	858,8	2,32	36,43	32,4	9,7
219	888,9	804,4	863,3	2,33	36,43	32,4	9,9
220	888,9	808,9	867,7	2,34	36,43	32,4	10,0
221	888,9	813,3	872,2	2,35	36,43	32,4	10,1

Tabela B.1 - Contribuição de cada uma das faixas da seção de concreto para seção retangular vazada

(continuação)

Faixa nº	A_c (mm ²)	y_c (mm)	x (mm)	ε_c (‰)	σ_c (MPa)	R_c (kN)	M_{c1} (kNm)
222	888,9	817,8	876,6	2,37	36,43	32,4	10,3
223	888,9	822,2	881,1	2,38	36,43	32,4	10,4
224	888,9	826,7	885,5	2,39	36,43	32,4	10,6
225	888,9	831,1	890,0	2,40	36,43	32,4	10,7
226	888,9	835,6	894,4	2,41	36,43	32,4	10,9
227	888,9	840,0	898,8	2,43	36,43	32,4	11,0
228	888,9	844,4	903,3	2,44	36,43	32,4	11,2
229	888,9	848,9	907,7	2,45	36,43	32,4	11,3
230	888,9	853,3	912,2	2,46	36,43	32,4	11,4
231	888,9	857,8	916,6	2,47	36,43	32,4	11,6
232	888,9	862,2	921,1	2,49	36,43	32,4	11,7
233	888,9	866,7	925,5	2,50	36,43	32,4	11,9
234	888,9	871,1	930,0	2,51	36,43	32,4	12,0
235	888,9	875,6	934,4	2,52	36,43	32,4	12,2
236	888,9	880,0	938,8	2,53	36,43	32,4	12,3
237	888,9	884,4	943,3	2,55	36,43	32,4	12,4
238	888,9	888,9	947,7	2,56	36,43	32,4	12,6
239	888,9	893,3	952,2	2,57	36,43	32,4	12,7
240	888,9	897,8	956,6	2,58	36,43	32,4	12,9
241	1666,7	900,8	959,7	2,59	36,43	60,7	24,3
242	1666,7	902,5	961,3	2,60	36,43	60,7	24,4
243	1666,7	904,2	963,0	2,60	36,43	60,7	24,5
244	1666,7	905,8	964,7	2,60	36,43	60,7	24,6
245	1666,7	907,5	966,3	2,61	36,43	60,7	24,7
246	1666,7	909,2	968,0	2,61	36,43	60,7	24,8
247	1666,7	910,8	969,7	2,62	36,43	60,7	24,9
248	1666,7	912,5	971,3	2,62	36,43	60,7	25,0
249	1666,7	914,2	973,0	2,63	36,43	60,7	25,1
250	1666,7	915,8	974,7	2,63	36,43	60,7	25,2
251	1666,7	917,5	976,3	2,64	36,43	60,7	25,3

Tabela B.1 - Contribuição de cada uma das faixas da seção de concreto para seção retangular vazada

(continuação)

Faixa nº	A_c (mm ²)	y_c (mm)	x (mm)	ε_c (‰)	σ_c (MPa)	R_c (kN)	M_{c1} (kNm)
252	1666,7	919,2	978,0	2,64	36,43	60,7	25,4
253	1666,7	920,8	979,7	2,65	36,43	60,7	25,6
254	1666,7	922,5	981,3	2,65	36,43	60,7	25,7
255	1666,7	924,2	983,0	2,65	36,43	60,7	25,8
256	1666,7	925,8	984,7	2,66	36,43	60,7	25,9
257	1666,7	927,5	986,3	2,66	36,43	60,7	26,0
258	1666,7	929,2	988,0	2,67	36,43	60,7	26,1
259	1666,7	930,8	989,7	2,67	36,43	60,7	26,2
260	1666,7	932,5	991,3	2,68	36,43	60,7	26,3
261	1666,7	934,2	993,0	2,68	36,43	60,7	26,4
262	1666,7	935,8	994,7	2,69	36,43	60,7	26,5
263	1666,7	937,5	996,3	2,69	36,43	60,7	26,6
264	1666,7	939,2	998,0	2,69	36,43	60,7	26,7
265	1666,7	940,8	999,7	2,70	36,43	60,7	26,8
266	1666,7	942,5	1001,3	2,70	36,43	60,7	26,9
267	1666,7	944,2	1003,0	2,71	36,43	60,7	27,0
268	1666,7	945,8	1004,7	2,71	36,43	60,7	27,1
269	1666,7	947,5	1006,3	2,72	36,43	60,7	27,2
270	1666,7	949,2	1008,0	2,72	36,43	60,7	27,3
271	1666,7	950,8	1009,7	2,73	36,43	60,7	27,4
272	1666,7	952,5	1011,3	2,73	36,43	60,7	27,5
273	1666,7	954,2	1013,0	2,74	36,43	60,7	27,6
274	1666,7	955,8	1014,7	2,74	36,43	60,7	27,7
275	1666,7	957,5	1016,3	2,74	36,43	60,7	27,8
276	1666,7	959,2	1018,0	2,75	36,43	60,7	27,9
277	1666,7	960,8	1019,7	2,75	36,43	60,7	28,0
278	1666,7	962,5	1021,3	2,76	36,43	60,7	28,1
279	1666,7	964,2	1023,0	2,76	36,43	60,7	28,2
280	1666,7	965,8	1024,7	2,77	36,43	60,7	28,3
281	1666,7	967,5	1026,3	2,77	36,43	60,7	28,4

Tabela B.1 - Contribuição de cada uma das faixas da seção de concreto para seção retangular vazada

(conclusão)

Faixa nº	A_c (mm ²)	y_c (mm)	x (mm)	ε_c (‰)	σ_c (MPa)	R_c (kN)	M_{c1} (kNm)
282	1666,7	969,2	1028,0	2,78	36,43	60,7	28,5
283	1666,7	970,8	1029,7	2,78	36,43	60,7	28,6
284	1666,7	972,5	1031,3	2,78	36,43	60,7	28,7
285	1666,7	974,2	1033,0	2,79	36,43	60,7	28,8
286	1666,7	975,8	1034,7	2,79	36,43	60,7	28,9
287	1666,7	977,5	1036,3	2,80	36,43	60,7	29,0
288	1666,7	979,2	1038,0	2,80	36,43	60,7	29,1
289	1666,7	980,8	1039,7	2,81	36,43	60,7	29,2
290	1666,7	982,5	1041,3	2,81	36,43	60,7	29,3
291	1666,7	984,2	1043,0	2,82	36,43	60,7	29,4
292	1666,7	985,8	1044,7	2,82	36,43	60,7	29,5
293	1666,7	987,5	1046,3	2,83	36,43	60,7	29,6
294	1666,7	989,2	1048,0	2,83	36,43	60,7	29,7
295	1666,7	990,8	1049,7	2,83	36,43	60,7	29,8
296	1666,7	992,5	1051,3	2,84	36,43	60,7	29,9
297	1666,7	994,2	1053,0	2,84	36,43	60,7	30,0
298	1666,7	995,8	1054,7	2,85	36,43	60,7	30,1
299	1666,7	997,5	1056,3	2,85	36,43	60,7	30,2
300	1666,7	999,2	1058,0	2,86	36,43	60,7	30,3
						8791,6	1613,6

Fonte: O autor

A área de aço total é igual a 18720 mm², com 10 barras de armadura lateral, representando 10% da proporção A_{s1}/A_{s0} . Cada barra de armadura lateral tem 85,1 mm² (soma-se as barras de cada uma das almas, totalizando 170,2 mm² por camada) e cada faixa de A_{s0} tem 8511,3 mm².

Com a curvatura igual a $2,7 \times 10^{-3}$ e a posição da linha-neutra, calcula-se a deformação ε_s e a tensão (equações 2.5.1.8, 2.5.1.9 e 2.5.1.10) de cada uma das barras de aço assim como a tensão do concreto ocupado pela barra, a ser descontada. Do produto entre a área e a tensão da barra, encontra-se a força resistida por cada uma das barras. Do

produto desta força com a distância do C.G da barra até o C.G da seção transversal, tem-se o momento resistido pela barra.

Somando a contribuição de cada uma das barras, encontra-se a força e o momento resistido pela seção metálica. A tabela a seguir apresenta os dados de cada uma das barras da seção.

Tabela B.2 – Contribuição de cada uma das faixas da seção de aço para seção retangular vazada

Faixa nº	A_s (mm ²)	y_s (mm)	x (mm)	ϵ_s (‰)	σ_s (MPa)	σ_c (MPa)	R_s (kN)	M_{s1} (kNm)
1	8511,3	50,0	108,8	0,29	61,72	7,15	464,4	-209,0
2	170,2	131,8	190,7	0,51	108,11	12,14	16,3	-6,0
3	170,2	213,6	272,5	0,74	154,50	16,77	23,4	-6,7
4	170,2	295,5	354,3	0,96	200,89	21,02	30,6	-6,3
5	170,2	377,3	436,1	1,18	247,28	24,88	37,9	-4,6
6	170,2	459,1	517,9	1,40	293,67	28,31	45,2	-1,8
7	170,2	540,9	599,8	1,62	340,06	31,27	52,6	2,2
8	170,2	622,7	681,6	1,84	386,45	33,70	60,0	7,4
9	170,2	704,5	763,4	2,06	432,84	35,50	67,6	13,8
10	170,2	786,4	845,2	2,28	434,78	36,43	67,8	19,4
11	170,2	868,2	927,0	2,50	434,78	36,43	67,8	25,0
12	8511,3	950,0	1008,8	2,72	434,78	36,43	3390,5	1525,7
							4324,2	1359,0

Fonte: O autor

Somando os esforços resistentes das seções parciais, resultam os esforços resistentes da seção completa. $N_{Rd} = 8.791,6 \text{ kN} + 4.324,2 \text{ kN} = 13.115,8 \text{ kN}$ e $M_{Rd} = 1.613,6 \text{ kNm} + 1.359,0 \text{ kNm} = 2.972,6 \text{ kNm}$.

B.2 SEÇÃO CIRCULAR CHEIA

O exemplo a seguir utiliza-se dos mesmos dados da análise em 5.4.4 e 4.2.2, um pilar em balanço de seção circular cheia. Considera-se o $f_{ck} = 25$ MPa, o agregado graúdo considerado foi o basalto/diabásio ($\alpha_E = 1,2$), $\epsilon_{c2} = 2,00\%$ e $\epsilon_{cu} = 3,50\%$.

Nos carregamentos, considera-se $N_{sd} = 1.490$ kN, $M_{od} = 53,0$ kNm, $H_d = 20,0$ kN e $q_d = 10,0$ kN/m, com $M_{sd} = 446,3$ kNm.

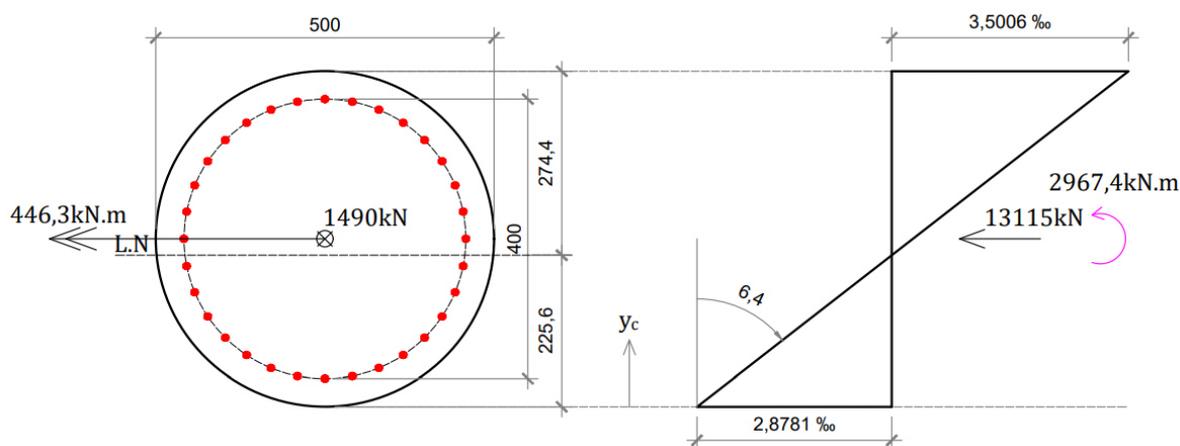
A seção é dividida em 300 faixas de altura constante, considera-se $R_e = 250$ mm, $R_s = 200$ mm, $d' = 50$ mm. Com altura fixa, obtém-se a largura de cada faixa a partir da Equação 3.2.1.8.

Além da área, cada faixa recebe um valor de y_c e de x , que representam a distância do C.G da faixa até a borda inferior da seção transversal e até a posição da linha neutra, respectivamente. A Figura 5.11 mostra os dados que foram utilizados nesta análise.

Com a curvatura igual a $6,4 \times 10^{-3}$ e a posição da linha-neutra, calcula-se a deformação ϵ_c e a tensão (equações 2.5.2.1.5, 2.5.2.1.6 e 2.5.2.1.7) de cada uma das faixas da seção de concreto. Do produto entre a área e a tensão da faixa, encontra-se a força resistida por cada uma das faixas. Do produto desta força com a distância do C.G da faixa até o C.G da seção transversal, tem-se o momento resistido pela faixa.

A Figura B.2 mostra a seção transversal com a distribuição das armaduras, posição da linha neutra e diagrama de deformações da seção retangular vazada.

Figura B.2 – Posição da linha neutra e diagrama de tensões da seção circular cheia



Fonte: O autor

Somando a contribuição de cada uma das faixas, encontra-se a força e o momento resistido pela seção de concreto. A tabela a seguir apresenta os dados de cada uma das faixas da seção.

Tabela B.3 – Esforços resistentes da seção de concreto para seção circular

(continua)

Faixa nº	A _c (mm ²)	y _c (mm)	x (mm)	ε _c (‰)	σ _c (MPa)	R _c (kN)	M _c (kNm)
1	68,0	0,8	224,9	-2,88	0,00	0,0	0,0
2	117,6	2,5	223,2	-2,86	0,00	0,0	0,0
3	151,5	4,2	221,5	-2,84	0,00	0,0	0,0
4	179,0	5,8	219,9	-2,81	0,00	0,0	0,0
5	202,6	7,5	218,2	-2,79	0,00	0,0	0,0
6	223,6	9,2	216,5	-2,77	0,00	0,0	0,0
7	242,7	10,8	214,9	-2,75	0,00	0,0	0,0
8	260,2	12,5	213,2	-2,73	0,00	0,0	0,0
9	276,5	14,2	211,5	-2,71	0,00	0,0	0,0
10	291,9	15,8	209,9	-2,69	0,00	0,0	0,0
11	306,3	17,5	208,2	-2,66	0,00	0,0	0,0
12	320,0	19,2	206,5	-2,64	0,00	0,0	0,0
13	333,0	20,8	204,9	-2,62	0,00	0,0	0,0
14	345,5	22,5	203,2	-2,60	0,00	0,0	0,0
15	357,4	24,2	201,5	-2,58	0,00	0,0	0,0
16	368,9	25,8	199,9	-2,56	0,00	0,0	0,0
17	380,0	27,5	198,2	-2,54	0,00	0,0	0,0
18	390,6	29,2	196,5	-2,52	0,00	0,0	0,0
19	400,9	30,8	194,9	-2,49	0,00	0,0	0,0
20	410,9	32,5	193,2	-2,47	0,00	0,0	0,0
21	420,5	34,2	191,5	-2,45	0,00	0,0	0,0
22	429,9	35,8	189,9	-2,43	0,00	0,0	0,0
23	439,0	37,5	188,2	-2,41	0,00	0,0	0,0
24	447,8	39,2	186,5	-2,39	0,00	0,0	0,0
25	456,4	40,8	184,9	-2,37	0,00	0,0	0,0
26	464,8	42,5	183,2	-2,34	0,00	0,0	0,0

Tabela B.3 – Esforços resistentes da seção de concreto para seção circular

(continuação)

Faixa nº	A _c (mm ²)	y _c (mm)	x (mm)	ε _c (‰)	σ _c (MPa)	R _c (kN)	M _c (kNm)
27	473,0	44,2	181,5	-2,32	0,00	0,0	0,0
28	480,9	45,8	179,9	-2,30	0,00	0,0	0,0
29	488,7	47,5	178,2	-2,28	0,00	0,0	0,0
30	496,3	49,2	176,5	-2,26	0,00	0,0	0,0
31	503,7	50,8	174,9	-2,24	0,00	0,0	0,0
32	510,9	52,5	173,2	-2,22	0,00	0,0	0,0
33	518,0	54,2	171,5	-2,20	0,00	0,0	0,0
34	524,9	55,8	169,9	-2,17	0,00	0,0	0,0
35	531,7	57,5	168,2	-2,15	0,00	0,0	0,0
36	538,3	59,2	166,5	-2,13	0,00	0,0	0,0
37	544,8	60,8	164,9	-2,11	0,00	0,0	0,0
38	551,2	62,5	163,2	-2,09	0,00	0,0	0,0
39	557,4	64,2	161,5	-2,07	0,00	0,0	0,0
40	563,5	65,8	159,9	-2,05	0,00	0,0	0,0
41	569,5	67,5	158,2	-2,02	0,00	0,0	0,0
42	575,4	69,2	156,5	-2,00	0,00	0,0	0,0
43	581,2	70,8	154,9	-1,98	0,00	0,0	0,0
44	586,8	72,5	153,2	-1,96	0,00	0,0	0,0
45	592,4	74,2	151,5	-1,94	0,00	0,0	0,0
46	597,8	75,8	149,9	-1,92	0,00	0,0	0,0
47	603,2	77,5	148,2	-1,90	0,00	0,0	0,0
48	608,4	79,2	146,5	-1,88	0,00	0,0	0,0
49	613,6	80,8	144,9	-1,85	0,00	0,0	0,0
50	618,6	82,5	143,2	-1,83	0,00	0,0	0,0
51	623,6	84,2	141,5	-1,81	0,00	0,0	0,0
52	628,5	85,8	139,9	-1,79	0,00	0,0	0,0
53	633,3	87,5	138,2	-1,77	0,00	0,0	0,0
54	638,0	89,2	136,5	-1,75	0,00	0,0	0,0
55	642,6	90,8	134,9	-1,73	0,00	0,0	0,0
56	647,2	92,5	133,2	-1,70	0,00	0,0	0,0
57	651,6	94,2	131,5	-1,68	0,00	0,0	0,0

Tabela B.3 – Esforços resistentes da seção de concreto para seção circular

(continuação)

Faixa nº	A _c (mm ²)	y _c (mm)	x (mm)	ε _c (‰)	σ _c (MPa)	R _c (kN)	M _c (kNm)
58	656,0	95,8	129,9	-1,66	0,00	0,0	0,0
59	660,3	97,5	128,2	-1,64	0,00	0,0	0,0
60	664,6	99,2	126,5	-1,62	0,00	0,0	0,0
61	668,7	100,8	124,9	-1,60	0,00	0,0	0,0
62	672,8	102,5	123,2	-1,58	0,00	0,0	0,0
63	676,9	104,2	121,5	-1,56	0,00	0,0	0,0
64	680,8	105,8	119,9	-1,53	0,00	0,0	0,0
65	684,7	107,5	118,2	-1,51	0,00	0,0	0,0
66	688,5	109,2	116,5	-1,49	0,00	0,0	0,0
67	692,3	110,8	114,9	-1,47	0,00	0,0	0,0
68	696,0	112,5	113,2	-1,45	0,00	0,0	0,0
69	699,6	114,2	111,5	-1,43	0,00	0,0	0,0
70	703,2	115,8	109,9	-1,41	0,00	0,0	0,0
71	706,7	117,5	108,2	-1,38	0,00	0,0	0,0
72	710,1	119,2	106,5	-1,36	0,00	0,0	0,0
73	713,5	120,8	104,9	-1,34	0,00	0,0	0,0
74	716,8	122,5	103,2	-1,32	0,00	0,0	0,0
75	720,1	124,2	101,5	-1,30	0,00	0,0	0,0
76	723,3	125,8	99,9	-1,28	0,00	0,0	0,0
77	726,4	127,5	98,2	-1,26	0,00	0,0	0,0
78	729,5	129,2	96,5	-1,24	0,00	0,0	0,0
79	732,6	130,8	94,9	-1,21	0,00	0,0	0,0
80	735,6	132,5	93,2	-1,19	0,00	0,0	0,0
81	738,5	134,2	91,5	-1,17	0,00	0,0	0,0
82	741,4	135,8	89,9	-1,15	0,00	0,0	0,0
83	744,2	137,5	88,2	-1,13	0,00	0,0	0,0
84	747,0	139,2	86,5	-1,11	0,00	0,0	0,0
85	749,7	140,8	84,9	-1,09	0,00	0,0	0,0
86	752,4	142,5	83,2	-1,06	0,00	0,0	0,0
87	755,0	144,2	81,5	-1,04	0,00	0,0	0,0
88	757,5	145,8	79,9	-1,02	0,00	0,0	0,0

Tabela B.3 – Esforços resistentes da seção de concreto para seção circular

(continuação)

Faixa nº	A _c (mm ²)	y _c (mm)	x (mm)	ε _c (‰)	σ _c (MPa)	R _c (kN)	M _c (kNm)
89	760,1	147,5	78,2	-1,00	0,00	0,0	0,0
90	762,5	149,2	76,5	-0,98	0,00	0,0	0,0
91	765,0	150,8	74,9	-0,96	0,00	0,0	0,0
92	767,3	152,5	73,2	-0,94	0,00	0,0	0,0
93	769,7	154,2	71,5	-0,92	0,00	0,0	0,0
94	772,0	155,8	69,9	-0,89	0,00	0,0	0,0
95	774,2	157,5	68,2	-0,87	0,00	0,0	0,0
96	776,4	159,2	66,5	-0,85	0,00	0,0	0,0
97	778,5	160,8	64,9	-0,83	0,00	0,0	0,0
98	780,6	162,5	63,2	-0,81	0,00	0,0	0,0
99	782,7	164,2	61,5	-0,79	0,00	0,0	0,0
100	784,7	165,8	59,9	-0,77	0,00	0,0	0,0
101	786,7	167,5	58,2	-0,74	0,00	0,0	0,0
102	788,6	169,2	56,5	-0,72	0,00	0,0	0,0
103	790,4	170,8	54,9	-0,70	0,00	0,0	0,0
104	792,3	172,5	53,2	-0,68	0,00	0,0	0,0
105	794,1	174,2	51,5	-0,66	0,00	0,0	0,0
106	795,8	175,8	49,9	-0,64	0,00	0,0	0,0
107	797,5	177,5	48,2	-0,62	0,00	0,0	0,0
108	799,2	179,2	46,5	-0,60	0,00	0,0	0,0
109	800,8	180,8	44,9	-0,57	0,00	0,0	0,0
110	802,4	182,5	43,2	-0,55	0,00	0,0	0,0
111	803,9	184,2	41,5	-0,53	0,00	0,0	0,0
112	805,4	185,8	39,9	-0,51	0,00	0,0	0,0
113	806,9	187,5	38,2	-0,49	0,00	0,0	0,0
114	808,3	189,2	36,5	-0,47	0,00	0,0	0,0
115	809,7	190,8	34,9	-0,45	0,00	0,0	0,0
116	811,0	192,5	33,2	-0,42	0,00	0,0	0,0
117	812,3	194,2	31,5	-0,40	0,00	0,0	0,0
118	813,5	195,8	29,9	-0,38	0,00	0,0	0,0
119	814,8	197,5	28,2	-0,36	0,00	0,0	0,0

Tabela B.3 – Esforços resistentes da seção de concreto para seção circular

(continuação)

Faixa nº	A _c (mm ²)	y _c (mm)	x (mm)	ε _c (‰)	σ _c (MPa)	R _c (kN)	M _c (kNm)
120	815,9	199,2	26,5	-0,34	0,00	0,0	0,0
121	817,1	200,8	24,9	-0,32	0,00	0,0	0,0
122	818,2	202,5	23,2	-0,30	0,00	0,0	0,0
123	819,2	204,2	21,5	-0,28	0,00	0,0	0,0
124	820,2	205,8	19,9	-0,25	0,00	0,0	0,0
125	821,2	207,5	18,2	-0,23	0,00	0,0	0,0
126	822,1	209,2	16,5	-0,21	0,00	0,0	0,0
127	823,0	210,8	14,9	-0,19	0,00	0,0	0,0
128	823,9	212,5	13,2	-0,17	0,00	0,0	0,0
129	824,7	214,2	11,5	-0,15	0,00	0,0	0,0
130	825,5	215,8	9,9	-0,13	0,00	0,0	0,0
131	826,3	217,5	8,2	-0,10	0,00	0,0	0,0
132	827,0	219,2	6,5	-0,08	0,00	0,0	0,0
133	827,6	220,8	4,9	-0,06	0,00	0,0	0,0
134	828,3	222,5	3,2	-0,04	0,00	0,0	0,0
135	828,9	224,2	1,5	-0,02	0,00	0,0	0,0
136	829,4	225,8	0,1	0,00	0,03	0,0	0,0
137	830,0	227,5	1,8	0,02	0,35	0,3	0,0
138	830,4	229,2	3,5	0,04	0,67	0,6	0,0
139	830,9	230,8	5,1	0,07	0,98	0,8	0,0
140	831,3	232,5	6,8	0,09	1,30	1,1	0,0
141	831,7	234,2	8,5	0,11	1,60	1,3	0,0
142	832,0	235,8	10,1	0,13	1,91	1,6	0,0
143	832,3	237,5	11,8	0,15	2,21	1,8	0,0
144	832,6	239,2	13,5	0,17	2,51	2,1	0,0
145	832,8	240,8	15,1	0,19	2,80	2,3	0,0
146	833,0	242,5	16,8	0,22	3,09	2,6	0,0
147	833,1	244,2	18,5	0,24	3,38	2,8	0,0
148	833,2	245,8	20,1	0,26	3,66	3,1	0,0
149	833,3	247,5	21,8	0,28	3,94	3,3	0,0
150	833,3	249,2	23,5	0,30	4,22	3,5	0,0

Tabela B.3 – Esforços resistentes da seção de concreto para seção circular

(continuação)

Faixa nº	A _c (mm ²)	y _c (mm)	x (mm)	ε _c (‰)	σ _c (MPa)	R _c (kN)	M _c (kNm)
151	833,3	250,8	25,1	0,32	4,49	3,7	0,0
152	833,3	252,5	26,8	0,34	4,76	4,0	0,0
153	833,2	254,2	28,5	0,36	5,03	4,2	0,0
154	833,1	255,8	30,1	0,39	5,29	4,4	0,0
155	833,0	257,5	31,8	0,41	5,55	4,6	0,0
156	832,8	259,2	33,5	0,43	5,81	4,8	0,0
157	832,6	260,8	35,1	0,45	6,06	5,0	0,1
158	832,3	262,5	36,8	0,47	6,31	5,3	0,1
159	832,0	264,2	38,5	0,49	6,56	5,5	0,1
160	831,7	265,8	40,1	0,51	6,80	5,7	0,1
161	831,3	267,5	41,8	0,54	7,04	5,8	0,1
162	830,9	269,2	43,5	0,56	7,27	6,0	0,1
163	830,4	270,8	45,1	0,58	7,50	6,2	0,1
164	830,0	272,5	46,8	0,60	7,73	6,4	0,1
165	829,4	274,2	48,5	0,62	7,96	6,6	0,2
166	828,9	275,8	50,1	0,64	8,18	6,8	0,2
167	828,3	277,5	51,8	0,66	8,40	7,0	0,2
168	827,6	279,2	53,5	0,68	8,61	7,1	0,2
169	827,0	280,8	55,1	0,71	8,82	7,3	0,2
170	826,3	282,5	56,8	0,73	9,03	7,5	0,2
171	825,5	284,2	58,5	0,75	9,24	7,6	0,3
172	824,7	285,8	60,1	0,77	9,44	7,8	0,3
173	823,9	287,5	61,8	0,79	9,63	7,9	0,3
174	823,0	289,2	63,5	0,81	9,83	8,1	0,3
175	822,1	290,8	65,1	0,83	10,02	8,2	0,3
176	821,2	292,5	66,8	0,86	10,21	8,4	0,4
177	820,2	294,2	68,5	0,88	10,39	8,5	0,4
178	819,2	295,8	70,1	0,90	10,57	8,7	0,4
179	818,2	297,5	71,8	0,92	10,75	8,8	0,4
180	817,1	299,2	73,5	0,94	10,92	8,9	0,4
181	815,9	300,8	75,1	0,96	11,09	9,0	0,5

Tabela B.3 – Esforços resistentes da seção de concreto para seção circular

(continuação)

Faixa nº	A _c (mm ²)	y _c (mm)	x (mm)	ε _c (‰)	σ _c (MPa)	R _c (kN)	M _c (kNm)
182	814,8	302,5	76,8	0,98	11,26	9,2	0,5
183	813,5	304,2	78,5	1,00	11,42	9,3	0,5
184	812,3	305,8	80,1	1,03	11,58	9,4	0,5
185	811,0	307,5	81,8	1,05	11,73	9,5	0,5
187	808,3	310,8	85,1	1,09	12,04	9,7	0,6
188	806,9	312,5	86,8	1,11	12,18	9,8	0,6
189	805,4	314,2	88,5	1,13	12,32	9,9	0,6
190	803,9	315,8	90,1	1,15	12,46	10,0	0,7
191	802,4	317,5	91,8	1,18	12,60	10,1	0,7
192	800,8	319,2	93,5	1,20	12,73	10,2	0,7
193	799,2	320,8	95,1	1,22	12,86	10,3	0,7
194	797,5	322,5	96,8	1,24	12,98	10,4	0,8
195	795,8	324,2	98,5	1,26	13,10	10,4	0,8
196	794,1	325,8	100,1	1,28	13,22	10,5	0,8
197	792,3	327,5	101,8	1,30	13,34	10,6	0,8
198	790,4	329,2	103,5	1,32	13,45	10,6	0,8
199	788,6	330,8	105,1	1,35	13,56	10,7	0,9
200	786,7	332,5	106,8	1,37	13,66	10,7	0,9
201	784,7	334,2	108,5	1,39	13,76	10,8	0,9
202	782,7	335,8	110,1	1,41	13,86	10,8	0,9
203	780,6	337,5	111,8	1,43	13,95	10,9	1,0
204	778,5	339,2	113,5	1,45	14,04	10,9	1,0
205	776,4	340,8	115,1	1,47	14,13	11,0	1,0
206	774,2	342,5	116,8	1,50	14,21	11,0	1,0
207	772,0	344,2	118,5	1,52	14,29	11,0	1,0
208	769,7	345,8	120,1	1,54	14,37	11,1	1,1
209	767,3	347,5	121,8	1,56	14,44	11,1	1,1
210	765,0	349,2	123,5	1,58	14,51	11,1	1,1
211	762,5	350,8	125,1	1,60	14,58	11,1	1,1
212	760,1	352,5	126,8	1,62	14,64	11,1	1,1
213	757,5	354,2	128,5	1,64	14,70	11,1	1,2

Tabela B.3 – Esforços resistentes da seção de concreto para seção circular

(continuação)

Faixa nº	A _c (mm ²)	y _c (mm)	x (mm)	ε _c (‰)	σ _c (MPa)	R _c (kN)	M _c (kNm)
214	755,0	355,8	130,1	1,67	14,76	11,1	1,2
215	752,4	357,5	131,8	1,69	14,81	11,1	1,2
216	749,7	359,2	133,5	1,71	14,86	11,1	1,2
217	747,0	360,8	135,1	1,73	14,90	11,1	1,2
218	744,2	362,5	136,8	1,75	14,94	11,1	1,3
219	741,4	364,2	138,5	1,77	14,98	11,1	1,3
220	738,5	365,8	140,1	1,79	15,02	11,1	1,3
221	735,6	367,5	141,8	1,82	15,05	11,1	1,3
222	732,6	369,2	143,5	1,84	15,08	11,0	1,3
223	729,5	370,8	145,1	1,86	15,10	11,0	1,3
224	726,4	372,5	146,8	1,88	15,12	11,0	1,3
225	723,3	374,2	148,5	1,90	15,14	11,0	1,4
226	720,1	375,8	150,1	1,92	15,16	10,9	1,4
227	716,8	377,5	151,8	1,94	15,17	10,9	1,4
228	713,5	379,2	153,5	1,96	15,17	10,8	1,4
229	710,1	380,8	155,1	1,99	15,18	10,8	1,4
230	706,7	382,5	156,8	2,01	15,18	10,7	1,4
231	703,2	384,2	158,5	2,03	15,18	10,7	1,4
232	699,6	385,8	160,1	2,05	15,18	10,6	1,4
233	696,0	387,5	161,8	2,07	15,18	10,6	1,5
234	692,3	389,2	163,5	2,09	15,18	10,5	1,5
235	688,5	390,8	165,1	2,11	15,18	10,5	1,5
236	684,7	392,5	166,8	2,14	15,18	10,4	1,5
237	680,8	394,2	168,5	2,16	15,18	10,3	1,5
238	676,9	395,8	170,1	2,18	15,18	10,3	1,5
239	672,8	397,5	171,8	2,20	15,18	10,2	1,5
240	668,7	399,2	173,5	2,22	15,18	10,2	1,5
241	664,6	400,8	175,1	2,24	15,18	10,1	1,5
242	660,3	402,5	176,8	2,26	15,18	10,0	1,5
243	656,0	404,2	178,5	2,28	15,18	10,0	1,5
244	651,6	405,8	180,1	2,31	15,18	9,9	1,5

Tabela B.3 – Esforços resistentes da seção de concreto para seção circular

(continuação)

Faixa nº	A _c (mm ²)	y _c (mm)	x (mm)	ε _c (‰)	σ _c (MPa)	R _c (kN)	M _c (kNm)
245	647,2	407,5	181,8	2,33	15,18	9,8	1,5
246	642,6	409,2	183,5	2,35	15,18	9,8	1,6
247	638,0	410,8	185,1	2,37	15,18	9,7	1,6
248	633,3	412,5	186,8	2,39	15,18	9,6	1,6
249	628,5	414,2	188,5	2,41	15,18	9,5	1,6
250	623,6	415,8	190,1	2,43	15,18	9,5	1,6
251	618,6	417,5	191,8	2,46	15,18	9,4	1,6
252	613,6	419,2	193,5	2,48	15,18	9,3	1,6
253	608,4	420,8	195,1	2,50	15,18	9,2	1,6
254	603,2	422,5	196,8	2,52	15,18	9,2	1,6
255	597,8	424,2	198,5	2,54	15,18	9,1	1,6
256	592,4	425,8	200,1	2,56	15,18	9,0	1,6
257	586,8	427,5	201,8	2,58	15,18	8,9	1,6
258	581,2	429,2	203,5	2,60	15,18	8,8	1,6
259	575,4	430,8	205,1	2,63	15,18	8,7	1,6
260	569,5	432,5	206,8	2,65	15,18	8,6	1,6
261	563,5	434,2	208,5	2,67	15,18	8,6	1,6
262	557,4	435,8	210,1	2,69	15,18	8,5	1,6
263	551,2	437,5	211,8	2,71	15,18	8,4	1,6
264	544,8	439,2	213,5	2,73	15,18	8,3	1,6
265	538,3	440,8	215,1	2,75	15,18	8,2	1,6
266	531,7	442,5	216,8	2,78	15,18	8,1	1,6
267	524,9	444,2	218,5	2,80	15,18	8,0	1,5
268	518,0	445,8	220,1	2,82	15,18	7,9	1,5
269	510,9	447,5	221,8	2,84	15,18	7,8	1,5
270	503,7	449,2	223,5	2,86	15,18	7,6	1,5
271	496,3	450,8	225,1	2,88	15,18	7,5	1,5
272	488,7	452,5	226,8	2,90	15,18	7,4	1,5
273	480,9	454,2	228,5	2,92	15,18	7,3	1,5
274	473,0	455,8	230,1	2,95	15,18	7,2	1,5
275	464,8	457,5	231,8	2,97	15,18	7,1	1,5

Tabela B.3 – Esforços resistentes da seção de concreto para seção circular

(conclusão)

Faixa nº	A _c (mm ²)	y _c (mm)	x (mm)	ε _c (‰)	σ _c (MPa)	R _c (kN)	M _c (kNm)
276	456,4	459,2	233,5	2,99	15,18	6,9	1,4
277	447,8	460,8	235,1	3,01	15,18	6,8	1,4
278	439,0	462,5	236,8	3,03	15,18	6,7	1,4
279	429,9	464,2	238,5	3,05	15,18	6,5	1,4
280	420,5	465,8	240,1	3,07	15,18	6,4	1,4
281	410,9	467,5	241,8	3,10	15,18	6,2	1,4
282	400,9	469,2	243,5	3,12	15,18	6,1	1,3
283	390,6	470,8	245,1	3,14	15,18	5,9	1,3
284	380,0	472,5	246,8	3,16	15,18	5,8	1,3
285	368,9	474,2	248,5	3,18	15,18	5,6	1,3
286	357,4	475,8	250,1	3,20	15,18	5,4	1,2
287	345,5	477,5	251,8	3,22	15,18	5,2	1,2
288	333,0	479,2	253,5	3,24	15,18	5,1	1,2
289	320,0	480,8	255,1	3,27	15,18	4,9	1,1
290	306,3	482,5	256,8	3,29	15,18	4,6	1,1
291	291,9	484,2	258,5	3,31	15,18	4,4	1,0
292	276,5	485,8	260,1	3,33	15,18	4,2	1,0
293	260,2	487,5	261,8	3,35	15,18	3,9	0,9
294	242,7	489,2	263,5	3,37	15,18	3,7	0,9
295	223,6	490,8	265,1	3,39	15,18	3,4	0,8
296	202,6	492,5	266,8	3,42	15,18	3,1	0,7
297	179,0	494,2	268,5	3,44	15,18	2,7	0,7
298	151,5	495,8	270,1	3,46	15,18	2,3	0,6
299	117,6	497,5	271,8	3,48	15,18	1,8	0,4
300	68,0	499,2	273,5	3,50	15,18	1,0	0,3
						1282,9	150,3

Fonte: O autor

A área de aço total é igual a 6333 mm², dividida em 32 barras, onde cada barra tem área igual a 197,9 mm². Considera-se metade da seção metálica e multiplica-se os esforços resistentes por dois.

Com a curvatura igual a $6,4 \times 10^{-3}$ e a posição da linha-neutra, calcula-se a deformação ε_s e a tensão (equações 2.5.1.8, 2.5.1.9 e 2.5.1.10) de cada uma das barras de aço assim como a tensão do concreto ocupado pela barra, a ser descontada. Do produto entre a área e a tensão da barra, encontra-se a força resistida por cada uma das barras. Do produto desta força com a distância do C.G da barra até o C.G da seção transversal, tem-se o momento resistido pela barra.

Somando a contribuição de cada uma das barras, encontra-se a força e o momento resistido pela seção metálica. A tabela a seguir apresenta os dados de cada uma das barras da seção.

Tabela B.4 – Esforços resistentes da seção de aço

Faixa nº	A_s (mm ²)	y_s (mm)	x (mm)	ε_s (‰)	σ_s (MPa)	σ_c (MPa)	R_s (kN)	M_{s1} (kNm)
1	197,9	51,0	174,7	-2,24	-434,78	0,00	-172,1	34,3
2	197,9	58,6	167,1	-2,14	-434,78	0,00	-172,1	32,9
3	197,9	73,6	152,1	-1,95	-408,76	0,00	-161,8	28,5
4	197,9	95,4	130,3	-1,67	-350,21	0,00	-138,6	21,4
5	197,9	123,1	102,6	-1,31	-275,69	0,00	-109,1	13,8
6	197,9	155,7	70,0	-0,90	-188,06	0,00	-74,4	7,0
7	197,9	191,9	33,7	-0,43	-90,70	0,00	-35,9	2,1
8	197,9	230,4	4,7	0,06	12,67	0,90	4,7	0,1
9	197,9	269,6	43,9	0,56	118,06	7,33	43,8	0,9
10	197,9	308,1	82,4	1,05	221,42	11,79	83,0	4,8
11	197,9	344,3	118,6	1,52	318,78	14,30	120,5	11,4
12	197,9	376,9	151,2	1,94	406,41	15,16	154,9	19,7
13	197,9	404,6	178,9	2,29	434,78	15,18	166,1	25,7
14	197,9	426,4	200,7	2,57	434,78	15,18	166,1	29,3
15	197,9	441,4	215,7	2,76	434,78	15,18	166,1	31,8
16	197,9	449,0	223,4	2,86	434,78	15,18	166,1	33,1
							207,1	296,6

Fonte: O autor

Somando os esforços resistentes das seções parciais, resultam os esforços resistentes da seção completa. $N_{Rd} = 1.282,9 \text{ kN} + 207,1 \text{ kN} = 1.490,0 \text{ kN}$ e $M_{Rd} = 150,3 \text{ kNm} + 296,6 \text{ kNm} = 446,9 \text{ kNm}$.