

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

PAULO HENRIQUE DE FREITAS MEIRELLES

FORMULAÇÃO ALTERNATIVA PARA
POROELASTICIDADE DINÂMICA POR ACOPLAMENTO
PARTICIONADO FORTE ENTRE PROBLEMAS FÍSICOS

Maringá

2023

PAULO HENRIQUE DE FREITAS MEIRELLES

**FORMULAÇÃO ALTERNATIVA PARA
POROELASTICIDADE DINÂMICA POR ACOPLAMENTO
PARTICIONADO FORTE ENTRE PROBLEMAS FÍSICOS**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá.

Orientador: Prof. Dr. Wilson Wesley Wutzow

Maringá

2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

M514f

Meirelles, Paulo Henrique de Freitas

Formulação alternativa para poroelasticidade dinâmica por acoplamento particionado forte entre problemas físicos / Paulo Henrique de Freitas Meirelles. -- Maringá, PR, 2023. 165 f.: il. color., figs.

Orientador: Prof. Dr. Wilson Wesley Wutzow.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2023.

1. Poroelasticidade. 2. Acoplamento particionado forte. 3. Teoria das misturas. 4. Navier-Stokes-Brinkman. 5. Método dos elementos finito. I. Wutzow, Wilson Wesley, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

CDD 23.ed. 624

PAULO HENRIQUE DE FREITAS MEIRELLES

**FORMULAÇÃO ALTERNATIVA PARA
POROELASTICIDADE DINÂMICA POR ACOPLAMENTO
PARTICIONADO FORTE ENTRE PROBLEMAS FÍSICOS**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá.

Aprovada em 25 / 09 / 2023

Comissão Julgadora:

Documento assinado digitalmente
 **WILSON WESLEY WUTZOW**
Data: 23/10/2023 09:24:49-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Wilson Wesley Wutzow

Universidade Estadual de Maringá (UEM) - Campus Maringá

Documento assinado digitalmente
 **LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA**
Data: 23/10/2023 08:56:36-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) - Campus Apucarana

Documento assinado digitalmente
 **RODOLFO ANDRE KUCHE SANCHES**
Data: 20/10/2023 14:35:43-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

Universidade de São Paulo (USP) - Campus São Carlos

Documento assinado digitalmente
 **JEFERSON WILIAN DOSSA FERNANDES**
Data: 20/10/2023 11:33:10-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jeferson Wilian Dossa Fernandes
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

**Maringá
2023**

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me guiar e amparar durante todo esse tempo. Agradeço a minha mãe Maria Madalena e pai Luis Henrique por sempre me apoiarem em minhas decisões e estarem muitas vezes presentes mesmo que longe. Aos meus irmãos Lyvia e Guilherme, pela ajuda e suporte.

Obrigado à minha namorada Jullia Clara, por estar sempre presente, aonde quer que eu estivesse, por tornar meus dias mais leves e felizes, por ter me amparado e não me deixado desistir.

Grato aos meus amigos do Departamento do PCV, pessoas incríveis que tive a oportunidade de conviver, especialmente Everton Consoni, Karolinne Miotto e André Vitor, por tornarem essa caminhada leve. Em meio a tantas dificuldades e desafios, vocês com certeza tornaram meus dias melhores e mais divertidos.

Agradeço ao meu querido orientador Wilson Wesley, por toda paciência ao me passar seus conhecimentos, por nunca hesitar em me ajudar a cada dificuldade. Obrigado por toda atenção, seus ensinamentos foram essenciais para minha vida e sem dúvidas foi minha melhor escolha durante o mestrado.

Gostaria de agradecer a todos os meus professores e aos membros do meu comitê: Professor Luiz A. Farani de Souza, Professor Rodolfo A.K. Sanches e Professor Jeferson W. D. Fernandes pelos seus valiosos comentários e sugestões durante a defesa. Em especial aos professores Rodolfo e Jeferson, pela ajuda em todos os momentos essenciais em que precisei durante a caminhada do mestrado.

Ao PCV, pela infraestrutura concedida. Em especial aos seus funcionários, que, sempre solícitos, me auxiliaram quando precisei. A todos que me ajudaram ao longo dessa jornada. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Nenhum problema pode ser resolvido pelo mesmo grau de consciência que o gerou."

Albert Einstein

RESUMO

MEIRELLES, P. H. F. **Formulação alternativa para poroelasticidade dinâmica por acoplamento particionado forte de problemas físicos**. 2023. 163p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2023.

A mecânica dos meios porosos é atrelada a inúmeras aplicações, sendo estas vinculadas à geomecânica, biomecânica, engenharia de petróleo e engenharia sísmica, por exemplo. Neste trabalho, é apresentada uma abordagem computacional para meios porosos saturados, baseada na teoria das misturas (*Mixture Theory*). A metodologia é realizada por meio de um acoplamento particionado forte entre dois problemas físicos assumidos intrinsecamente incompressíveis com permeabilidade e porosidade constantes, pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) em sua formulação posicional para a fase sólida, empregando o modelo de *Saint Venant–Kirchhoff* com descrição Lagrangiana, e equações de *Navier-Stokes-Brinkman* com descrição ALE para a fase fluida. As equações que governam o comportamento dos meios poroelásticos saturado são obtidas através da aplicação das leis de conservação da quantidade e da massa a cada fase e à mistura sólido-fluido. É enfatizada a possibilidade de utilização de leis constitutivas diferentes a serem incorporadas neste tipo de modelo da matriz do domínio poroso. Esse tipo de acoplamento inclui tensões mecânicas adicionais na fase sólida de acordo com o estado de pressão do fluido segundo a tensão efetiva de *Terzaghi* e variação da resistência ao escoamento pela variação de velocidade das fases. Uma das principais contribuições deste trabalho consiste na apresentação de uma formulação adaptada para meios porosos baseada em posições para a fase sólida, podendo essa ser chamada de formulação $\mathbf{y}^s \mathbf{v}^f p^f$, suas variáveis principais, para uma análise não linear geométrica. No presente trabalho, inicialmente é validado um algoritmo computacional desenvolvido baseado no MEF posicional. A posteriori, são apresentados e conceitualmente verificados exemplos atrelados a poromecânica e acoplamento multifísico com a presente formulação, comparados a referências presentes na literatura. A partir dos bons resultados encontrados, considera-se uma boa e nova alternativa para problemas de meios porosos saturados.

Palavras-chave: *Poroelasticidade. Teoria das Misturas. Método dos Elementos Finitos. Formulação Posicional. Navier-Stokes-Brinkman. Acoplamento particionado forte.*

ABSTRACT

MEIRELLES, P. H. F. **Alternative formulation for dynamic poroelasticity by strong partitioned coupling of physical problems**. 2023. 163p. Dissertation (Master) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2023.

Porous media mechanics is linked to numerous applications, including geomechanics, biomechanics, petroleum engineering and earthquake engineering, for example. In this work, a computational approach for saturated porous media based on mixture theory. The methodology is carried out by means of a strong partitioned coupling between two physical problems assumed to be intrinsically incompressible with constant permeability and porosity, using the Finite Element Method (FEM) in its positional formulation for the solid phase, employing the Saint Venant-Kirchhoff model with Lagrangian description, and the Navier-Stokes-Brinkman equations with ALE description for the fluid phase. The equations governing the behavior of saturated poroelastic media are obtained by applying the laws of conservation of quantity and mass to each phase and to the solid-fluid mixture. The possibility of using different constitutive laws to be incorporated in this type of model of the porous domain matrix is emphasized. This type of coupling includes additional mechanical stresses in the solid phase according to the pressure state of the fluid according to the Terzaghi effective stress and variation of the flow resistance by the velocity variation of the phases. One of the main contributions of this work is the presentation of an adapted formulation for porous media based on positions for the solid phase, which can be called the formulation $y^s v^f p^f$, its main variables, for a geometric nonlinear analysis. This work initially validates a computational algorithm developed based on positional FEM. Subsequently, examples related to poromechanics and multiphysics coupling are presented and conceptually verified with this formulation, compared to references in the literature. From the good results found, it is considered a good and new alternative for saturated porous media problems.

Keywords: *Poroelasticity. Theory of Mixtures. Finite Element Method. Positional formulation. Navier-Stokes-Brinkman. Strong partitioned coupling.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Imagens 3D ($400 \mu\text{m}^3$) reconstruídas para amostra de cerâmica referente às frações volumétricas das fases; a) fase sólida; e b) fase fluida.	30
Figura 3.1 – Equilíbrio entre configuração inicial e deformada.	48
Figura 3.2 – Mudança de configuração em um cubo infinitesimal.	51
Figura 3.3 – Estado de tensões em elemento infinitesimal.	52
Figura 3.4 – Equilíbrio de tensões na direção y_1	53
Figura 3.5 – Equilíbrio em área de corpo seccionado.	55
Figura 4.1 – Mapeamento das posições nodais para o elemento finito triangular	62
Figura 4.2 – Elementos finitos triangulares bidimensionais	63
Figura 4.3 – Processo iterativo e incremental de Newton-Raphson	70
Figura 4.4 – Viga esbelta.	72
Figura 4.5 – Deslocamentos em viga esbelta.	73
Figura 4.6 – Campo de deslocamentos horizontais e verticais em viga esbelta.	74
Figura 4.7 – Parâmetros em função do raio espectral para mecânica dos sólidos.	79
Figura 4.8 – Integração temporal via α -Generalizado para mecânica dos sólidos.	79
Figura 4.9 – Viga engastada com carregamento distribuído.	81
Figura 4.10–Deslocamento vertical relativo da extremidade (<i>Newmark-β</i>).	82
Figura 4.11–Deslocamento vertical relativo da extremidade - α -Generalizado.	82
Figura 4.12–Viga bi-engastada.	83
Figura 4.13–Deslocamento vertical no centro da viga bi-engastada.	84
Figura 4.14–Viga engastada em formato de arco elítico.	85
Figura 4.15–Discretização arco elítico.	85
Figura 4.16–Configurações deformadas em arco elítico.	85
Figura 4.17–Deslocamento vertical do arco elítico.	86
Figura 5.1 – Fluxo mássico em um elemento infinitesimal.	90
Figura 5.2 – Forças atuantes em um elemento infinitesimal.	91
Figura 5.3 – Quantidade de movimento e sua convecção.	92
Figura 5.4 – Configurações e função mudança de configuração.	94
Figura 5.5 – Elementos finitos estáveis de Taylor-Hood	96
Figura 5.6 – Parâmetros em função do raio espectral para mecânica dos fluidos.	99
Figura 5.7 – Integração temporal via α -Generalizado para mecânica dos fluidos.	99
Figura 6.1 – Idealização microscópica do meio poroso.	101
Figura 6.2 – Representação microescala de Interação Fluido Estrutura.	102
Figura 6.3 – Processo de homogeneização de fases para domínio poroso bifásico.	103
Figura 6.4 – Configuração deformada macroscópica do domínio poroso incompressível.	105
Figura 6.5 – Configuração deformada macroscópica de cada fase.	106

Figura 6.6 – Velocidades em microescala.	108
Figura 6.7 – Efeito da tortuosidade na microescala.	111
Figura 6.8 – Interação local específica de volume entre fases.	113
Figura 6.9 – Diagrama de Tonti para uma abordagem de problema poroelástico.	116
Figura 6.10–Sobreposição de domínios com malhas sobrepostas.	117
Figura 6.11–Esquema particionado forte.	117
Figura 6.12–Esquema da coluna 1D de solo com carregamento no topo.	120
Figura 6.13–Malha Delaunay exemplo poroso 1.	120
Figura 6.14–Perfil de carga instantânea constante.	121
Figura 6.15–Deslocamento vertical do ponto A com pulso constante.	121
Figura 6.16–Campo de deslocamento da fase sólida com $\rho_\infty = 0, 1$	122
Figura 6.17–Avanço temporal σ_2^s e p^f com $\rho_\infty = 0, 1$ para pulso constante.	123
Figura 6.18–Avanço temporal de $(\mathbf{v}^s = \dot{\mathbf{y}}^s)$ e a \mathbf{v}^f com $\rho_\infty = 0, 1$ para pulso constante no ponto A.	123
Figura 6.19–Perfil de carga instantânea cossenoidal.	124
Figura 6.20–Deslocamento vertical do ponto A com pulso cossenoidal.	125
Figura 6.21–Campo de deslocamento da fase sólida com $\rho_\infty = 0, 1$ para pulso cossenoidal.	125
Figura 6.22–Avanço temporal de σ_2^s e p^f com $\rho_\infty = 0, 1$ para pulso cossenoidal.	126
Figura 6.23–Avanço temporal de $(\mathbf{v}^s = \dot{\mathbf{y}}^s)$ e a \mathbf{v}^f com $\rho_\infty = 0, 1$ para pulso cossenoidal no ponto A.	126
Figura 6.24–Esquema de problema 2D de solo com carregamento no topo.	128
Figura 6.25–Malhas <i>Delaunay</i>	129
Figura 6.26–Perfil de carga instantânea senoidal em problema 2D.	129
Figura 6.27–Campo de deslocamentos horizontais da matriz sólida (ML1 - $\rho_\infty = 0, 6$).	130
Figura 6.28–Campo de deslocamentos verticais da matriz sólida (ML1 - $\rho_\infty = 0, 6$).	130
Figura 6.29–Campo de magnitude de deslocamentos da matriz sólida (ML1 - $\rho_\infty = 0, 6$).	131
Figura 6.30–Campo de pressão fluída nos poros (ML1 - $\rho_\infty = 0, 6$).	131
Figura 6.31–Relação entre deslocamentos para a matriz sólida no ponto A.	132
Figura 6.32–Avanço temporal da pressão (p^f) no ponto B.	133
Figura 6.33–Velocidades na direção 1 para as fases no ponto B.	134
Figura 6.34–Velocidades na direção 2 para as fases no ponto B.	135
Figura 6.35–Esquema de canal com filtro com esbelto.	136
Figura 6.36–Malha Delaunay para canal com filtro polimérico.	137
Figura 6.37–Campo de pressão (p^f) em regime estacionário ($t = 0,0025$ seg).	137
Figura 6.38–Pressão (p^f) em regime estacionário ao longo do canal ($t = 0,0025$ seg).	138
Figura 6.39–Campo de deslocamento horizontal (\mathbf{u}_1^s) do sólido e malha (\mathbf{u}_1^m) Lagrangiana.	138
Figura 6.40–Campo de deslocamento vertical (\mathbf{u}_2^s) do sólido e malha (\mathbf{u}_2^m) Lagrangiana.	139
Figura 6.41–Deslocamento horizontal (\mathbf{u}_1^s) do ponto A do filtro.	139
Figura 6.42–Avanço temporal da pressão (p^f) nos pontos A e B.	140

Figura 6.43–Avanço temporal de $(\mathbf{v}^s = \dot{\mathbf{y}}^{s,m})$ e a \mathbf{v}^f com $\rho_\infty = 0,5$ no ponto A do filtro poroso. 141

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Alguns métodos da família de Newmark.	76
Tabela 2 – Faixa de permeabilidade e porosidade de diferentes materiais.	111
Tabela 3 – Parâmetros materiais da coluna porosa.	120
Tabela 4 – Parâmetros materiais do domínio 2D poroso.	127
Tabela 5 – Parâmetros materiais do canal 2D com filtro poroso.	137

LISTA DE SÍMBOLOS

Nesta seção são apresentados os principais símbolos matemáticos, operadores e variáveis utilizados neste trabalho. Os símbolos em **negrito** denotam grandezas vetoriais ou tensoriais, minúsculo para vetoriais e maiúscula para tensoriais, enquanto os escritos em estilo de formatação normal ou *itálico* representam grandezas escalares. O superíndice indica a fase al qual a notação esta referenciada. Para os demais símbolos omissos estão devidamente apresentados ao longo do texto.

SÍMBOLOS E OPERAÇÕES MATEMÁTICAS

\cdot	Produto interno;
\otimes	Produto vetorial;
:	Contração de segunda ordem;
\cup	União;
\cap	Intersecção;
\sum	Somatório;
$\overline{(\bullet)}$	Quantidade média = $\frac{1}{V_0} \int_{V^\pi} (\bullet) dV^\pi$;
$\nabla(\bullet)$	Operador gradiente = $\frac{\partial(\bullet)_i}{\partial x_j}$;
$\nabla \cdot (\bullet)$	Operador divergente = $\frac{\partial(\bullet)_i}{\partial x_i}$;
$\nabla^2(\bullet)$	Operador Laplaciano = $\nabla \cdot \nabla(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)_i}{\partial x_i^2}$;
$\frac{D(\bullet)}{Dt}$	Derivada material ou substancial de um campo escalar ou vetorial = $\frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\bullet)$;
I	Tensor identidade;
δ_{ij}	Delta de Kronecker;

CAPÍTULO 3 - MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Ω_1	Domínio computacional de um sólido na configuração atual;
Ω_0	Domínio computacional de um sólido na configuração inicial;
Γ_t	Contorno do domínio computacional de um sólido em instante de tempo arbitrário t ;
\mathbf{x}	Coordenadas de um ponto arbitrário na configuração inicial (Lagrangiana);
\mathbf{y}	Coordenadas de um ponto arbitrário na configuração atual (Euleriana);
J	Jacobiano da transformação;
t	Instante de tempo arbitrário t ;
$\rho = \rho^s$	Massa específica do sólido;
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões de Cauchy (atual);
\mathbf{S}	Tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (inicial);
\mathbf{E}	Tensor de deformações de Green-Lagrange;
$\boldsymbol{\varepsilon}(\bullet)$	Tensor taxa de deformação de um campo escalar ou vetorial, $\boldsymbol{\varepsilon}(\bullet) = \left(\frac{1}{2}\right) [\nabla(\bullet) + (\nabla(\bullet))^T]$;
$\nu = \nu^s$	Coefficiente de poisson;
G	Módulo de elasticidade transversal;
λ	Constante de Lamé;
\mathbf{b}	Forças de volume;
$\dot{\mathbf{y}}$	Vetor de velocidade;
$\ddot{\mathbf{y}}$	Vetor de aceleração.

CAPÍTULO 4 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

\mathbf{g}	Vetor de resíduos;
\mathbf{f}	Vetor de forças nodais;
$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}$	Vetor de forças de superfície;
$\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}$	Vetor de forças de volume;
\mathbf{H}	Matriz Hessiana (Matriz tangente consistente);

\mathbf{H}^{est}	Matriz Hessiana estática (associada a energia de deformação);
\mathbf{M}	Matriz de massa;
\mathbf{C}	Matriz de amortecimento;
$\dot{\mathbf{y}}_t$	Vetor de velocidade em instante de tempo t ;
$\ddot{\mathbf{y}}_t$	Vetor de aceleração em instante de tempo t ;
Δt	Tamanho do passo de tempo;
\mathbf{q}_t	Vetor de contribuição dinâmica em instante de tempo t ;
\mathbf{r}_t	Vetor de contribuição dinâmica em instante de tempo t ;
β	Parâmetro arbitrário do integrador temporal;
γ	Parâmetro arbitrário de integrador temporal;
α_m	Parâmetro arbitrário do integrador temporal α -generalizado;
α_f	Parâmetro arbitrário do integrador temporal α -generalizado;
ρ_∞	Raio espectral do integrador temporal α -generalizado.

CAPÍTULO 5 - MECÂNICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

$\boldsymbol{\sigma}^f$	Tensor de tensões de Cauchy da fase fluida (atual);
p^f	Pressão;
\mathbf{v}^f	Vetor velocidade;
\mathbf{v}^m	Vetor velocidade da malha (Lagrangiana atualizada);
μ^f	Viscosidade dinâmica;
ν^f	Viscosidade cinemática;
ϕ^f	Porosidade fluida;
ρ^f	Massa específica;
\mathbf{b}^f	Vetor de forças de volume;
k^f	Permeabilidade isotrópica;
Ψ	Função teste da equação da quantidade de movimento;
ψ	Função teste da equação da continuidade;

n_{el}	Número de elementos finitos da discretização;
\mathbf{h}	Forças de superfície;
τ_{SUPG}	Parâmetro de estabilização (<i>Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin</i>);
τ_{PSPG}	Parâmetro de estabilização (<i>Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin</i>);
ν_{LSIC}	Parâmetro de estabilização (<i>Least-Squares on the Incompressibility Constraint</i>);
\mathbf{r}_M	Vetor resíduo da equação da quantidade de movimento;
r_C	Vetor resíduo da equação da quantidade da continuidade.

CAPÍTULO 6 - MECÂNICA DOS MEIOS POROSOS SATURADOS

η^f	Porosidade Euleriana;
ϕ^f	Porosidade Lagrangiana;
\mathbf{d}^s	Vetor de deslocamentos;
\mathbf{w}	Vetor de velocidade de relação entre fases;
\mathbf{v}^d	Vetor de velocidade de Darcy;
$\bar{\mathbf{v}}^f$	Vetor de velocidade média do fluido;
α_b	Coefficiente de Biot;
\underline{K}	<i>Bulk Modulus</i> ;
\underline{K}^u	<i>Bulk Modulus</i> não drenado (<i>jacket</i>);
\underline{K}^d	<i>Bulk Modulus</i> drenado (<i>unjacket</i>);
M_d	Módulo de Biot;
\mathbf{k}^f	Tensor de permeabilidade intrínseca;
\mathbf{K}^f	Tensor de condutividade hidráulica;
\mathbf{g}	Aceleração gravitacional;
\wp	Tortuosidade (curvatura dos poros);
$\mathbf{F}_{(Darcy)t_n}^f$	Força de Darcy;
$\Gamma_t^{D,\pi}$	Condição de contorno de <i>Dirichlet</i> do domínio computacional da fase π em instante de tempo arbitrário t ;

$\Gamma_t^{N,\pi}$ Condição de contorno de *Neumann* do domínio computacional da fase π em instante de tempo arbitrário t ;

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	OBJETIVOS	32
1.1.1	Objetivo geral	32
1.1.2	Objetivos específicos	32
1.2	JUSTIFICATIVA	32
1.3	METODOLOGIA	33
1.4	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	35
2	ESTADO DA ARTE	37
2.1	MECÂNICA DOS SÓLIDOS COMPUTACIONAL	37
2.2	MECÂNICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL	39
2.3	MECÂNICA DOS MEIOS POROSOS	42
3	MECÂNICA DOS SÓLIDOS	47
3.1	CINEMÁTICA DOS CORPOS DEFORMÁVEIS	47
3.2	MEDIDA DE DEFORMAÇÃO	49
3.3	MUDANÇA DE VOLUME E DE ÁREA	50
3.4	EQUILÍBRIO	51
3.4.1	Tensor de Cauchy	52
3.4.2	Equilíbrio Euleriano	53
3.4.3	Equilíbrio Lagrangiano	54
3.5	CONSERVAÇÃO DE MASSA	56
3.6	PRINCÍPIO DA ESTACIONARIDADE DA ENERGIA MECÂNICA	56
3.6.1	Energia específica de deformação	58
3.6.2	Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff	58
4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL	61
4.1	ELEMENTO FINITO BIDIMENSIONAL	61
4.2	ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	63
4.3	EQUILÍBRIO DE FORÇAS	64
4.3.1	Forças Internas	65
4.3.2	Forças Externas	66
4.3.3	Forças Inerciais	66
4.3.4	Matriz Hessiana	67
4.4	MÉTODO DE SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES - SISTEMA QUASE ESTÁTICO	68
4.4.1	Método de Newton-Raphson	69
4.4.2	Implementação computacional	70
4.5	APLICAÇÕES NUMÉRICAS ESTÁTICAS	71

4.5.1	Exemplo 1: Viga engastada esbelta	72
4.6	INTEGRADORES TEMPORAIS	73
4.6.1	Método de Newmark	75
4.6.2	Método implícito de α -Generalizado	77
4.7	MÉTODO DE SOLUÇÃO NUMÉRICA - SISTEMA DINÂMICO	78
4.7.1	Newton-Raphson associado à análise dinâmica	79
4.8	APLICAÇÕES NUMÉRICAS DINÂMICAS	79
4.8.1	Exemplo 1: Viga engastada livre com carregamento distribuído	81
4.8.2	Exemplo 2: Viga biengastada	83
4.8.3	Exemplo 3: Estrutura engastada em formato de arco elíptico	83
4.9	CONCLUSÃO DO CAPÍTULO	86
5	MECÂNICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL	89
5.1	FLUIDOS NEWTONIANOS INCOMPRESSÍVEIS	89
5.2	CONSERVAÇÃO DE MASSA	90
5.3	CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO	91
5.4	DESCRIÇÃO LAGRANGIANA-EULERIANA ARBITRÁRIA (ALE)	93
5.5	TÉCNICAS DE ESTABILIZAÇÃO E FORMA FRACA	96
5.6	INTEGRADOR TEMPORAL α -GENERALIZADO - IMPLÍCITO	98
5.7	CONCLUSÃO DO CAPÍTULO	100
6	MECÂNICA DOS MEIOS POROSOS SATURADOS	101
6.1	INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS MEIOS POROSOS	101
6.2	TEORIA DOS MEIOS POROSOS BIFÁSICOS	102
6.2.1	Derivada material do domínio poroso	105
6.2.2	Velocidade real do fluido e velocidade de Darcy para escoamento em meio poroso	107
6.3	DEFINIÇÕES POSTULADAS NA MECÂNICA DOS SOLOS	108
6.3.1	Tensão Efetiva de Terzaghi	108
6.3.2	Coefficiente de Biot	109
6.4	CONDIÇÃO DRENADA E NÃO DRENADA	110
6.5	PERMEABILIDADE E TORTUOSIDADE	110
6.6	RELAÇÕES DE BALANÇO PARA MODELO BIFÁSICO	112
6.6.1	Balanço de volume	112
6.6.2	Balanço da quantidade de movimento	113
6.6.3	Balanço da quantidade de movimento do fluido homogeneizado	114
6.6.4	Balanço da quantidade de movimento do sólido homogeneizado	115
6.7	SUMÁRIO DE EQUAÇÕES E ACOPLAMENTO DAS FASES	115
6.7.1	Esquema iterativo particionado forte	116
6.7.2	Condições de interface entre fases	118
6.8	EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO	119

6.8.1	Geometria do problema de Adensamento dinâmico unidimensional . . .	119
6.8.1.1	Adensamento dinâmico com pulso constante	120
6.8.1.2	Adensamento dinâmico com pulso cossenoidal	124
6.8.2	Problema bidimensional de propagação de onda em meio poroso saturado	127
6.9	EXEMPLO PROPOSTO	135
6.9.1	Filtro bidimensional poroso saturado	135
6.10	CONCLUSÃO DO CAPÍTULO	141
7	CONCLUSÃO	143
7.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	145
	Referências	149

1 INTRODUÇÃO

Materiais porosos podem ser encontrados na natureza como inanimados, objetos como areia, solo e rocha, como corpos vivos, como tecido vegetal e carne e ossos animais, ou materiais feitos pelo homem para várias indústrias ou aplicações biomédicas (CHENG, 2016).

Os materiais porosos são caracterizados como materiais com uma estrutura interna, descritos por uma fase sólida e poros, abertos e fechados. No caso da fase sólida, essa é definida comumente como matriz, ou esqueleto, do domínio poroso. Já os poros são regiões do domínio que podem ser preenchidos com um ou mais tipos de fluidos.

A presença de poros tem um significado físico na descrição mecânica do comportamento de meios porosos, devido ao fato da existência de uma estreita interação entre as respostas das fases constituintes, e uma vez que diferentes constituintes têm diferentes propriedades e estados individuais de deformação.

No caso de problemas poroelastodinâmicos, esses são afetados pela deformação da matriz sólida e pelo fluxo transitório através dos poros abertos. A presença de forças inerciais das fases torna a solução dos problemas altamente exigentes computacionalmente. No caso campo da engenharia geotécnica, materiais porosos saturados têm um comportamento diferente quando são carregados rapidamente (não drenado) e lentamente (drenado).

A interação entre o fluido presente nos poros e o esqueleto sólido dos geomateriais porosos é um problema de fluxo de fluidos e de deformação sólida totalmente acoplada (como ocorre em rochas e solos), que tem sido estudado em muitos campos da engenharia, como a engenharia de reservatórios, a engenharia hidráulica e hidroelétrica, a engenharia geotécnica e ambiental (LEWIS; SCHREFLER, 1998; VERRUIJT, 2013).

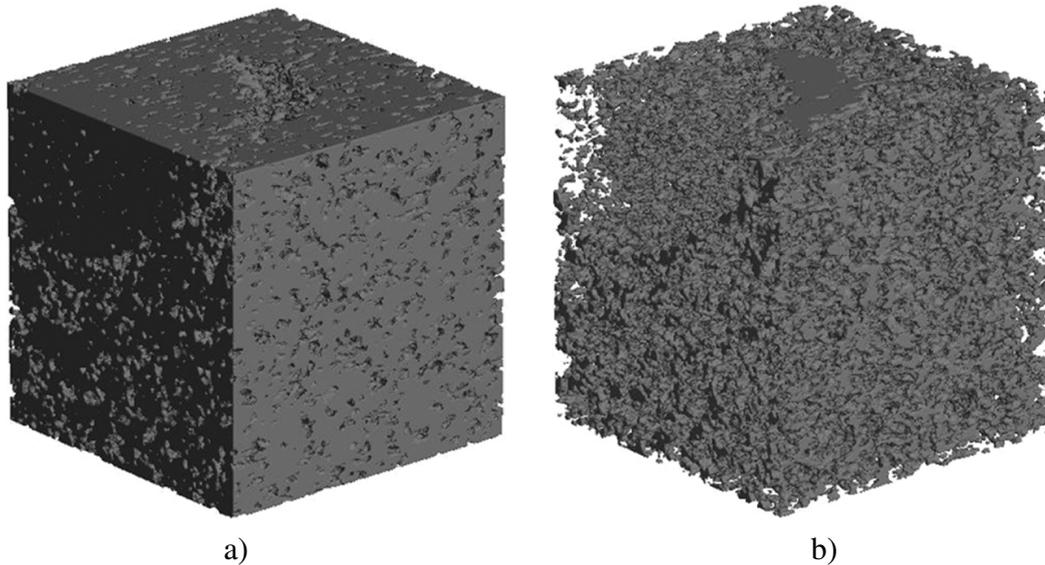
Essa interação é considerada como forte no comportamento mecânico de sólidos porosos saturados. No caso de problemas dinâmicos para materiais como solos, pode ocorrer um amolecimento do material pelo processo de liquefação.

De acordo com a teoria Termodinâmica dos Meios Porosos, é considerado que todos os constituintes do domínio poroso ocupam os mesmos pontos espaciais de um elemento representativo, ou seja, domínios das fases são contínuos sobrepostos, tendo características ponderadas pela fração de volume da respectiva fase (porosidade).

A partir do uso da Teoria da Misturas (*Mixture Theory*) de Bowen (1976) e conceito de fração volumétrica de Woltmann (1794) (*Volume Averaging*) (ver Figura 1.1 para ilustração do conceito de fração volumétrica das fases) iniciou-se o desenvolvimento dessa metodologia aos sólidos porosos saturados, para constituintes incompressíveis e compressíveis, e portanto, uma formulação contínua acoplada ao volume do domínio poroso, dissertada em trabalhos como

de [Boer \(2001\)](#), [Boer \(2003\)](#) e [Markert, Heider e Ehlers \(2010\)](#). Essa teoria é validada em seu modelo linear com a Teoria de [Biot \(1941b\)](#), [Biot \(1956c\)](#), em que as diferenças ocorrem dadas às considerações do modelo constitutivos.

Figura 1.1 – Imagens 3D ($400 \mu\text{m}^3$) reconstruídas para amostra de cerâmica referente às frações volumétricas das fases; a) fase sólida; e b) fase fluida.



Fonte: [Marques, Appoloni e Fernandes \(2011\)](#).

Para o modelo macroscópico, independente do procedimento realizado para estruturação das equações governantes, a interação sólido-fluido no volume médio do modelo bifásico é definido por uma troca de *momentum* entre as fases, que resulta nas leis de conservação para cada constituinte do meio poroso e também para a mistura como um todo.

Diferentes são as formulações e estratégias numéricas para soluções desses problemas. Algumas delas presentes na literatura são as formulações $u-v-p$, $u-w-p$ e $u-p$, pela dependência da escolha das variáveis primárias e condições do problema, cada uma delas tem sua devida condição ideal de aplicação.

Na dinâmica dos meios porosos saturados, refere-se a um problema de propagação de ondas. Diversos trabalhos enfatizaram de modo adequado a metodologia da Teoria das Misturas, valendo citar [Zienkiewicz e Shiomi \(1984\)](#), [Zienkiewicz \(1982\)](#) e [Zienkiewicz et al. \(1999\)](#), nesse contexto, mas não menos importantes os trabalhos de [Diebels e Ehlers \(1996\)](#), [Breuer \(1999\)](#) e [Li, Borja e Regueiro \(2004a\)](#).

Nesse contexto, os métodos numéricos são comumente utilizados para contornar diferentes tipos problemas, pela inviabilidade de utilização de solução analítica em inúmeros casos, dada sua complexidade, seja na análise dinâmica ou estática, enfatizando a necessidade de investigação de modelos computacionais para a mecânica dos meios porosos.

Formulações comumente encontradas na literatura apresentam equações constitutivas e sistemas totalmente acoplados no contexto da poroelasticidade (monolíticos), ou seja, um

único sistema de equações a serem resolvidas simultaneamente, sendo computacionalmente mais caro pela memória necessária, porém mais robusto. Conforme [Zienkiewicz e Chan \(1989\)](#) essa estratégia parte de um acoplamento forte e bidirecional (intersecção total ou parcial entre domínios físicos).

De acordo com [Oyekole \(2020\)](#), ao contrário da estratégia monolítica, os métodos particionados têm um elevado grau de sensibilidade à implementação numérica das condições de acoplamento que existem entre os problemas físicos resolvidos separadamente, tornando a sua concepção um desafio.

A estratégia de acoplamento forte bidirecional também é utilizada em modelos desenvolvidos com o Método dos Elementos de Contorno ([CHENG; PRENDELEANU, 1987](#); [CAMPOS; MESQUITA, 1996](#); [FERRO, 2002](#); [JR., 2004](#)).

Trabalhos prévios do grupo de pesquisa utilizaram acoplamento forte bidirecional em implementações numéricas usando Método dos elementos de Contorno na modelagem de problemas envolvendo pequenos deslocamentos e pequenas deformações do tipo poroelásticos lineares ([WUTZOW et al., 2005](#)), poroelastoplásticos enrijecidos ([WUTZOW et al., 2006](#)), e poroelastoplásticos saturados enrijecidos e poroelastoplásticos não saturados ([WUTZOW, 2008](#)).

Neste trabalho, abordam-se problemas fortemente acoplados de forma particionada, onde múltiplas interações dos subproblemas são realizadas dentro de cada incremento temporal. Essa estratégia requer menos memória que a monolítica, porém pode necessitar de iterações adicionais para alcançar a convergência global. A presente metodologia permite o melhor controle das condições referentes aos problemas físicos separadamente, além de estar sujeito a instabilidades numéricas devido às condições de acoplamento.

Este trabalho tem como proposta o desenvolvimento de um modelo numérico particionado forte para caracterizar a resposta de meios porosos totalmente saturados submetidos a solicitações dinâmicas.

O algoritmo é desenvolvido a partir do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP) em descrição Lagrangiana Total proposto por [Bonet et al. \(2000\)](#) e [Coda e Greco \(2004\)](#) com modelo de *Saint-Venant-Kirchhoff* para simulação da fase sólida e, fase fluida, considera-se escoamento Newtoniano, utilizando formulação estabilizada do Método dos Elementos Finitos (MEF), em descrição Lagrangiana-Euleriana-Arbitrária (ALE), adotando o modelo de *Navier-Stokes-Brinkman*, de forma que é possível simular problemas de *Navier-Stokes* (sem a fase sólida) até problemas de *Darcy*. Esse programa foi desenvolvido pelo grupo de pesquisa GRUMEC (USP-São Carlos).

Para ambas as fases, utiliza-se uma técnica de integração temporal implícita α -generalizado, permitindo dissipação de altas frequências, precisão de segunda ordem e técnica incondicionalmente estável. Ambas as fases são adaptadas para contemplar um modelo poroso assumindo-se ambos os materiais incompressíveis e porosidade constante.

Os métodos são descritos de forma contextualizada em cada um dos capítulos deste trabalho. Finalmente, foi investigado os comportamentos do modelo através da análise de exemplos pertinentes presentes na literatura demonstrando robustez e potencial da metodologia apresentada.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo principal o desenvolvimento de um modelo computacional para simulação de problemas poroelastodinâmicos saturados por acoplamento particionado forte entre dois problemas físicos. Dentro desse escopo, alguns objetivos específicos podem ser listados como etapas a serem vencidas ao longo do desenvolvimento do trabalho, que estão descritos a seguir.

1.1.2 Objetivos específicos

i. Descrever o Método dos Elementos Finitos (MEF) em formulação posicional na mecânica dos sólidos, assim como sua implementação para análise de problemas estacionários e transientes;

i. Apresentar uma sistemática adequada para o acoplamento de diferentes problemas físicos segundo proposta de formulação de acordo com as variáveis primárias e estratégia utilizada;

ii. Desenvolver uma ferramenta computacional eficiente aplicada no âmbito da poroelasticidade dinâmica saturada por acoplamento particionado forte entre problemas físicos;

iii. Realizar um estudo da fenomenologia e das hipóteses utilizadas na modelagem do comportamento de materiais porosos saturados materialmente incompressíveis com porosidade constante; e

iv. Verificar a eficiência do integrador temporal α -generalizado a partir das escolhas para os raios espectrais das fases e técnica particionada.

1.2 JUSTIFICATIVA

A mecânica dos meios porosos é de grande interesse em muitas disciplinas como engenharia geotécnica, engenharia sísmica, hidrogeologia, geofísica, física do solo, engenharia de petróleo, biomecânica, físico-química, engenharia agrícola e ciência dos materiais.

A modelagem numérica de sistemas físicos que abrangem uma ampla gama de problemas em diferentes áreas da ciência e tecnologia, especialmente na engenharia, tem experimentado grande progresso nos últimos anos. O uso crescente de computadores, combinado com sua evolução tecnológica, é o fator mais forte e determinante que contribuiu para esse avanço. As

máquinas estão ficando mais sofisticadas, poderosas e rápidas, com capacidade de armazenamento crescente. A cada dia há novos lançamentos na área de tecnologia da informação, seja referente a hardware ou software.

O presente trabalho apresenta uma formulação nova para o estudo da poroelasticidade, dado as variáveis do problema, sendo elas pressão do fluido (p^f), velocidade do fluido (v^f) e posição do sólido (y^s), chamada assim de formulação y^s - v^f - p^f .

Este estudo tem por finalidade a apresentação de uma estratégia de associação dos problemas físicos das fases e desenvolvimento de um código computacional capaz de simular os efeitos gerados no comportamento de materiais poroelásticos por meio do acoplamento particionado forte das fases fluido-sólida e sólida-fluido, dada a grande complexidade da simulação numérica e estratégia de desacoplamento das fases (ie, particionamento dos problemas físicos). Assim, de modo a contemplar problemas atrelados aos meios porosos, para os quais soluções analíticas deixam de ser satisfatórias devido a suas simplificações.

A decomposição do modelo referente aos subsistemas que controlam as equações governantes das fases requer metodologias precisas para o devido acoplamento poroelástico. Nesse contexto, algoritmos são desenvolvidos de forma desacoplada, de forma a reduzir o esforço computacional. As vantagens do desacoplamento são a flexibilidade de adotar métodos numéricos apropriados para cada subsistema que herdem naturalmente suas peculiaridades, além da comodidade de aproveitar simuladores robustos e eficientes já desenvolvidos para cada um dos subsistemas (SETTARI; WALTERS; BEHIE, 2001).

Além dos aspectos supracitados, a relevância no desenvolvimento de algoritmo utilizando o Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP) tem como diferencial a aplicação do MEF em nova formulação aplicada em problema na área da engenharia geotécnica e de valiosa necessidade de entendimento pleno das condições do problema. Segundo os trabalhos de Coda (2003) e Coda e Greco (2004), a formulação posicional é baseada na descrição da posição, apresentando elevado grau de convergência de resultados e precisão assertiva em relação a soluções analíticas e demais soluções numéricas, de forma prática de aplicação em problemas da engenharia.

1.3 METODOLOGIA

A metodologia empregada para o presente trabalho pode ser dividida em seis partes, a saber: (1) Revisão bibliográfica; (2) Desenvolvimento de um código computacional baseado no MEFP para análise estática e dinâmica de sólidos bidimensionais; (3) Introdução à Mecânica dos fluidos Computacional e sistemática; (4) Mecânica dos Meios Porosos e acoplamento entre domínios físicos; (5) Estratégia particionada de solução do problema poroelástodinâmico; (6) Exemplos para verificação dos códigos. Na sequência, apresenta-se o detalhamento dos procedimentos metodológicos adotados em cada uma dessas partes:

1. Revisão bibliográfica: Busca-se associar os estudos mais importantes sobre o assunto para fornecer o suporte e o embasamento técnico-científico necessários para a realização desta pesquisa.

2. Desenvolvimento de um código computacional baseado no MEFP para análise bidimensional de sólidos: Nesta fase desenvolveu-se um programa em linguagem C++ orientada a objeto para possibilitar a simulação da fase sólida de um problema físico. Para a implementação do código, empregou-se a formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional (BONET *et al.*, 2000; CODA, 2003), considerando a descrição Lagrangiana total e a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff. Nessa abordagem, a não linearidade geométrica é considerada de forma intrínseca, e aplica-se o método incremental iterativo de Newton-Raphson para solução do sistema de equações não lineares. Para a discretização do domínio contínuo, utiliza-se polinômios de Lagrange aplicados a elementos finitos triangulares com grau de aproximação linear, quadrático e cúbico. Para discretização temporal foi utilizado os integradores temporais de Newmark e α -Generalizado.

3. Introdução à Mecânica dos fluidos Computacional e sistemática: Nesta etapa foi realizada uma revisão sobre a Mecânica dos Fluidos com escoamentos incompressíveis, formulação ALE (transição entre descrição Euleriana e Lagrangiana) e técnicas de estabilização aplicadas a Equação da continuidade e Navier-Stokes-Brinkman. Tal metodologia é utilizada no *software* pertencente ao Grupo de Pesquisa (GRUMEC) do Departamento de Engenharia de Estruturas (SET/EESC - USP), sendo utilizado sua forma adaptada (homogeneizada) em função de sua fração volume no domínio poroso, apresentada a posteriori.

4. Mecânica dos Meios Porosos e acoplamento entre domínios físicos: Para descrição das equações do problema, apresentou-se a formulação referente á mecânica dos meios porosos saturados materialmente incompressíveis, equações constitutivas, associação entre as fases do domínio e seu devido acoplamento, em relação às suas variáveis de campo e temporais.

5. Estratégia particionada de solução do problema poroelástodinâmico: O objetivo desta etapa foi associar a sistemática entre os dois problemas físicos para simulação de um domínio poroso saturado na forma particionada forte, em sua análise dinâmica, dada a sua consideração de forças inerciais e interação entre as fases. Portanto, para uma melhor aproximação da resposta temporal do problema poroso.

6. Exemplos para verificação dos códigos: A última fase consistiu em utilizar exemplos presentes na literatura com o intuito de verificar a robustez e precisão dos códigos, fase sólida e fluída em estratégia particionada forte, sugerindo exemplos específicos para analisar cada uma das fases de desenvolvimento do programa.

Os códigos computacionais foram desenvolvidos em linguagem C++ em ambiente *Linux*, os sistemas lineares resultantes das discretização são resolvidos por solver direto (MUMPS) pela biblioteca *PETSc* (BALAY *et al.*, 2022). A geração das malhas foi realizada pelo programa *Gmsh*

4.4 (GEUZAINÉ; REMACLE, 2020). Para o pós-processamento e geração de gráficos foram empregados, respectivamente, o *Paraview* (HENDERSON, 2007) e o *Gnuplot* (WILLIAMS; KELLEY, 2013).

1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação se encontra dividida em sete capítulos, abrangendo temas relacionados à mecânica do contínuo associada aos sólidos deformáveis, método dos elementos finitos posicional, mecânica dos fluidos e mecânica dos meios porosos saturados.

O primeiro capítulo tem como finalidade introduzir o leitor ao tema da pesquisa, apresenta as motivações, objetivos, metodologia e a própria organização do trabalho.

No segundo capítulo é realizada uma sintetização sobre o estado da arte referente à poromecânica. Já no terceiro capítulo é apresentada de forma sistemática os conceitos da mecânica do contínuo atrelada a mecânica dos sólidos deformáveis, equilíbrio Euleriano e Lagrangiano, apresentando conceitos referentes como tensor de deformações de *Green-Lagrange* e o segundo tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff, bem como a lei constitutiva de *Saint-Venant-Kirchhoff*.

Conceitos importantes para a implementação da parcela sólida e dedução do MEF posicional estático e dinâmico utilizando esses tensores como conjugados energéticos para o problema de grandes deslocamentos, pequenas e médias deformações.

Ao decorrer do quarto capítulo são abordados os conceitos utilizados na formulação do método dos elementos finitos baseado em posições, assim como conceitos vinculados a análise não linear geométrica, análise estática e dinâmica, e a técnica de resolução de sistemas não lineares (*Newton-Raphson*). Na seção à posteriori são apresentados os integradores temporais de *Newmark- β* e α -Generalizado, empregados para o equacionamento do sistema dinâmico e exemplos de validação.

No capítulo cinco é descrito a formulação da mecânica dos fluidos e suas equações governantes para escoamento de fluido newtoniano. Conceitos importantes sobre a Descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária são apresentados, assim como técnicas de estabilização utilizadas na formulação acoplada a este trabalho. O integrador temporal nessa formulação é o α -Generalizado.

No capítulo seis é abordado a sistemática para a formulação de modelo bifásico baseada na Teoria das Misturas e fração volumétrica das fases para fases materialmente incompressíveis. Conceitos importantes sobre as considerações deste modelo são apresentadas. Um sumário de equações juntamente com um esquema interativo são apresentados para facilitar o entendimento ao leitor. Na última seção são apresentados os exemplos de validação, assim como as devidas considerações em relação aos resultados obtidos.

Por fim, no último capítulo são apresentadas as conclusões pertinentes baseadas nos resultados obtidos e objetivos propostos inicialmente neste trabalho, juntamente a sugestões pertinentes para trabalhos futuros de continuidade.

2 ESTADO DA ARTE

Este trabalho é dedicado ao estudo da resposta dinâmica de meios porosos saturados com aplicações vinculadas à engenharia geotécnica sísmica. Nesse contexto, é apresentado um breve estado da arte referente aos conteúdos da mecânica dos sólidos computacional, mecânica dos fluidos computacional e mecânica dos meios porosos. Almeja-se com este Capítulo contextualizar os temas inicialmente desacoplados à luz dos artigos científicos presentes na literatura e por fim, associá-los a Seção 2.3.

2.1 MECÂNICA DOS SÓLIDOS COMPUTACIONAL

Diferentes são as técnicas numéricas aplicadas a mecânica dos sólidos, tais como Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Elementos de Contorno (MEC), Método dos Volumes Finitos (MFV) e Método das Diferenças Finitas (MDF), por exemplo. Uma vasta gama de *softwares* comerciais utilizam o MEF, e nesse contexto, o desenvolvimento da mecânica computacional está atrelado à evolução e aprimoramento do método dos elementos finitos.

Existem, na mecânica dos sólidos, definições diferentes de tensões e deformações para corpos analisados. A questão é que nem todas são adequadas em qualquer situação. Segundo [Ogden \(1997\)](#) é comum na literatura a utilização da deformação de engenharia para lidar com problemas que envolvam pequenas deformações e deslocamentos. Essa medida, entretanto, perde a exatidão à medida que as deformações e deslocamentos aumentam. Isso ocorre porque essa medida não é objetiva, isto é, pode apresentar valores não nulos de deformação quando a estrutura descreve apenas movimentos de corpo rígido.

Os problemas sólidos inicialmente na literatura foram concebidos sob a visão de pequenos deslocamentos e deformações, limitados a análises lineares, ou seja, a configuração deformada se confunde com a configuração inicial. Entretanto, tal consideração torna-se irreal ao se comparar com situações presentes na natureza e na prática de engenharia. Assim, [Turner *et al.* \(1960\)](#) e [Argyris \(1964\)](#) apresentaram conceitos associados a não linearidade geométrica (NLG).

Um ponto necessário para realizar análises com grandes deslocamentos é a adoção de uma medida de deformação objetiva, como, por exemplo, a deformação de *Green-Lagrange*. Seu correspondente (conjugado) energético é a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, que não possui um significado físico, mas pode ser convertida na tensão de *Cauchy*, permitindo assim uma interpretação mais precisa dos resultados obtidos.

O modelo constitutivo utilizado para relacionar essas grandezas é a lei de *Saint-Venant-Kirchhoff*. Essa lei pode ser interpretada como uma generalização da lei de Hooke, que permite a análise de deformações com características geometricamente não lineares, e, portanto, pequenas e médias deformações. Assim, *Saint-Venant-Kirchhoff* estabelece uma relação linear entre a

deformação de *Green-Lagrange* e a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, o que a torna inadequada para análises que envolvam grandes deformações, por não atender à condição de crescimento, permitindo a inversão do material.

Desse modo, o equilíbrio é considerado na configuração deformada do sólido. Entre os trabalhos clássicos que fomentaram o desenvolvimento do MEF no âmbito da análise não linear geométrica, citam-se [Zienkiewicz e Morice \(1971\)](#), [Argyris *et al.* \(1979\)](#), [Riks \(1979\)](#), [Crisfield \(1981\)](#), [Bathe \(2014\)](#), [Bonet e Wood \(1997\)](#), [Ogden \(1997\)](#), [Holzapfel \(2004\)](#) e [Zienkiewicz e Taylor \(2005\)](#).

De acordo com [Holzapfel \(2004\)](#), as formulações advindas da mecânica não linear são usualmente classificadas em Lagrangianas ou Eulerianas, a depender do modo utilizado para descrever a cinemática do meio. Na descrição Lagrangiana, também chamada de descrição material, o comportamento de uma partícula, ou ponto material, é acompanhado quando essa se move no espaço. Já na descrição Euleriana, ou espacial, descreve-se o que acontece a um ponto fixo do espaço ao longo do tempo.

Na descrição Lagrangiana, em que as variações do problema são medidas em relação a um referencial fixo no ponto material, podendo ser subdividida em total, atualizada e parcialmente atualizada. De acordo com [Wong e Tin-Loi \(1990\)](#), [Crisfield, Remmers e Verhoosel \(1991\)](#), [Bathe \(2014\)](#), na descrição Lagrangiana total o referencial corresponde à configuração inicial para todos os parâmetros ao longo do tempo. Já na descrição Lagrangiana parcialmente atualizada o referencial é a configuração de equilíbrio do passo anterior, seja para um incremento de carga ou de tempo atual. E por fim, na atualizada a configuração de referência é atualizada em cada iteração.

Conforme [Bonet e Wood \(1997\)](#), independentemente da descrição utilizada, de uma maneira cinematicamente exata, o equacionamento deve possibilitar descrever a posição de cada ponto do corpo durante todo seu movimento, portanto formulado em descrição espacial (Euleriana). Em seguida, este pode ser transformado para descrição material (Lagrangiana).

Na literatura outras abordagens foram incorporadas, destacando-se a corrotacional desenvolvida por [Truesdell \(1955\)](#), estratégia que se consiste na decomposição cinemática das parcelas de movimento de corpo rígido e movimento de deformação, que podem ser encontradas nos trabalhos de [Hughes e Liu \(1981\)](#), [Argyris \(1982\)](#), [Simo e Fox \(1989\)](#), [Crisfield, Remmers e Verhoosel \(1991\)](#) e [Bathe \(2014\)](#).

Como alternativa ao MEF tradicional (forma clássica), que adota o campo de deslocamentos e rotações como parâmetros nodais, o MEF em sua versão posicional passou a ser empregado, utilizando as posições como parâmetros nodais apresentado em [Bonet *et al.* \(2000\)](#), [Coda \(2003\)](#), sendo uma formulação em que utiliza uma descrição Lagrangiana total.

Diversos artigos podem ser citados relacionando a aplicação do MEFP com diferentes abordagens de problemas não lineares. Em [Coda e Greco \(2004\)](#), [Greco, Coda e Venturini](#)

(2004) e Greco e Coda (2006) são estudados problemas estáticos e dinâmicos envolvendo estruturas reticuladas planas com grandes deslocamentos. Já em Coda e Paccola (2007) e Coda e Paccola (2008) analisaram problemas NLG de cascas. Uma avaliação estrutural termomecânica é apresentada em Carrazedo e Coda (2010) e Rigobello, Coda e Neto (2014).

Outros trabalhos no âmbito da pesquisa de solução de problemas físicos sob IFE utilizando MEFP para situações de acoplamento particionado e monolítico, vale citar (SUAREZ, 2016), (FERNANDES, 2016) e (MOREIRA, 2021), assim como o trabalho de (AVANCINI, 2023) com uso de formulação do MEF baseada em posições e partículas.

A técnica dos elementos finitos posicionais emprega uma aproximação para determinar as posições nodais utilizando polinômios de Lagrange, Hermite ou NURBS (*Non Uniform Rational Basis Spline*), por exemplo. Essa abordagem utiliza o princípio da energia potencial total estacionária para determinar as referidas posições nodais.

Um sistema não linear de equações é configurado ao estabelecer a nulidade da primeira variação do funcional de energia potencial total (HOLZAPFEL, 2004). A solução desse sistema não linear pode ser obtida por uma técnica baseada no método de *Newton-Raphson* (KRENK, 1995). Uma descrição mais detalhada a respeito do MEFP pode ser encontrada em Coda (2018).

2.2 MECÂNICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

Seja uma partícula de material sólido ou fluido, estão sujeitos as mesmas leis físicas, e no caso, a partir da Segunda Lei de Euler o equilíbrio de corpos e meios contínuos é obtido, e suas diferenciações ocorrem pelas considerações dos modelos constitutivos de cada material. Ao contrário dos sólidos, os fluidos (Newtonianos) não são capazes de resistir a tensões desviadoras, podendo se deformar indefinidamente quando submetidos a solicitações desse tipo. Assim, a descrição Euleriana, com velocidades como variáveis principais demonstra adequadas para uma vasta gama de problemas de escoamentos de fluidos.

Neste trabalho destaca-se o modelo de fluidos Newtonianos, pela ênfase da tratativa do trabalho e pela abrangência em diversos problemas da natureza. Os fluidos Newtonianos têm como característica a não resistência a tensões de cisalhamento, podendo deformar-se indefinidamente sob quaisquer estado de tensões não nulos.

Na dinâmica dos fluidos computacional (CFD em inglês), assim como na mecânica dos sólidos, diferentes são os métodos e abordagens para o desenvolvimento de técnicas estáveis, como no caso de diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos. Já o MEF aplicado à CFD começou a ser bastante utilizado devido a aspectos como permitir a utilização de malhas arbitrárias não estruturadas, e facilitar a imposição de condições de contorno em fronteiras curvas e de geometria complexa, tornando-se vantajoso quando comparado aos outros métodos existentes (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; TAYLOR, 2000).

Partindo do princípio da elasticidade e descrição de um funcional de energia, comu-

mente utiliza-se métodos variacionais, como o Método dos Resíduos Ponderados, Princípio dos Trabalhos Virtuais ou o Método de *Ritz*, gerando assim uma matriz de rigidez simétrica (ver [Zienkiewicz, Taylor e Nithiarasu \(2005\)](#) e [Strang e Fix \(2008\)](#)).

Na Mecânica dos Fluidos, em descrição Euleriana, segundo [Brooks e Hughes \(1982\)](#) devido às equações de *Navier-Stokes* terem termos convectivos, estratégias como método de *Galerkin* tornam as matrizes assimétricas e para os casos de convecção dominante, ou seja, número de *Reynolds* alto, geram variações espúrias nos campos das variáveis do problema e gerando instabilidade. Contudo, esses problemas podem ser minimizados com um refino de malha, muitas vezes excessivo, ou com o uso de técnicas capazes de estabilizar os campos instáveis.

Assim, alterações ao método clássico de *Galerkin* foram propostas na literatura, como por exemplo, as técnicas *Stramline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) ([BROOKS; HUGHES, 1982](#)), *Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin* (PSPG) ([TEZDUYAR, 1992](#)), *Galerkin Least-Squares* (GLS) ([HUGHES; FRANCA; HULBERT, 1989](#)) e *Least-Squares on the Incompressibility Constraint* (LSIC) ([TEZDUYAR; OSAWA, 2000](#)).

Existem outras técnicas pertinentes na literatura, como *Sub-Grid Scale* (SGS) ([HUGHES, 1995](#)) ou *Consistent Approximate Upwind* (CAU) ([GALEÃO; CARMO, 1988](#)). Já em [Fernandes \(2020\)](#) foram utilizados as técnicas SUPG, PSPG e LSIC. As características destas técnicas partem de um princípio físicos de imposição de uma viscosidade artificial as equações governantes, contornando problemas vinculados a resultados inautênticos.

Para contornar o problema gerado no campo de velocidade em escoamentos turbulentos, [Brooks e Hughes \(1982\)](#) introduziram a técnica eficiente chamada *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG), com efeito de estabilização na direção das linhas de corrente do escoamento, de modo a eliminar os problemas numéricos gerados pela convecção. Esta técnica parte do princípio de introduzir à forma fraca (integral), obtida pelo método de *Galerkin*, o resíduo da equação de conservação da quantidade de movimento ponderada por termos estabilizantes, resultando na técnica do tipo *Petrov-Galerkin*.

Outra instabilidade que pode ocorrer é no campo de pressão, ao utilizar combinações de funções aproximadoras entre os campos de velocidade e pressão, e assim, geram variações espúrias no campo de pressão por não satisfazer a condição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB) ([BABUŠKA, 1973](#); [BREZZI, 1974](#)), atrelado a unicidade de solução em problemas com ponto de sela.

Para satisfazer as limitações da condição de LBB pela escolha arbitrária dos espaços de aproximação dos campos de variáveis, [Tezduyar \(1992\)](#) embasado na técnica proposta por [Hughes, Franca e Balestra \(1986\)](#) Hughes, Franca e Balestra (1986), desenvolveu a estratégia numérica para estabilização da pressão definida como *Pressure-stabilizing/Petrov-Galerkin* (PSPG), contornando portando a condição de LBB e permitindo que as funções de interpolação de velocidade e pressão sejam iguais.

Muitos são os trabalhos com nas últimas décadas vinculados a escoamentos incompressíveis, vale ressaltar [Tezduyar \(2003a\)](#), [Hsu et al. \(2010\)](#) e [Bazilevs, Takizawa e Tezduyar \(2013\)](#).

A formulação utilizada por [Fernandes \(2020\)](#) em seu trabalho e desenvolvimento de código computacional foi do tipo mista, portando com variáveis primitivas do problema: velocidade e pressão.

Nesse contexto, uma formulação de extensão chamada de equações de *Navier-Stokes-Brinkman*, descrita de forma clara no trabalho de [Nillama, Yang e Yang \(2022\)](#), trata o problema de escoamento de fluidos entre transições entre Darcy, Darcy-Brinkman (viscoso) e Navier-Sokes. Essa metodologia foi tomada como base no presente trabalho, de modo que em função da porosidade e permeabilidade define-se em qual regime de escoamento a região do domínio encontra-se.

As equações da Mecânica dos Fluidos em geral são descritas por uma formulação Euleriana (i.e, domínio computacional fixo ao longo do tempo). Em situações especiais como no caso de problemas com contornos móveis, ou seja, situação em que ocorre interação entre dois domínios distintos, como em problemas de Interação Fluido Estrutura (IFS) e casos da poromecânica em escala macroscópica entre domínios sobrepostos, requer-se o uso de outras técnicas para representação devida do fenômeno.

De acordo com [Tezduyar \(2006\)](#), [Akkerman et al. \(2012\)](#), escoamentos incompressíveis com contornos móveis são subdivididos em: métodos de rastreamento de interface (*interface tracking*), ou métodos de malhas móveis, e métodos de captura de interface (*interface capturing*), ou métodos de malhas fixas.

Especificamente para o caso dos métodos de rastreamento de interface, é necessário que a malha do fluido precisa ser dinamicamente movimentada e esta ser influenciada pelo movimento do domínio sólido. Uma boa estratégia presente na literatura é a apresentada por [Donea, Giuliani e Halleux \(1982\)](#), uma descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE) para o domínio do fluido. Outro método mais atual presente na literatura são formulações estabilizadas espaço-tempo (em inglês, *Stabilized Space-Time - DSD/SST*) introduzidos nos trabalhos de [Tezduyar et al. \(1992a\)](#), [Tezduyar et al. \(1992b\)](#) e [Masud e Hughes \(1997\)](#).

Enfatizando a abordagem da descrição ALE, presente no desenvolvimento do trabalho de [Fernandes \(2020\)](#), tem como ideia básica de permitir que ocorra o movimento da malha, assim como ocorre na descrição Lagrangiana, sem se desassociar ao movimento das partículas atrelado a descrição Euleriana.

Nesse contexto, para associar mais de um domínio computacional, no caso sólido e fluido, existem duas abordagens, a monolítica e particionada. A abordagem monolítica consiste na resolução dos dois problemas de forma simultânea no acoplamento das fases. Já no caso particionado, os dois domínios são resolvidos separadamente.

O acoplamento particionado pode ainda ser classificado em duas categorias: forte ou fraco (ROUX; GARAUD, 2009a). No acoplamento forte (implícito), o esquema é realizado para que as correções de acoplamento ocorram durante as iterações no mesmo passo de tempo. Já no acoplamento fraco (explícito), as correções e transferência de condições entre as interfaces ocorrem na primeira iteração do passo de tempo (i.e, uma única vez). Esses esquemas permitem uma modularidade e desassociação entre as técnicas específicas de cada domínio físico.

Segundo Causin, Gerbeau e Nobile (2005), Brummelen (2009), os esquemas particionados podem ter dificuldade de convergência devido à defasagem entre as duas integrações temporais, assim como problemas de instabilidade devido ao efeito de massa adicionada, que ocorre quando os dois domínios têm densidades semelhantes, resultando, portanto, em um problema com um ponto de bifurcação. De acordo com Heil, Hazel e Boyle (2008) o esquema monolítico tem como sua principal desvantagem o alto custo computacional.

2.3 MECÂNICA DOS MEIOS POROSOS

A mecânica dos meios porosos se difere da mecânica convencional aplicada a meios monofásicos pela interação mecânica que surge entre os materiais que compõem o domínio poroso, sendo o modelo bifásico constituído por matriz sólida e o fluido que percola nos poros. Desse modo, a teoria dos meios porosos é de grande interesse para avanços na pesquisa nas mais diferentes áreas.

Alguns dos tipos mais comuns de materiais porosos na engenharia são: solo, rocha e concreto. Referente a esses materiais, diversas são as aplicações na Engenharia Civil, como: análise de percolação em solos, reservatórios de água e barragens, estudado por exemplo nos trabalhos de Gawin, Baggio e Schrefler (1995) e Gamnitzer e Hofstetter (2013), e também em análise sísmica em domínios porosos (ver Masson e Pride (2014)), sendo existente na literatura diversos modelos para problemas no âmbito da acústica de propagação de ondas em domínios poroelásticos como, por exemplo Jakobsen, Johansen e McCann (2003) e Matuszyk e Demkowicz (2014).

Na área da biomecânica, existem uma vasta gama de problemas que envolvem problemas porosos, com uso de modelos para modelar o comportamento de ossos, tecidos moles e pulmão humano, encontrado nos trabalhos de Almeida e Spilker (1998), Cowin (1999), Berger *et al.* (2016), respectivamente.

O nome mais importante no âmbito da Teoria dos Meios Porosos foi Henri-Philibert Darcy (1803-1858), que definiu a partir de seus experimentos de fluxo de água em meios porosos (ver por exemplo (DARCY, 1856)) a razão entre a quantidade de volume total filtrante no meio e sua perda de pressão, sendo esta vinculada na relação de fluxo hoje conhecida pela Lei de Darcy.

Subsequente, Karl von Terzaghi (1883-1963), atualmente reconhecido como fundador (pai) da Mecânica dos solos, introduziu conceitos importantes em meios porosos saturados

considerando o meio poroso deformável, a teoria da consolidação unidimensional e o princípio da tensão efetiva (ver (TERZAGHI, 1923)). Assim, como o trabalho de Woltmann (1794), pioneiro na teoria dos meios porosos e introduziu o conceito de volumes fracionados no domínio poroso.

Entre os anos de 1913 e 1936 os pesquisadores Fillunger e Terzaghi desenvolveram diversos trabalhos importantes que contribuíram para o avanço na mecânica dos solos. Em Terzaghi (1923) foram investigados meios porosos saturados deformáveis utilizando o princípio das tensões efetivas. Já em Fillunger (1936) foi apresentada a formulação de balanço de quantidades de movimento e massa para os casos de consolidação unidimensional.

A partir da abordagem de Fillunger (1936) foi introduzido o conceito de volume médio das fases que ficou posteriormente conhecida na mecânica dos meios porosos como teoria das misturas (atualmente).

A posteriori de Terzaghi, Maurice Anthony Biot (1905-1985) generalizou a teoria já existe para problemas tridimensionais, conforme seus trabalhos Biot (1941a), Biot (1941b), e também introduziu efeitos de carga dinâmica em meios porosos, assim como expandiu sua formulação para modelos anisotrópicos, viscoelásticos da parcela sólida e propagação acústica, como pode ser visto nos trabalhos Biot (1955), Biot (1956b), Biot (1956a), Biot (1962) e Biot (1963).

A teoria relativa ao comportamento entre fluidos e sólidos (i.e, teoria das misturas) em meio poroso foi descrita por Biot (1941b), Biot (1956c), Biot (1956d), Biot (1956a), Biot (1962) e seu acoplamento entre as fases fluido-sólido e sólido-fluido foram desenvolvidas em trabalhos posteriores baseados na teoria da consolidação de adensamento de Terzaghi, para análises quase-estáticas e dinâmicas.

Seguindo a metodologia proposta por Biot (1956c), diversos trabalhos foram publicados na literatura apresentando de soluções analíticas para problemas em meio poroso seguindo geometrias e carregamentos simplificados com o caso do fluido incompressível, como, por exemplo, McNAMEE e Gibson (1960), Schiffman e Fungaroli (1965), Shanker, Sarma e Ratnam (1978) e Cheng e Liggett (1984).

A teoria macroscópica de Biot (1941b), Biot (1956c), Biot (1972) para a poroelasticidade, generalizou o modelo de Terzaghi para três dimensões, acrescentando à formulação os efeitos de distorção induzida pelas tensões de cisalhamento no esqueleto do poro. Um problema em poroelasticidade deve obedecer aos critérios de deslocamentos cinematicamente admissíveis e tensões estaticamente admissíveis, advindos da teoria da poroelasticidade de Biot (1941b).

A formulação macroscópica das leis de comportamento dos solos saturados deformáveis é caracterizada pela variação volumétrica, desprezando qualquer variação de volume das partículas sólidas. Assim, a deformação no meio poroso é governado pelas tensões efetivas $\sigma_{ij}^s + p^f \delta_{ij}$, onde σ_{ij} são as tensões totais, p^f é dado pela pressão intersticial no poro e δ_{ij} o delta de Kronecker.

O conceito geral teórico, base da teoria das misturas, foi introduzido por [Truesdell \(1957\)](#), com base nas equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia de cada parcela constituinte da mistura.

Equações governantes para meios porosos foram estudados por diversos pesquisadores, pode-se citar no âmbito da elasticidade linear [Kelly \(1964\)](#), [Green e Naghdi \(1968\)](#), [Green e Naghdi \(1969\)](#) e teorias modernas para teoria das misturas em [Sampaio e Williams \(1979\)](#), [Bowen \(1980\)](#), [Bowen \(1982\)](#).

Em trabalhos de [Zienkiewicz, Chang e Bettess \(1980\)](#), [Zienkiewicz e Shiomi \(1984\)](#), [Boer \(1996\)](#) estenderam modelos da teoria de Biot para um âmbito não linear. [Boer e Lade \(1991\)](#) realizou análises em elementos finitos utilizando tal metodologia.

As duas não linearidades importantes nos meios porosos são a não-linearidade física e a não-linearidade geométrica. Associados a tais considerações dos modelos houve motivações para resolução destes da mistura como análise não lineares, modelado pela integração numérica do espaço e tempo em relação às equações governantes.

Considerando os efeitos das forças inerciais, trata-se de um problema de propagação de onda, e com o uso da técnica numérica do MEF, pesquisas nesta área foram realizadas nos trabalhos de [Zienkiewicz \(1982\)](#), [Zienkiewicz e Shiomi \(1984\)](#), [Prevost \(1982\)](#), [Prevost \(1989\)](#), [Li, Wang e Shen \(1992\)](#), [Borja *et al.* \(1999\)](#), utilizando um modelo constitutivo apropriado para representar o efeito do meio submetido a um comportamento dinâmico.

A não linearidade geométrica desempenha um papel crítico nestas análises numéricas, em que o comportamento do material ultrapassa o regime de pequenas deformações. Nesta linha de pesquisa, [Borja e Alarcón \(1995\)](#), [Borja, Tamagnini e Alarcón \(1998\)](#) propuseram modelos com ambas as fases incompressíveis para análise quase-estática. Já em [Diebels e Ehlers \(1996\)](#) extrapolaram para consideração das forças inerciais, sendo restritos para modelos constitutivos simples. [Wilmański \(1996\)](#) e [Kempa \(1997\)](#) adaptaram as formulações anteriores para adicionar uma equação vinculada a porosidade.

Para representar adequadamente as condições de interações entre as fases constituintes do domínio poroso multifásico, grande parte das formulações parte da teoria de duas fases (mistura) de Biot. [Arduino e Macari \(1998\)](#) propuseram uma formulação no qual as variáveis desconhecidas são: o deslocamento da fase sólida (\mathbf{u}^s), o deslocamento da fase fluida (\mathbf{u}^f), e a pressão do fluido poroso (p^f).

Uma forma alternativa proposta pela dificuldade de mensurar \mathbf{u}^f , alguns pesquisadores passaram a utilizar a variável de deslocamento relativo ($\mathbf{w}^r = \phi^f (\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s)$), em que ϕ^f é a porosidade fluida, chamada de formulação \mathbf{u}^s - \mathbf{w}^r - p^f incorporadas nos trabalhos de [Ghaboussi e Wilson \(1972\)](#), [Prevost \(1982\)](#), [Prevost \(1989\)](#), [Zienkiewicz e Shiomi \(1984\)](#), [Kanatani *et al.* \(1988\)](#). Outra formulação derivada desse contexto é a formulação chamada \mathbf{u}^s - p^f , presentes nos trabalhos de [Zienkiewicz \(1982\)](#), [Zienkiewicz e Shiomi \(1984\)](#), [Aubry e Moderessi \(1989\)](#) e [Oka](#)

et al. (1994).

Na atualidade, a formulação $\mathbf{u}^s \mathbf{v}^f p^f$ é uma das mais completas no âmbito da macroescala. Nos trabalhos de Breuer (1999), Markert, Heider e Ehlers (2010) e Menon e Song (2021), por exemplo, é verificado sua eficiência de implementação para diferentes problemas e condições geométricas.

Portanto, é conclusivo que as equações governantes dos problemas dos meios porosos utilizam diferentes conjuntos de variáveis desconhecidas de forma implícitas e explícitas. As equações governantes são: equações do balanço de massa e balanço da quantidade de movimento para cada fase e na mistura, considerando problema isotérmico.

As implementações numéricas dos modelos de acoplamento geomecânico geralmente discretizam espacialmente o subsistema da poromecânica nas variáveis de pressão e deslocamento via MEF em conjunção com diferenças finitas implícitas na aproximação no tempo (YALE, 2002; MINKOFF *et al.*, 2003; MERODO *et al.*, 2004). Segundo Murad e Loula (1994), este tipo de abordagem apresenta instabilidade numérica nos instantes iniciais devido à resposta incompressível do fluido no meio poroso, porém, de modo geral, apresenta uma boa convergência nos campos de pressão e deslocamento.

3 MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Os conceitos básicos da mecânica não-linear de meios contínuos são revistos neste capítulo. Os sólidos têm seu movimento governado por três leis básicas: as conservações da massa, da quantidade de movimento e da energia.

Pela hipótese de meio contínuo, este capítulo apresenta as relações de equilíbrio estático e dinâmico para um sólido em descrição Lagrangiana Total (i.e., relação com a configuração material). Para tanto, o equilíbrio é descrito por meio do funcional de energia mecânica total, com o conjugado energético relativo à medida de deformação e lei constitutivo de *Saint-Venant-Kirchhoff*. Ao fim, exemplos pertinentes à consideração dos efeitos de não linearidade geométrica são apresentados, assim como as técnicas empregadas para solução do sistema não linear.

Diversos são trabalhos referentes a mecânica dos sólidos e suas diferentes abordagens na mecânica do contínuo e não linearidade geométrica, dentre pode-se citar os trabalhos de [Crisfield, Remmers e Verhoosel \(1991\)](#), [Ogden \(1997\)](#), [Bonet e Wood \(1997\)](#), [Holzapfel \(2004\)](#) e [Coda \(2018\)](#).

3.1 CINEMÁTICA DOS CORPOS DEFORMÁVEIS

A cinemática dos sólidos deformáveis descreve o movimento de um corpo em um meio contínuo sem considerar suas causas. O sólido deformável é definido como o agrupamento de pontos materiais cujas grandezas: posição, velocidade e aceleração são expressas por meio de funções contínuas ([KZAM, 2016](#)).

Um corpo deformável em equilíbrio estático ou dinâmico, submetido a ações externas, apresenta mudanças em relação a sua configuração inicial, podendo estas serem decorrentes da deformação gerada pelas tensões ou devido ao simples movimento de corpo rígido.

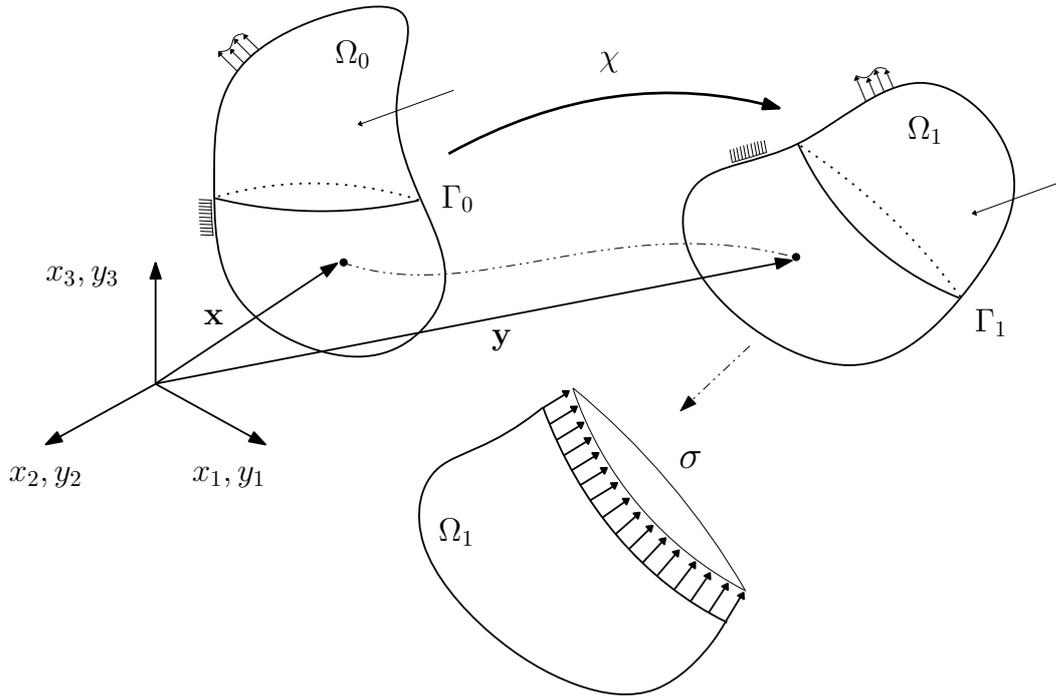
O mapeamento da configuração atual do sólido (Ω_1) é determinado pela função denotada por função mudança de configuração (χ), de modo a descrever o comportamento cinemático do corpo frente às condições de contorno impostas, empregando como parâmetro referencial apenas as coordenadas de sua configuração inicial (Ω_0). Portanto, χ mapeia as posições atuais (\mathbf{y}) a partir das posições iniciais (\mathbf{x}). Na Figura 3.1 é esquematizado a mudança de configuração de um corpo.

Desse modo, a função mudança de configuração é definida conforme Equação (3.1), denotando t como instante em que o sólido encontra-se na configuração deformada.

$$\mathbf{y} = \vec{\chi}(\mathbf{x}, t). \quad (3.1)$$

Além disso, denota-se por \mathbf{A} o gradiente da função mudança de configuração, segundo

Figura 3.1 – Equilíbrio entre configuração inicial e deformada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Equação (3.2).

$$\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{x}}\chi = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{x} + \mathbf{I} \quad \text{ou} \quad A_{ij} = \chi_{i,j} = \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j} = x_{i,j} + \delta_{ij}, \quad (3.2)$$

em que δ_{ij} representa o delta de *Kronecker* e \mathbf{I} é um tensor identidade de segunda ordem. Expandindo \mathbf{A} matricialmente, obtém-se a Equação (3.3).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Um resultado fundamental da mecânica do contínuo é o teorema da decomposição polar ([BONET; WOOD, 1997](#)), fundamenta que \mathbf{A} pode ser unicamente decomposto em:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R} \quad (3.4)$$

definidas como decomposição polar à direita e decomposição polar à esquerda, respectivamente. O tensor \mathbf{R} é denominado tensor rotação, pois representa apenas os movimentos de corpo rígido (sem mudança de forma) em que acarreta em $\det(\mathbf{R}) = \mathbf{I}$. Outra propriedade de \mathbf{R} é a sua ortogonalidade, ou seja, $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é o tensor identidade.

Portanto, se $\mathbf{U} = \mathbf{I}$ ocorre apenas uma rotação em torno de um eixo fixo e portanto $\mathbf{A} = \mathbf{R}$. Em contrapartida, se $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ ocorre um alongamento puro, e assim, $\mathbf{A} = \mathbf{U}$.

Os tensores \mathbf{U} e \mathbf{v} , chamados respectivamente de alongamento à direita (ou material) e alongamento à esquerda (ou espacial), sendo estes simétricos, $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}^T$, e representam a parcela de deformação pura de \mathbf{A} .

3.2 MEDIDA DE DEFORMAÇÃO

Uma medida de deformação é uma grandeza que permite e deve mensurar a mudança de forma ocorrida entre as configurações inicial e atual adequadamente. Define-se neste seção uma grandeza fundamental na elasticidade não linear, o tensor de alongamento ou estiramento à direita de Cauchy-Green (\mathbf{C}), sendo este definido conforme Equação (3.5).

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad \text{ou} \quad C_{ij} = A_{ki} A_{kj} \quad (3.5)$$

pela decomposição polar à direita de \mathbf{C} , têm-se que:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^T (\mathbf{R}\mathbf{U}) = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (3.6)$$

ou seja, \mathbf{C} depende apenas das parcelas de deformações puras de \mathbf{A} , sendo $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ para movimentos de corpo rígido, tomando-se como prova para sua objetividade.

Outra medida particularmente conveniente dado o conjugado energético associado neste trabalho, cuja objetividade decorre imediatamente de sua relação com o tensor \mathbf{C} , é a deformação de Green-Lagrange (\mathbf{E}), definida na Equação (3.7).

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{ou} \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ki} A_{kj} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}) \quad (3.7)$$

Analisando a deformação de Green em função de deslocamentos ($\Delta \mathbf{x} = \mathbf{y}(x) - \mathbf{x}$), ou seja, pode ser descrita como:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{x}}(\Delta \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^T(\Delta \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^T(\Delta \mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}(\Delta \mathbf{x})) \quad (3.8)$$

Nesse contexto, esse tensor é de suma importância para obtenção de medida de deformação não lineares. É possível verificar que \mathbf{E} se aproxima da clássica deformação linear de engenharia (ε) à medida que \mathbf{A} se aproxima do tensor identidade, perdendo sua característica não linear (i.e., termo quadrático de \mathbf{A} tende a zero), conforme Equação (3.9).

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{x}}(\Delta \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}^T(\Delta \mathbf{x})) \quad (3.9)$$

De acordo com Coimbra (1978), a medida de deformação de Green é objetiva ou referencialmente indiferente, pois os valores de deformação não dependem do referencial, ou seja, apresenta deformações nulas para movimentos de corpos rígidos, como a translação e a rotação. Dada a simetria do tensor \mathbf{C} , remete-se que as componentes de deformação estejam, portanto, diretamente correlacionadas ao tensor de Cauchy.

3.3 MUDANÇA DE VOLUME E DE ÁREA

Sendo de interesse determinar a alteração do volume do corpo, define-se a deformação volumétrica (ε_v) para um elemento infinitesimal, segundo Figura 3.2, em que sua variação de volume dada segundo Equação (3.10).

$$\varepsilon_v = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{dV}{dV_0} - 1 = J - 1. \quad (3.10)$$

sendo dV o volume atual do infinitésimo, dV_0 o volume inicial e J é a razão entre o volume atual e inicial, denominado como Jacobiano da transformação. Define-se o volume inicial dV_0 a partir dos vetores unitários ortogonais dx_1 , dx_2 e dx_3 , conforme o produto triplo apresentado na Equação (3.11):

$$dV_0 = dx_1(dx_2 \times dx_3) = \det(dx_1, dx_2, dx_3). \quad (3.11)$$

Para uma mudança de configuração qualquer, define-se os vetores elementares: $dy_1 = \mathbf{A}dx_1$, $dy_2 = \mathbf{A}dx_2$ e $dy_3 = \mathbf{A}dx_3$. Dessa forma, o volume atual deformado é dado por:

$$dV_1 = dy_1(dy_2 \times dy_3) = \det(dy_1, dy_2, dy_3). \quad (3.12)$$

portanto, a transformação de cada vetor na configuração deformada é dada por:

$$\begin{aligned} dy_1 &= \mathbf{A}dx_1 = \frac{\partial \chi}{\partial x_1} dx_1, \\ dy_2 &= \mathbf{A}dx_2 = \frac{\partial \chi}{\partial x_2} dx_2, \\ dy_3 &= \mathbf{A}dx_3 = \frac{\partial \chi}{\partial x_3} dx_3, \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que dV_1 pode ser definido como:

$$dV_1 = \det(\mathbf{A})dV_0 = JdV_0. \quad (3.14)$$

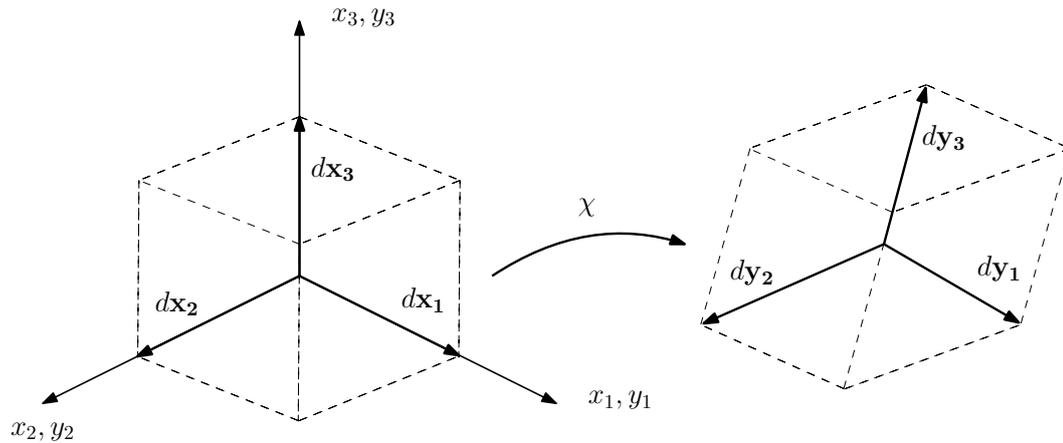
O jacobiano da transformação, como condição de impedimento do material de auto penetrar-se ou desaparecer, em outras palavras, J deve ser não nulo positivo ($J > 0$), definido, portanto, na Equação (3.15).

$$J = \det(\mathbf{A}) = \frac{dV}{dV_0} > 0. \quad (3.15)$$

Além de garantir a impenetrabilidade, o jacobiano pode ser empregado como regulador da condição de crescimento dos modelos constitutivos hiperelásticos.

Na elasticidade não linear a medida de deformação adotada para contemplar tais efeitos gera por consequência valores de tensões que não são representativos fisicamente, ou seja, são medidas de tensões matemáticas correspondentes à configuração inicial. Logo, para proceder

Figura 3.2 – Mudança de configuração em um cubo infinitesimal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

com uma análise de tensões deve-se realizar a conversão para a tensão na configuração atual, que se traduz na determinação da tensão de *Cauchy*.

Na elasticidade não linear, a medida de deformação adotada tem como seu conjugado energético um tensor de tensões que não tem representação física por ser correspondente à configuração inicial. Será apresentado tal tensor nas seções seguintes.

Para uma área de um infinitésimo na configuração indeformada (da_0), é possível definir o seu volume pela projeção do mesmo através de um vetor $s\mathbf{x}$ e o vetor unitário normal (\mathbf{n}_0) a superfície correspondente a da_0 , obtendo-se:

$$dV_0 = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_0 da_0, \quad (3.16)$$

pelo mesmo princípio, o volume na configuração deformada pode ser descrita como:

$$dV_1 = d\mathbf{y} \cdot \mathbf{n}_1 da_1 = \mathbf{A} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_1 da_1 = J d\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_0 da_0. \quad (3.17)$$

Então, pela mudança de configuração do volume e desenvolvendo a Equação (3.17), obtém-se que a Equação (3.18), conhecida como Fórmula de Nanson.

$$\mathbf{n}_1 da_1 = J \mathbf{A}^{-1} \mathbf{n}_0 da_0 \quad \text{ou} \quad n_i da_1 = J A_{ki} n_i da_0. \quad (3.18)$$

A Equação (3.18) será empregada nas as descrições necessárias para o equilíbrio Lagrangiano, partindo-se do equilíbrio Euleriano. Finalizando esta seção, se torna possível relacionar as diferentes medidas de tensão com a tensão de *Cauchy* (atual), realizadas na Seção 3.4.

3.4 EQUILÍBRIO

Conforme mencionado na Seção 3, a formulação adotada para o comportamento do sólido é uma descrição Lagrangiana Total. Nesse contexto, dada a necessidade da correlação

entre as configurações indeformadas e deformadas, utiliza-se algumas definições já apresentadas e introdução de equações de equilíbrio Euleriano e Lagrangiano, conforme descrito em [Coda \(2018\)](#) e [Sanches \(2022\)](#)

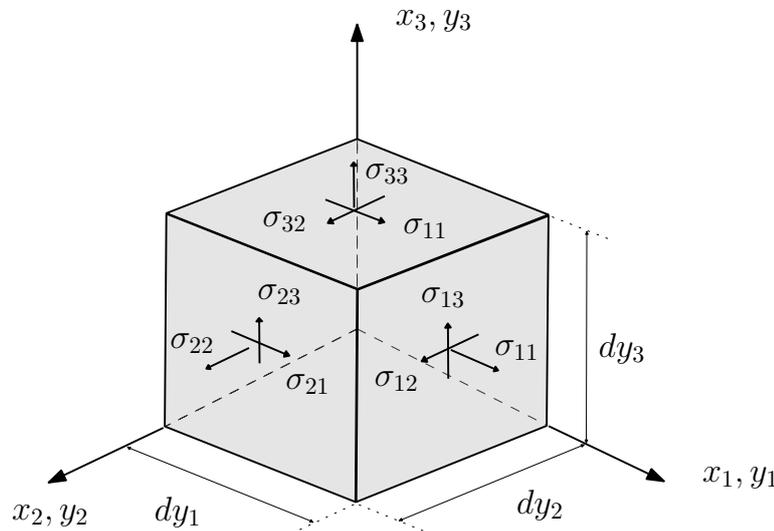
3.4.1 Tensor de Cauchy

A tensão de Cauchy é uma medida de tensão descrita na configuração atual e, é também, denominada de tensão real, pois possui representação física explícita, a tradicional relação força por unidade de área, utilizada em análises lineares ([BONET; WOOD, 1997](#)).

Conforme apresentado na Figura 3.1, ao seccionar o corpo sujeito a ação de forças em sua configuração deformada (Ω_1) deve surgir uma distribuição de forças por unidade de superfície (ou área) capazes de garantir o equilíbrio, denominada tensão (Segunda Lei de Newton).

É apresentado na Figura 3.3 um cubo infinitesimal no domínio atual submetido a um estado de tensões. Cada face do cubo esta sujeita a uma tensão que pode ser decomposta em três componentes, definidas por σ_{ij} , em que o índice i denota o plano atuante e o índice j a direção da componente.

Figura 3.3 – Estado de tensões em elemento infinitesimal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O estado de tensão, ou tensor de tensões de Cauchy, sendo este um tensor simétrico ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$), é expresso em notação tensorial dado por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1y_1} & \sigma_{y_1y_2} & \sigma_{y_1y_3} \\ \sigma_{y_2y_1} & \sigma_{y_2y_2} & \sigma_{y_2y_3} \\ \sigma_{y_3y_1} & \sigma_{y_3y_2} & \sigma_{y_3y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

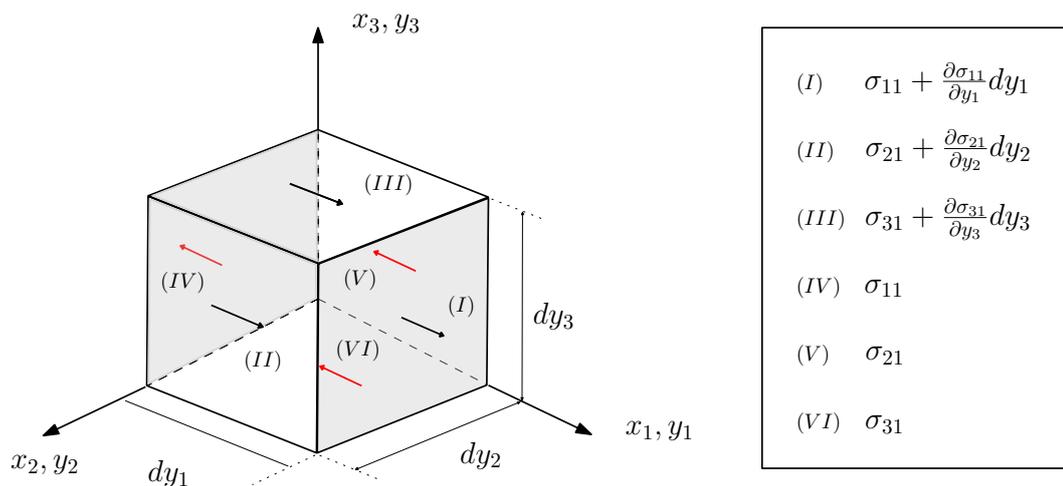
3.4.2 Equilíbrio Euleriano

A partir da segunda lei de Newton a descrição do equilíbrio na configuração atual e a quantidade de movimento, estende-se o volume infinitésimo como porção do contínuo, de modo a verificar a variação de qualquer grandeza.

O equilíbrio para uma direção é composto pela atuação de uma componente σ_{ij} e na sua face oposta do infinitésimo ocorre uma tensão dada por $\sigma_{ij} + \sigma_{ij,i} dy_i$, em que a componente $\sigma_{ij,i} dy_i$ contempla a variação infinitesimal para tal direção. Desse modo, verifica-se a variação das componentes de tensão de Cauchy no interior do contínuo, assim como a influência de forças de volume.

Logo, o equilíbrio para as forças na direção y_1 segundo a segunda Lei de Newton e apresentado na Figura 3.4 é dado pela Equação (3.20).

Figura 3.4 – Equilíbrio de tensões na direção y_1 .



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} dy_1 \right) dy_2 dy_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_2} dy_2 \right) dy_1 dy_3 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_3} dy_3 \right) dy_1 dy_2 + \dots$$

$$b_1 dy_1 dy_2 dy_3 = \sigma_{11} dy_1 dy_2 dy_3 + \sigma_{21} dy_1 dy_2 dy_3 + \sigma_{31} dy_1 dy_2 dy_3 + \rho \ddot{y}_1 dy_1 dy_2 dy_3 \quad (3.20)$$

em que b_1 representa a força de volume no infinitesimal para a direção y_1 .

Simplificando a Equação (3.20) e alterando a definição de $dy_1 dy_2 dy_3$ para volume do infinitésimo dV_1 de forma a facilitar a visualização da exclusão do termo dV_1 , obtém-se:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_3} + b_1 \right) = \rho \ddot{y}_1. \quad (3.21)$$

tal dedução é equivalente para as outras duas direção, resultando em:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y_3} + b_2 \right) &= \rho \ddot{y}_2 \\ \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial y_3} + b_3 \right) &= \rho \ddot{y}_3. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nesse contexto, a equação diferencial obtida pelo equilíbrio local segundo a conservação da quantidade de movimento, em notação dyadica e indicial, representa matematicamente o equilíbrio euleriano local ou no ponto contínuo, conforme Equação (3.23).

$$\nabla_y \cdot \sigma + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{y}} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ji,j} - b_i = \rho \ddot{y}_i. \quad (3.23)$$

sendo ∇_y o divergente do tensor de tensões em relação a configuração deformada, \mathbf{b} as forças de volume, ρ a massa específica e $\ddot{\mathbf{y}}$ a aceleração. Ao integrar a Equação (3.23) em relação ao domínio Ω_1 , tem-se:

$$\int_{\Omega_1} \nabla_y \cdot \sigma dV_1 + \int_{\Omega_1} \mathbf{b} dV_1 = \int_{\Omega_1} \rho \ddot{\mathbf{y}} dV_1 \quad (3.24)$$

em que, pelo Teorema de Gauss aplicando apenas na primeira parcela da Equação 3.24, de modo a transformar uma integral de volume em relação a função a ser integrada em uma integral de superfície Γ_1 dada pelo produto interno desta função (σ) com seu versor normal (\mathbf{n}_1) a superfície, de modo a se obter a Equação (3.25).

$$\int_{\Gamma_1} \sigma \cdot \mathbf{n}_1 da_1 + \int_{\Omega_1} \mathbf{b} dV_1 = \int_{\Omega_1} \rho \ddot{\mathbf{y}} dV_1 \quad (3.25)$$

3.4.3 Equilíbrio Lagrangiano

Para o equilíbrio em sua forma Lagrangiana, retoma-se a formula de Nanson já apresentada conforme Equação (3.18) e aplicando-a na primeira parcela referente a superfície Γ_1 da Equação (3.25) e nas demais parcelas a mudança de volume entre as configurações conforme definição (3.14), obtendo portanto a Equação (3.26).

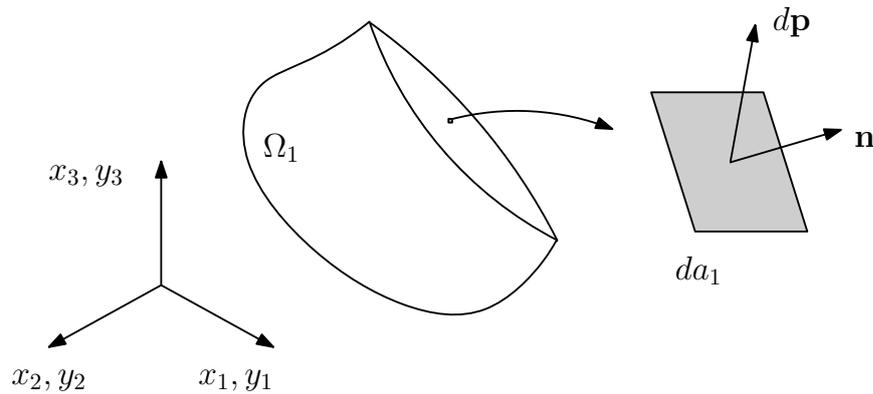
$$\int_{\Gamma_0} (J\sigma \mathbf{A}^{-1}) \cdot \mathbf{n}_0 da_0 + \int_{\Omega_0} J\mathbf{b} dV_0 = \int_{\Omega_0} J\rho \ddot{\mathbf{y}} dV_0 \quad \text{onde: } \rho_0 = J\rho. \quad (3.26)$$

Caso as forças de volume sejam conservativas, implica-se que pela conservação de massa que $\mathbf{b}_0 = J\mathbf{b}$. Nessa abordagem, toma-se como necessário a definição do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie (\mathbf{P}), sendo caracterizado para representação em função do tensor de *Cauchy* (σ).

Portanto, define-se que para um corpo em equilíbrio, as resultantes de força em uma área infinitesimal conforme Figura 3.5 é dada por:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p} da_1 = \mathbf{p}_0 da_0, \quad (3.27)$$

Figura 3.5 – Equilíbrio em área de corpo seccionado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

sendo \mathbf{p} a força de superfície na configuração atual e \mathbf{p}_0 na configuração inicial. Todas as forças são consideradas como conservativas. A força \mathbf{p} em função do tensor $\boldsymbol{\sigma}$ é:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}_1. \quad (3.28)$$

Assim, obtém-se a Equação (3.29), ao aplicar (3.28) em (3.27).

$$\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}_1 da_1 = \mathbf{P}^T \mathbf{n}_0 da_0 \quad (3.29)$$

portanto, o tensor \mathbf{P} representa a força atual em relação a área inicial. Aplicando a Fórmula de Nanson na Equação (3.29), obtém-se:

$$\mathbf{P} = J \mathbf{A}^{-T} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.30)$$

assim, dada a sua não simetria do tensor \mathbf{P} devido a \mathbf{A}^{-1} , pode apresentar nove componentes totalmente distintas. Portanto, de modo a representar este tensor de forma simétrica, tem-se que:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{A}^T \quad (3.31)$$

em que \mathbf{S} é definido como tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Desse modo, obtém-se:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T = J \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}^{-T}, \quad (3.32)$$

e assim, demonstra-se que o tensor \mathbf{S} é simétrico, útil para a abordagem Lagrangiana com seu conjugado energético, porém, não tem significado físico. A tensão de *Cauchy* expressa em relação ao tensor \mathbf{S} , é denotada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T. \quad (3.33)$$

Ao reformular a Equação (3.26) em relação a configuração inicial, substituindo os termos Eulerianos, têm-se:

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{n}_0 d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{\mathbf{y}} d\Omega_0, \quad (3.34)$$

em que a Equação (3.34) representa o equilíbrio global Lagrangiano, em termo de tensor \mathbf{P} . Aplicando o teorema de Gauss e a arbitrariedade do volume na Equação (3.34), pode-se obter o equilíbrio local Lagrangiano na Equação (3.35).

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial P_{ji}}{\partial x_j} + b_i = \rho_0 \ddot{y}_i. \quad (3.35)$$

A Equação (3.35) pode ser expressa também na forma:

$$\nabla_0 \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^s) + \mathbf{b}_0^s = \rho_0^s \ddot{\mathbf{y}}^s, \quad (3.36)$$

no qual o índice s referência o problema tratado no âmbito da mecânica dos sólidos. Esse índice será adequado para a devida descrição das equações na mecânica dos meios porosos saturados bifásicos.

3.5 CONSERVAÇÃO DE MASSA

Dada a consideração de não geração ou perda de massa de um material (i.e sem crescimento ou degradação), a massa do domínio sólido (m^s) passa a ser constante e a mesma deve ser conservada. Nesse contexto, o balanço de massa ou equilíbrio de massa pode ser descrito pela Equação (3.37).

$$\frac{dm^s}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho^s d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \dot{\rho}^s + \rho^s \nabla \cdot \dot{\mathbf{y}}^s d\Omega_t = 0 \quad (3.37)$$

em que ρ^s é a densidade da fase sólida. A consideração de conservação de massa na fase sólida e expressando a correlação entre a massa em diferentes instantes, têm-se que:

$$\rho_0^s d\Omega_0 = \rho^s d\Omega_t \quad (3.38)$$

sendo $\rho_0^s = J\rho^s$, e portanto, utilizando o Teorema de Reynolds na Equação (3.37) obtém-se a Equação (3.39).

$$\frac{dm^s}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} J\rho^s d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \dot{\rho}_0^s d\Omega_0 = 0 \quad (3.39)$$

Assim, o balanço de massa escrito em sua configuração atual ou inicial devem ser válidas, sendo representadas pelas Equações (3.40) e (3.41), respectivamente.

$$\dot{\rho}^s + \rho^s \nabla \cdot \dot{\mathbf{y}}^s = 0 \quad (3.40)$$

$$\dot{\rho}_0^s = 0 \quad (3.41)$$

3.6 PRINCÍPIO DA ESTACIONARIDADE DA ENERGIA MECÂNICA

A energia mecânica total de um sistema conservativo é determinada pelas parcelas: energia de deformação, potencial e cinética, apresentadas respectivamente na Equação (3.42).

$$\Pi = \Pi_{def} + \Pi_{ext} + \Pi_{cin} \quad (3.42)$$

em que Π corresponde à energia mecânica total, Π_{def} é a energia de deformação, Π_{ext} refere-se à energia potencial das forças externas e Π_{cin} representa a energia cinética.

Pelo princípio da estacionariedade da energia mecânica, a energia armazenada em um corpo tende a assumir um valor de mínimo local ao atingir o equilíbrio entre as forças presentes no sistema. A relação de equilíbrio dinâmico é então determinada com base no princípio da estacionariedade da energia potencial total. Esse princípio estabelece que a primeira variação do funcional de energia deve ser nula para qualquer parâmetro de que Π é dependente (LANCZOS, 1986).

Assim, a condição de estacionariedade pode ser expressa segundo a Equação (3.43).

$$\delta\Pi = (\delta\Pi_{def} + \delta\Pi_{ext} + \delta\Pi_{cin}) = \left(\frac{\partial\Pi_{def}}{\partial y_i} + \frac{\partial\Pi_{ext}}{\partial y_i} + \frac{\partial\Pi_{cin}}{\partial y_i} \right) \delta y_i = 0 \quad (3.43)$$

em que δy_i é a variação das posições. Associando as Equações (3.35) e (3.43), o equilíbrio do corpo pode ser determinado conforme a Equação (3.44).

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_0} (-\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}^T - \mathbf{b}_0 + \rho_0 \ddot{\mathbf{y}}) \delta \mathbf{y} \, d\Omega_0. \quad (3.44)$$

O termo $(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\bullet))$ refere-se ao divergente na configuração inicial, equivalente a $(\nabla_0 \cdot (\bullet))$. Segundo Coda (2018) após algumas manipulações algébricas na Equação (3.44), esta passa a ser reescrita como:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_0} (\mathbf{P}^T : \delta \mathbf{A}) \, d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} \mathbf{p}_0 \, d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \delta \mathbf{y} \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho^0 \ddot{\mathbf{y}} \delta \mathbf{y} \, d\Omega_0 = 0. \quad (3.45)$$

Devido a simetria de $\boldsymbol{\sigma}$, resultando na simetria de \mathbf{S} , a primeira parcela da Equação (3.44) pode ser decomposta em:

$$\mathbf{P}^T : \delta \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{A} = (\mathbf{A}^T \delta \mathbf{A}) : \mathbf{S}, \quad (3.46)$$

e portanto, \mathbf{P} é o conjugado de \mathbf{A} , porém, não são adequados por \mathbf{P} ser não simétrico e \mathbf{A} não ser uma medida de deformação objetiva. Sendo assim:

$$(\mathbf{A}^T \delta \mathbf{A}) : \mathbf{S} = (\mathbf{A} \delta \mathbf{A})^T : \mathbf{S} = \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} : \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^T \cdot \delta \mathbf{A} + \delta \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) : \mathbf{S} = \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}. \quad (3.47)$$

Portanto, o tensor \mathbf{S} é o conjugado energético da deformação de Green-Lagrange \mathbf{E} . Assim, a Equação (3.44) é reescrita na forma adequada para o desenvolvimento do método dos elementos finitos em descrição Lagrangiana Total, baseada em posições, conforme:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_0} (\mathbf{S} : \delta \mathbf{E}) \, d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} \mathbf{p}^0 \delta \mathbf{y} \, d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}^0 \delta \mathbf{y} \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho^0 \ddot{\mathbf{y}} \delta \mathbf{y} \, d\Omega_0 = 0. \quad (3.48)$$

3.6.1 Energia específica de deformação

A energia de deformação é a energia armazenada no corpo ao se deformar, sendo uma das parcelas da energia mecânica. Desta forma, neste item é abordado de forma simplificada os conceitos referentes à energia de deformação por unidade de volume desenvolvida em um corpo qualquer.

Assim, a energia específica de deformação (u_e) é dada pelo trabalho por unidade de volume gerado por uma tensão nominal (σ_0) ao promover uma deformação no meio, de acordo com a Equação (3.49).

$$u_e = \int_0^\varepsilon \sigma_0(\varepsilon) d\varepsilon \quad (3.49)$$

Ao aplicar a operação de derivada na Equação (3.49), em relação a medida de deformação, obtém-se a Equação 3.50.

$$\sigma_0 = \frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon} \quad (3.50)$$

Dois são as conclusões com a Equação (3.50). A primeira é que, se existir uma expressão na qual pode-se obter explicitamente a energia específica de deformação, é possível estabelecer relações entre tensão-deformação, isto é, torna-se possível a formulação de leis constitutivas que descrevam seu comportamento físico. A segunda conclusão é que a tensão é conjugada energética da deformação.

3.6.2 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

As leis constitutivas estabelecem uma relação entre as grandezas de tensão e deformação, e descrevem a resposta do material em relação às solicitações mecânicas impostas. Segundo, Coimbra (1978) o comportamento macroscópico de um material pode ser descrito por meio de equações constitutivas que representam as propriedades inerentes de um corpo.

Para os sólidos deformáveis, as leis constitutivas podem ser deduzidas a partir da energia específica de deformação. Nesse contexto, o tensor constitutivo elástico tangente de quarta ordem (\mathbb{C}) pode ser determinado efetuando-se a segunda derivada da energia específica de deformação em relação à correspondente medida de deformação, como apresentado na Equação (3.7), em que empregou-se a deformação de Green-Lagrange (\mathbf{E}).

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial^2 \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} \quad (3.51)$$

O modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff relaciona linearmente a medida de deformação de Green com o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, seu conjugado energético e é o caso mais simples de lei hiperelástica.

Para um material isotrópico e pequenas deformações, a expressão da energia de deformação é dada por:

$$u_e^{SVK}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (3.52)$$

Aplicando o conceito de conjugado energético e derivando-se a energia específica de deformação se obtém o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, conforme expresso na Equação (3.53).

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} \right) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} : \mathbb{C} : \mathbf{E} + \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbb{I}) = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (3.53)$$

em que \mathbb{I} é um tensor identidade de quarta ordem. O tensor constitutivo elástico para o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff pode ser escrito conforme a Equação (3.54).

$$\mathbb{C} = 2G\mathbb{I} + \lambda\mathbb{I} \quad (3.54)$$

em que ν é o coeficiente de poisson e G e λ referem-se ao módulo de elasticidade transversal e constante de Lamé, dados pelas Equações (3.55) e (3.56), respectivamente.

$$G = \frac{\mathbb{E}}{2(1 + \nu)} \quad (3.55)$$

$$\lambda = \frac{\nu\mathbb{E}}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.56)$$

em que \mathbb{E} é o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de *Young*.

Portanto, utilizando as Equações (3.53) e (3.54), tem-se a relação entre \mathbf{S} e \mathbf{E} .

$$\mathbf{S} = 2G\mathbf{E} + \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbb{I}. \quad (3.57)$$

Em notação de *Voigt*, o tensor constitutivo de SVK é escrito como uma matriz, enquanto os tensores de segunda ordem são escritos como vetores. Desse modo, para materiais isótopos, as componentes do estado de tensão são expressas conforme:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

Para a consideração de Estado Plano de Deformação (EPD) em sólidos bidimensionais, esta passa a ser definida como:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

Já para sólidos bidimensionais em Estado Plano de Tensão, é descrito como:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \bar{\lambda} & 0 \\ \bar{\lambda} & 2G + \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

em que:

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, \quad (3.61)$$

e para $\nu = 0$, tem-se que EPD é equivalente ao EPT.

Esse modelo se propõe como uma alternativa para a descrição de materiais hiperelásticos, porém deve ser usado apenas em casos de pequenas deformações, pois não impede a degeneração do material quando submetido à grandes deformações de compressão (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013)

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

Para a mecânica dos sólidos, tradicionalmente no MEF os parâmetros são definidos como os deslocamentos nodais na solução do problema. Como ampliação desenvolvida pelos trabalhos de Bonet *et al.* (2000) e Coda (2003), as variáveis nodais do problema são aplicados em relação as posições nodais (MEFP), utilizando uma descrição Lagrangiana para análise não linear de estruturas.

Para embasamento teórico, a principal referência utilizada quanto aos conceitos do MEFP é o texto de Coda (2018), sendo a referência vinculada à disciplina Introdução à Dinâmica Não Linear de Estruturas Reticuladas Bidimensionais: Uma Abordagem Energética Baseada no MEF, ministrada pelo professor Titular Humberto Breves Coda, no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC – USP.

Ao final desta seção, alguns exemplos de validação são apresentados a fim de evidenciar a adequada implementação da formulação. E portanto, demonstrar a eficiência do MEFP no comportamento de sólidos elásticos bidimensionais para diferentes técnicas temporais.

4.1 ELEMENTO FINITO BIDIMENSIONAL

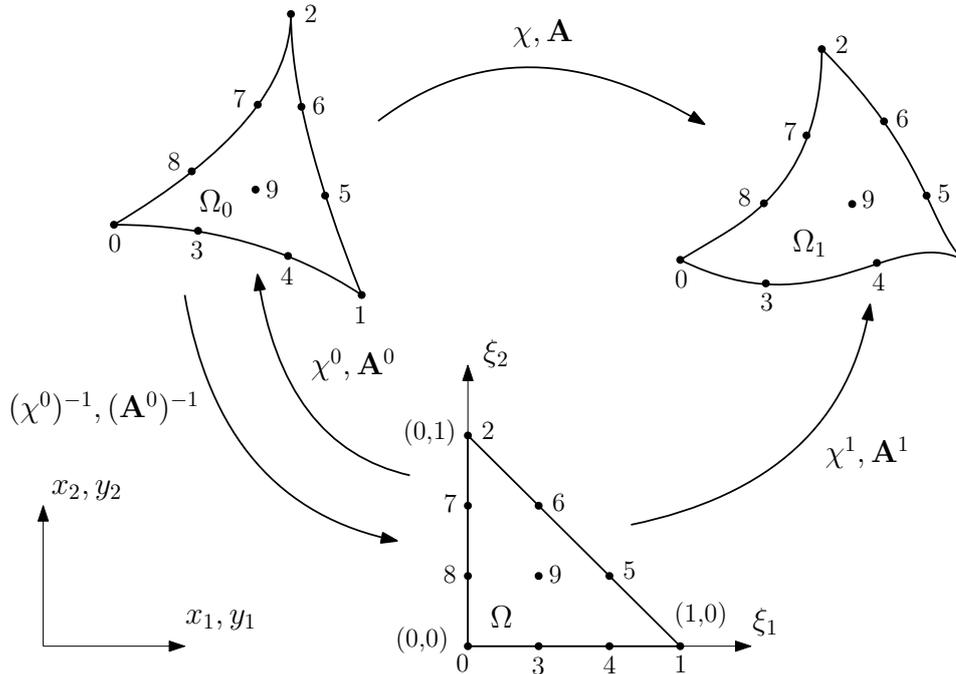
Esta seção aborda a formulação do MEFP aplicado ao elemento finito bidimensional triangular com dois graus de liberdade associados a cada nó, empregando os conceitos desenvolvidos no capítulo de Mecânica dos Sólidos relacionados aos fundamentos da mecânica do contínuo.

Portanto, tomando-se um elemento finito representado no espaço bidimensional, associa-se uma distribuição de pontos para discretizar sua configuração inicial Ω_0 , e ao se aplicar a função mudança de configuração χ (desconhecida a priori) é possível determinar a configuração atual Ω_1 do elemento, decorrente das ações atuantes no sólido.

Nesse contexto, cria-se uma configuração auxiliar Ω inserida em um espaço adimensional capaz de descrever as configurações iniciais e atuais a partir de funções aproximadoras (i.e. funções de forma), em que as posições nodais passam a ser escritas em função das coordenadas adimensionais do elemento auxiliar, conforme esquematizado na Figura 4.1. Nesta Figura é ilustrado para um elemento finito de aproximação cúbica, podendo ser aplicada para qualquer grau de aproximação.

Portanto, define-se que Ω representada por \mathbf{x} é mapeada a partir das coordenadas ξ_1 e ξ_2 da configuração auxiliar adotada no espaço adimensional. O mapeamento é realizado por intermédio dos polinômios de Lagrange, neste modelo, também conhecidos simplesmente como funções de forma (N_l). No MEF, os campos de incógnitas são representados pela combinação

Figura 4.1 – Mapeamento das posições nodais para o elemento finito triangular



Fonte: Elaborada pelo autor.

linear de N_i , em que os parâmetros (termos constantes) são os próprios valores assumidos pela função aproximada nos pontos base da aproximação.

Pela mesma definição já apresentada na Equação (3.1), o mapeamento para a configuração inicial é descrito na Equação (4.1).

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = \chi^0(\xi_1, \xi_2) = N_l(\xi_1, \xi_2)\mathbf{x}_l \quad (4.1)$$

em que χ^0 refere-se à função de mapeamento do espaço adimensional para a configuração inicial, $N_l(\xi_1, \xi_2)$ representa as funções de forma aplicadas nas coordenadas ξ_1 e ξ_2 , e \mathbf{x}_l corresponde às coordenadas do nó l em sua configuração inicial.

De forma semelhante, define-se as posições $\mathbf{y}(\xi_1, \xi_2)$ correspondentes à configuração atual em função das coordenadas da configuração auxiliar, conforme Equação (4.2).

$$\mathbf{y}(\xi_1, \xi_2) = \chi^1(\xi_1, \xi_2) = N_l(\xi_1, \xi_2)\mathbf{y}_l \quad (4.2)$$

sendo χ^1 a função de mapeamento do espaço adimensional para a configuração atual e \mathbf{y}_l refere-se às coordenadas do nó l em sua configuração atual, sendo as coordenadas de interesse na análise.

De modo a se determinar a configuração atual, a mudança de configuração do estado inicial para o atual pode ser entendida como sendo a composição dos mapeamentos, conforme Equação (4.3).

$$\chi = \chi^1 \cdot (\chi^0)^{-1} \quad (4.3)$$

Assim, o gradiente de χ também pode ser definido por uma função composta, a partir da Equação (4.4).

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (4.4)$$

em que \mathbf{A}^0 é o gradiente da função mudança de configuração inicial e \mathbf{A}^1 da atual, definidos pelas Equações (4.5) e (4.6), respectivamente.

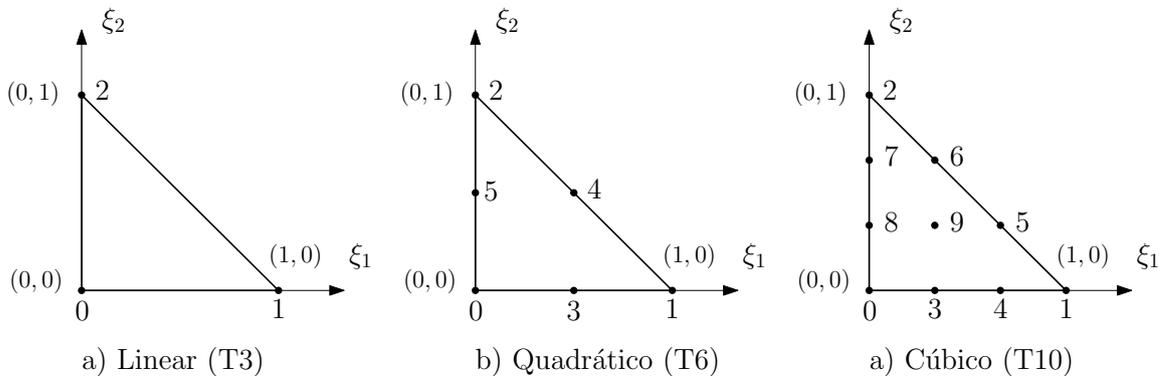
$$A_{ij}^0 = \frac{\partial \chi^0}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} (N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}_l) = \frac{\partial N_l}{\partial \xi_j} \mathbf{x}_l \quad (4.5)$$

$$A_{ij}^1 = \frac{\partial \chi^1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} (N_l(\xi_1, \xi_2) \mathbf{y}_l) = \frac{\partial N_l}{\partial \xi_j} \mathbf{y}_l \quad (4.6)$$

Vale ressaltar que a operação inversa de \mathbf{A} é de fácil desenvolvido, visto que se trata de uma matriz numérica de ordem 2 para o caso 2D e de ordem 3 para o caso 3D.

Referente ao elemento finito, a implementação é desenvolvida para as três aproximações comumente utilizadas na literatura, sendo elas a linear (T3), quadrática (T6) e cúbica (T10), conforme ilustrado na Figura (4.2).

Figura 4.2 – Elementos finitos triangulares bidimensionais



Fonte: Elaborada pelo autor.

Esse tipo de elemento tem um bom tratamento para geometrias curvas. No caso da aproximação cúbica, essa apresenta pontos de inflexão e portanto, garante uma precisão maior com menor nível de refinamento, em relação a aproximação quadrática.

4.2 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

A energia de deformação U desenvolvida no corpo é determinada a partir do somatório da contribuição de cada elemento finito ($\Pi_{def,i}^{elem}$), de acordo com a Equação (4.7).

$$\Pi_{def} = \sum_{i=1}^{N_{elem}} \Pi_{def,i}^{elem} \quad (4.7)$$

Assim, a energia de deformação (Π_{def}^{ele}) desenvolvida para um elemento finito é dada segundo a Equação (4.8).

$$\Pi_{def}^{elem} = \int_{\Omega_0} u_e^{SVK} d\Omega_0, \quad (4.8)$$

em que a energia específica de deformação u_e^{SVK} é integrada na configuração indeformada Ω^0 , por se tratar de uma formulação Lagrangiana total. A partir da lei constitutiva de SVK a energia específica de deformação pode ser escrita por meio da Equação (4.9), para sólidos bidimensionais sujeitos ao estado plano de tensão (EPT).

$$u_e^{SVK} = \frac{G}{(1-\nu^2)} \{E_{11}^2 + E_{22}^2 + 2\nu E_{11}E_{22} + (1-\nu^2)(E_{12}^2 + E_{21}^2)\}. \quad (4.9)$$

E para o estado plano de deformação (EPD) pela Equação (4.10)

$$u_e^{SVK} = \frac{G}{(1-2\nu)} \{(1-\nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2) + 2\nu E_{11}E_{22} + (1-2\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2)\}. \quad (4.10)$$

Nesse contexto, obtém-se a energia de deformação integrando-se no domínio do espaço paramétrico auxiliar (ou homogêneo), conforme a Equação (4.11).

$$\Pi_{def,i}^{elem} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} u_e^{SVK}(\xi_1, \xi_2) J_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (4.11)$$

De modo a mudar o domínio de integração, determina-se o Jacobiano da transformação do mapeamento da configuração inicial para a configuração auxiliar (J_0), calculado conforme Equação (4.12).

$$J_0(\xi_1, \xi_2) = \det(\mathbf{A}^0). \quad (4.12)$$

No entanto, a solução analítica das integrais possui elevado grau de complexidade, motivando o emprego da integração numérica como estratégia de solução. Assim, as integrais são solucionadas utilizando a quadratura de Hammer, a qual pode ser encontrada em [Reddy \(2006\)](#), de acordo com a Equação (4.13).

$$\Pi_{def,i}^{elem} = \sum_{i=1}^{Nph} u_e^{SVK}(\xi_1, \xi_2) J_0(\xi_1, \xi_2) w_i, \quad (4.13)$$

em que Nph é o número de pontos de integração e w_i refere-se ao peso associado ao ponto de integração.

4.3 EQUILÍBRIO DE FORÇAS

Retomando a Equação (3.43) e o princípio da estacionariedade da energia mecânica, tem-se que para cada nó α e direção i do domínio discretizado a equação de equilíbrio dinâmico é definido na Equação (4.14), em sua forma semi-discreta. (i.e. discretização espacial).

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{y}_i^\alpha} = \mathbf{f}_{int}^\alpha + \mathbf{f}_{ext}^\alpha + \mathbf{f}_{iner}^\alpha, \quad (4.14)$$

sendo os vetores definidos por:

$$\mathbf{f}_{int}^\alpha = \frac{\partial \Pi_{def}}{\partial \mathbf{y}^\alpha}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{f}_{ext}^\alpha = \frac{\partial \Pi_{ext}}{\partial \mathbf{y}^\alpha} e \quad (4.16)$$

$$\mathbf{f}_{iner}^\alpha = \frac{\partial \Pi_{cin}}{\partial \mathbf{y}^\alpha}, \quad (4.17)$$

em que cada uma das equações representam as forças internas, externas e cinéticas de cada nó α .

4.3.1 Forças Internas

Conforme já definido na primeira parcela da Equação (3.48), as forças internas para um elemento finito são determinadas conforme Equação (4.18)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{int}^\alpha = \frac{\partial \Pi_{def}}{\partial \mathbf{y}_i^\alpha} &= \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}_i^\alpha} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \frac{\partial u_e^{SVK}(y_{kl})}{\partial y_{ij}} d\Omega_0 = \dots \\ &\sum_{p=1}^{Nph} \frac{\partial u_e^{SVK}(y_{kl}(\xi_1^p, \xi_2^p))}{\partial y_{ij}} J_0(\xi_1^p, \xi_2^p) w_p, \end{aligned} \quad (4.18)$$

os índices k e l referem-se aos nós e i e j as direções. A parcela referente à derivada de u_e^{SVK} em relação às posições do elemento finito, define-se a Equação (4.19), em notação dyadica e indicial.

$$\frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial y_{ij}} = \frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial E_{kl}} : \frac{\partial E_{kl}}{\partial y_{ij}} = S_{kl} : \frac{\partial E_{kl}}{\partial y_{ij}}. \quad (4.19)$$

Neste momento, é necessário se definir a primeira derivada de \mathbf{E} em relação as posições nodais. Pela regra da cadeia, o tensor de deformação de *Green* em relação ao tensor de *Cauchy-Green* por:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_{ij}} = \frac{\partial}{\partial y_{ij}} \left(\frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial y_{ij}}, \quad (4.20)$$

substituindo a derivada de \mathbf{C} em relação aos parâmetros nodais (posições), têm-se:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_{ij}} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{A}^0)^{-T} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^T}{\partial y_{ij}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-T} \cdot (\mathbf{A}^1)^T \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)}{\partial y_{ij}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \right). \quad (4.21)$$

Já a derivada do gradiente do mapeamento da configuração atual pode ser determinado de acordo com a Equação (4.22).

$$\frac{A_{kl}^1}{\partial y_{ij}} = \frac{\partial}{\partial y_{ij}} \left(\frac{\partial N_m}{\partial \xi_l} y_{mk} \right) = N_{m,l} \frac{\partial y_{mk}}{\partial y_{ij}} = N_{m,l} \delta_{im} \delta_{jk} = N_{i,l} \delta_{jk}. \quad (4.22)$$

Neste desenvolvimento optou-se por proceder com uma notação mista de modo a facilitar o entendimento da formulação, em que \mathbf{E} , \mathbf{C} , \mathbf{A}^0 e \mathbf{A}^1 são matrizes de ordem 2. Para maiores informações ver [Coda \(2018\)](#).

4.3.2 Forças Externas

A partir da segunda e terceira parcela da Equação (3.48), forças de superfície e de volume, define-se as forças externas para um elemento finito de acordo com a Equação (4.23) seguindo o princípio da interpolação ($\mathbf{y} = N^\alpha \mathbf{y}^\alpha$), considerando a inclusão da energia potencial de forças nodais concentradas.

$$(\mathbf{f}_{ext}^\alpha)_{el} = \frac{\partial \Pi_{ext}}{\partial \mathbf{y}_i^\alpha} = -\mathbf{f} - \int_{\Gamma_0} N^\alpha \mathbf{p}_0 d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} N^\alpha \mathbf{b}_0 d\Omega_0. \quad (4.23)$$

Considerando apenas que os vetores de carregamento \mathbf{p}_0 e \mathbf{b}_0 são definidos na configuração inicial pela descrição utilizada, sendo representados por simplicidade como \mathbf{p} e \mathbf{b} .

Para forças variáveis, interpola-se os vetores de modo a se obter valores nodais equivalente, conforme apresentado na Equação (4.24).

$$(\mathbf{f}_{ext}^\alpha)_{el} = -\mathbf{f}^\beta - \int_{\Gamma_0} N^\alpha N^\beta \mathbf{p}^\beta d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} N^\alpha N^\beta \mathbf{b}^\beta d\Omega_0. \quad (4.24)$$

4.3.3 Forças Inerciais

Por fim, com a última parcela da Equação (3.48), define-se o vetor de forças inerciais para um elemento finito por meio de sua forma integral e por integração numérica.

$$(\mathbf{f}_{iner}^\alpha)_{el} = \frac{\partial \Pi_{iner}}{\partial \mathbf{y}_i^\alpha} = \int_{\Omega_0} \rho^0 \ddot{\mathbf{y}} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 N^\alpha N^\beta \ddot{\mathbf{y}} d\Omega_0 = \dots \quad (4.25)$$

$$t \cdot \rho_0 \left(\sum_{p=1}^{Nph} N^\alpha N^\beta J_0 w_p \right),$$

em que t é a espessura do elemento finito fora do plano, para o caso 2D. Portanto, conforme apresentado na Equação (4.25), a matriz de massa é constante ao longo do tempo. Recordar-se das interpolações para aproximação com as funções de forma, no campo de posição e aceleração.

$$\mathbf{y} = N^\alpha \mathbf{y}^\alpha \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{y}} = N^\alpha \ddot{\mathbf{y}}^\alpha. \quad (4.26)$$

Na forma matricial, as forças inerciais são portanto definidas por:

$$\{\mathbf{f}_{iner}\} = [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{y}}\} \quad (4.27)$$

em que $[\mathbf{M}]$ é a matriz de massa do elemento finito. De modo a contemplar a devida visualização e entendimento, a matriz de massa consistente é aproximada para um elemento T3 é:

$$[\mathbf{M}] = \int_{\Omega_0} \rho_0 \begin{bmatrix} N^0 N^0 & 0 & N^0 N^1 & 0 & N^0 N^2 & 0 \\ 0 & N^0 N^0 & 0 & N^0 N^1 & 0 & N^0 N^2 \\ N^1 N^0 & 0 & N^1 N^1 & 0 & N^1 N^2 & 0 \\ 0 & N^1 N^0 & 0 & N^1 N^1 & 0 & N^1 N^2 \\ N^2 N^0 & 0 & N^2 N^1 & 0 & N^2 N^2 & 0 \\ 0 & N^2 N^0 & 0 & N^2 N^1 & 0 & N^2 N^2 \end{bmatrix} d\Omega_0. \quad (4.28)$$

Em alguns casos específicos, adota-se a inclusão da matriz de amortecimento ($[C]$), seguindo o mesmo princípio de construção matricial da matriz de massa e troca do termo de densidade por um fator de amortecimento, e portanto, a Equação (4.27) para a ser expressa pela Equação (4.29).

$$\{\mathbf{f}_{iner}\} = [M]\ddot{\mathbf{y}} + [C]\{\dot{\mathbf{y}}\}. \quad (4.29)$$

Neste trabalho optou-se por mostrar uma forma geral da força inercial, com a inclusão das forças de amortecimento proporcionais a velocidade, porém não foi aplicado a nenhum exemplo de validação. Esta tem o efeito de amortecimento da resposta dinâmica, aproximando-a da resposta estática pelo amortecimento de *Rayleigh*.

4.3.4 Matriz Hessiana

Nesta seção é recordado a expressão referente ao equilíbrio dinâmico conforme apresentado na Equação (4.14), em que define-se um vetor resíduo (\mathbf{g}) a partir do sistema não linear, definido em notação mista como.

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{f}_{int} + \mathbf{f}_{ext} + \mathbf{f}_{cin} = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}_i^\alpha} d\Omega_0 + .. \\ &(-\mathbf{f} - \int_{\Gamma_0} N^\alpha \mathbf{p}^0 d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} N^\alpha \mathbf{b}_0 d\Omega_0) + M\ddot{\mathbf{y}} + C\dot{\mathbf{y}} = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Para forças externas conservativas, ou seja, independentes da quaisquer mudança de posição, a matriz Hessiana completa (ou rigidez tangente) é obtida pela segunda variação da energia potencial total, resultando desta forma a seguinte Equação (4.31).

$$[\mathbf{H}] = H_{ij} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 \Pi_{def}}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial^2 \Pi_{ext}}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial^2 \Pi_{cin}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 \Pi_{def}}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial^2 \Pi_{cin}}{\partial y_i \partial y_j}. \quad (4.31)$$

A segunda derivada da energia de deformação, que pode ser entendida como rigidez tangente da parcela estática (\mathbf{H}^{est}) é apresentada na Equação (4.32).

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{est} &= \frac{\partial^2 \Pi_{def}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{y}} = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{y}^\alpha} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}^\beta} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}^\alpha \mathbf{y}^\beta} \right) d\Omega_0 = .. \\ &\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y_i^\alpha} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_j^\beta} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} \right) d\Omega_0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Conforme Equação (4.32), o termo $\partial \mathbf{S} / \partial \mathbf{E}$ toma-se necessário, sendo ele definido por:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}}, \quad (4.33)$$

sendo $\partial \mathbf{S} / \partial \mathbf{E}$ o operador consistente da lei constitutiva utilizada, no caso \mathbb{C} , já apresentado na Seção 3.6.2.

Assim como abordado anteriormente, tem-se a necessidade de efetuar a integração numérica sob os pontos de *Hammer*. A segunda derivada da energia específica de deformação, a partir da Equação (4.19), para o elemento finito é dado na Equação (4.34) em notação mista.

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial^2 u_e^{SVK}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_i^\alpha} : \frac{\partial^2 u_e^{SVK}}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_j^\beta} + \frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta}. \quad (4.34)$$

substituindo a segunda derivada da energia específica de deformação pelo tensor constitutivo elástico de quarta ordem (\mathbb{C}), enquanto sua primeira derivada é substituída pelo tensor \mathbf{S} , resultando na Equação (4.35).

$$\frac{\partial^2 u_e^{SVK}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} = \frac{\partial^2 u_e^{SVK}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_i^\alpha} : \mathbb{C} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_j^\beta} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta}. \quad (4.35)$$

A primeira derivada da deformação de *Green* (\mathbf{E}) já definida a partir da Equação (4.21), define-se neste momento o termo referente a sua derivada segunda, apresentado na Equação (4.36).

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^0)^{-T} \cdot \frac{\partial^2 (\mathbf{A}^1)^T}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} \cdot (\mathbf{A}^1) \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + \\ (\mathbf{A}^0)^{-1} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^T}{\partial y_i^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial y_j^\beta} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + \\ (\mathbf{A}^0)^{-1} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^T}{\partial y_j^\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial y_i^\alpha} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + \\ (\mathbf{A}^0)^{-1} \cdot (\mathbf{A}^1)^T \cdot \frac{\partial^2 (\mathbf{A}^1)}{\partial y_j^\beta \partial y_i^\alpha} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Conforme definido na Equação (4.22), tendo valor constante dado pela primeira derivada, têm-se que a segunda derivada de \mathbf{A}^1 é nula, e dessa forma:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^0)^{-1} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^T}{\partial y_i^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial y_j^\beta} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + \\ (\mathbf{A}^0)^{-1} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^T}{\partial y_j^\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial y_i^\alpha} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Portanto, a Equação (4.32) refere-se a Hessiana do problema estático. As demais derivadas referentes as forças inerciais serão descritas nas técnicas de discretização temporal, por sua dependência no campo de velocidade e aceleração.

4.4 MÉTODO DE SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES - SISTEMA QUASE ESTÁTICO

A solução de problemas não lineares depende de métodos numéricos para solução do sistema de equações de equilíbrio, sendo a técnica adotada para a análise quase-estática descrita

na Seção 4.4.1 é o de Newton-Raphson (NR). De acordo com [Bathe \(2014\)](#), o método de NR é uma técnica amplamente utilizada em análises numéricas não lineares.

O método NR consiste na determinação das raízes de equações ou sistemas de equações não lineares através de um processo iterativo baseado em etapas de previsão linear e correção não linear, seguidos de um teste de convergência, sendo este dependente do modelo construído e finalidade, conforme desenvolvimento. O processo iterativo tem como finalidade aproximar a solução tentativa à solução real respeitando uma tolerância pré-fixada ([CHAPRA; CANALE, 2011](#)).

4.4.1 Método de Newton-Raphson

O procedimento empregado baseia-se no método incremental iterativo de Newton-Raphson, em que a configuração de equilíbrio do problema físico é determinada a partir de uma posição tentativa, sendo tomada inicialmente como sendo a posição de equilíbrio do passo anterior, portanto, para a primeira tentativa a configuração inicial.

Para análises quase-estáticas, a solução do sistema não linear é determinada com a aplicação dos carregamentos de forma gradual, ou seja, subdivide-se o problema em um número de incrementos de carga e encontra-se a configuração de equilíbrio aproximada ao final de cada incremento, de modo a determinar a trajetória de equilíbrio da estrutura. Caso seja necessário, técnicas de continuação são adotadas para contornar pontos críticos no caminho de equilíbrio e descrever fenômenos como *snap throw* e *snapback*.

Portanto, a condição necessária para o equilíbrio estático, desprezando o termo de forças inerciais, pode ser escrita por meio da variação da energia mecânica total do sistema, de acordo com a Equação (4.38) e tendo as posições como incógnitas do problema.

$$g_i = \frac{\partial \Pi}{\partial y_i^\alpha} = \mathbf{f}_{int}^\alpha + \mathbf{f}_{ext}^\alpha = 0_i, \quad (4.38)$$

em que o vetor g_i é nulo se o equilíbrio for atendido, caso contrário, é chamado de vetor de desbalanceamento mecânico. Assim, o problema se resume na determinação das raízes do sistema de equações não lineares.

Expandindo g_i em série de Taylor na vizinhança da posição tentativa y_i^k , obtém-se a Equação (4.39).

$$g_i(y_i^{k+1}) = g_i(y_i^k) + \left. \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right|_{y_i^k} \Delta y_j + O_i^2 = 0_i, \quad (4.39)$$

desprezando os termos de ordem superior da série de Taylor representados por O_i^2 , resulta-se na Equação (4.40).

$$g_i(y_i^{k+1}) = \left. \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right|_{y_i^k} \Delta y_j = \left. \frac{\partial^2 \Pi_{def}}{\partial y_i \partial y_j} \right|_{y_i^k} \Delta y_j = -H_{ij}^{est} \Delta y_j, \quad (4.40)$$

em que o vetor Δy_j representa a correção da posição e H_{ij}^{est} é a Hessiana ou matriz de rigidez tangente do problema estático, conforme já apresentada na Equação (4.32).

A solução tentativa obtida na iteração corrente é corrigida por meio da Equação (4.41). O processo de solução do sistema não linear é repetido até ocorrer a convergência, satisfeita quando os valores de Δy_j assumirem valores suficientemente pequenos e o critério de tolerância admitido for aceito, conforme Equação (4.42).

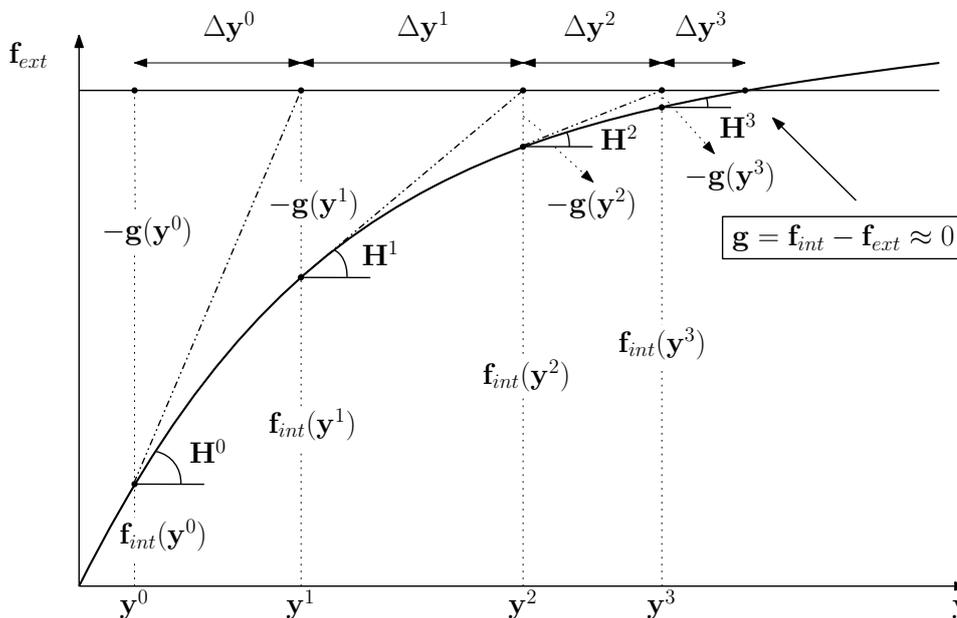
$$y_j^{k+1} = y_j^k + \Delta y_j \quad e \quad (4.41)$$

$$tol > \frac{\|\Delta y_j\|}{\|x_j\|}, \quad (4.42)$$

em que $\|\Delta y_j\|$ e $\|x_j\|$ são as normas euclidianas do incremento de posição e da posição inicial, respectivamente.

O processo iterativo e incremental de Newton-Raphson é ilustrado na Figura 4.3. De forma simplificada, a solução do sistema não linear consiste em resolver inúmeras vezes um sistema de equações lineares. Sendo necessário a determinação das forças internas e Hessiana do problema.

Figura 4.3 – Processo iterativo e incremental de Newton-Raphson



Fonte: Adaptado de Lacerda (2014).

4.4.2 Implementação computacional

O processo de iteração de Newton-Raphson para o MEF posicional é ilustrado na Figura 4.3 e pelo Algoritmo 1 de forma a esboçar o código computacional desenvolvido em linguagem C++. As variáveis nodais calculadas são projetadas nos nós e exportadas em arquivo de saída para pós-processamento no *software Paraview*.

Algoritmo 1: Código MEF posicional quase-estático por NR;

```

1 Leitura dados de entrada: Propriedades físicas, geométricas, vetores de carregamento e
  tolerância;
2 para cada Incremento de carga faça
3   Cálculo de  $\{\mathbf{f}_{ext}\}$  (4.24);
4   enquanto  $erro > tol$  faça
5     Cálculo de  $\{\mathbf{f}_{int}\}$  (4.18);
6      $\{\mathbf{g}\} \leftarrow \{\mathbf{f}_{int}\} - \{\mathbf{f}_{ext}\}$  (4.38);
7      $[\mathbf{H}^{est}] \leftarrow \partial \mathbf{f}_{int} / \partial \mathbf{y}$  (4.32);
8     para cada Elemento finito 'e' faça
9       para cada Ponto de integração 'p' faça
10        Cálculo de A, J, C e E por (3.2), (3.15), (3.5) e (3.7);
11        Cálculo de S e C;
12        para cada nó  $\alpha$  e direção  $i$  faça
13          Cálculo  $\partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{y}_i^\alpha$  por (4.21);
14           $\{g\}_{q(1-\alpha)+i} \leftarrow \{g\}_{q(1-\alpha)+i} + S_{kl} (\partial E_{kl} / \partial y_i^\alpha) |J^0| \omega_p$ , onde:  $\omega_p$  é o peso do
            ponto de integração p;
15          fim
16          para cada nó  $\beta$  e direção  $i$  faça
17            Cálculo  $\partial \mathbf{S} / \partial \mathbf{y}_j^\beta$  por (4.33);
18            para cada nó  $\alpha$  e direção  $i$  faça
19              Cálculo de  $\partial^2 \mathbf{E} / (\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta)$  por (4.37);
20               $m \leftarrow q(\alpha - 1) + i$ ;
21               $n \leftarrow q(\beta - 1) + j$ ;
22               $[H^{est}]_{mn} \leftarrow [H^{est}]_{mn} + \left( \frac{\partial S_{kl}}{\partial y_j^\beta} \frac{\partial E_{kl}}{\partial y_i^\alpha} + S_{kl} \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} \right) |J^0| \omega_p$ 
23            fim
24          fim
25        fim
26      fim
27      para cada nó  $\alpha$  e direção  $i$  com posição prescrita faça
28        Zerar linha e coluna de índice  $q(\alpha - 1) + i$  em  $[\mathbf{H}^{est}]$  e termo da diagonal
          principal igual a 1;
29         $\{g\}_{N(\alpha-1)+i} \leftarrow (y)_i^{\alpha_{prescrito}} - y_i^\alpha$ ;
30      fim
31      Resolução do sistema linear  $[\mathbf{H}^{est}]\{\Delta \mathbf{y}\} = -\{\mathbf{g}\}$  (4.40);
32      Atualização das posições  $\mathbf{y} \leftarrow \{\mathbf{y}\} + \{\Delta \mathbf{y}\}$  (4.41);
33      Cálculo do erro  $\leftarrow \|\{\Delta \mathbf{y}\}\| / \|\{\mathbf{x}\}\|$  (4.42);
34    fim
35 fim

```

4.5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS ESTÁTICAS

Esta seção é destinada à exposição dos exemplos de validação da formulação desenvolvida para o sistema quase-estático. Portanto, são selecionados dois exemplos objetivando comprovar a eficácia do código, conforme descrito no Algoritmo 1.

O primeiro exemplo tem como objetivo verificar o comportamento não linear geométrico

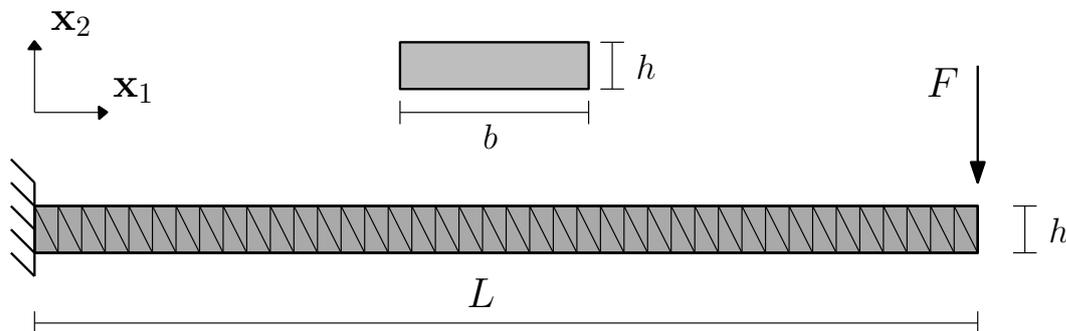
inerente à formulação empregada. Dessa forma, simula-se uma estrutura bidimensional esbelta engastada com aplicação de carga na extremidade. Os resultados obtidos são comparados com a literatura a fim de evidenciar a precisão do código na análise mecânica geometricamente exata de sólidos.

4.5.1 Exemplo 1: Viga engastada esbelta

O primeiro exemplo refere-se a uma estrutura esbelta sujeita à aplicação de uma carga pontual em uma de suas extremidades, conforme ilustrado na Figura 4.4. Este problema foi proposto originalmente por [Mattiasson \(1981\)](#) e posteriormente estudado por [Sanches e Coda \(2017\)](#). Este exemplo foi escolhido com a finalidade de verificar o código desenvolvido aplicado a problemas que envolvem a presença de grandes deslocamentos.

Para a simulação numérica são utilizadas as seguintes propriedades geométricas para a viga: $L = 10$ m, área da seção transversal $A = 23,91$ cm² e momento de inércia da seção transversal $I = 47,619$ cm⁴. Com relação às propriedades do material, o módulo de elasticidade e o coeficiente de poisson são dados, respectivamente, por $E = 21$ MN/cm² (210 GPa) e $\nu = 0,0$. Nessa condição EPD é equivalente a EPT. A tolerância adotada foi de 1×10^{-10} . A malha de elementos finitos do tipo T10 é regular com 80 elementos.

Figura 4.4 – Viga esbelta.



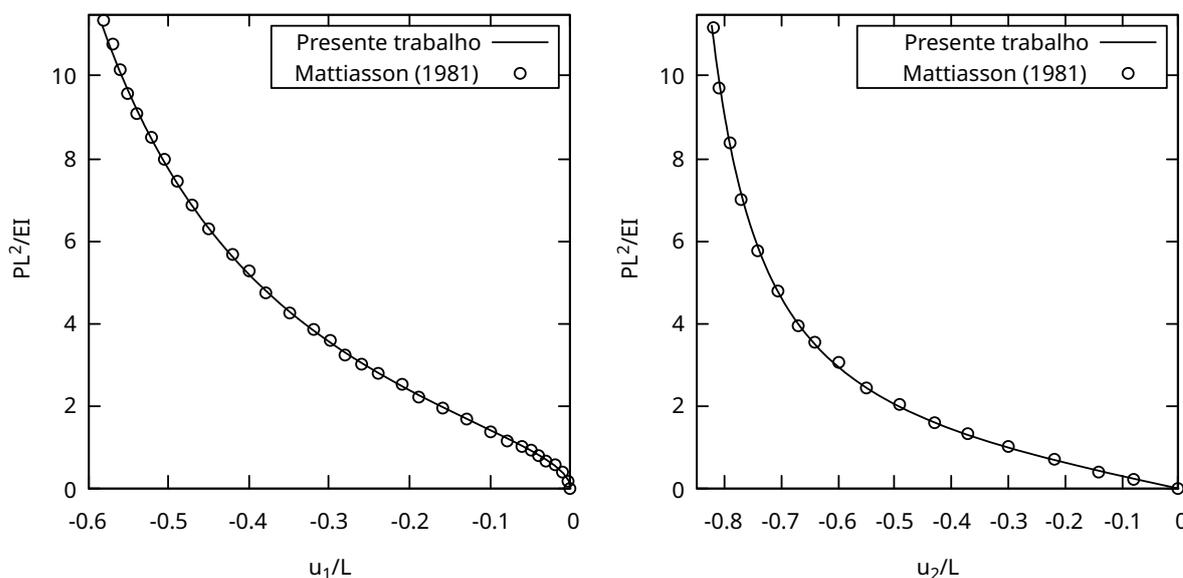
Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 4.5 é apresentada a distribuição do deslocamento horizontal (u/L) e vertical (v/L) adimensionalizado da extremidade livre em função da carga adimensional (PL^2/EI), comparados com a solução numericamente exata obtida por meio de integrais elípticas dadas por [Mattiasson \(1981\)](#). Foram desprezadas as forças de volume (b).

Portanto, ao analisar a Figura 4.5, observa-se que os resultados obtidos estão em conformidade com a solução analítica, demonstrando a validade da implementação na abordagem de problemas sólidos não lineares geométricos.

De modo a ilustrar a projeção do teste analisado no campo de grandes deslocamentos, é apresentado as configurações deformadas em $1/3$, $2/3$ e 1 em relação a força aplicada, sendo estas presentes nos itens a), b), c), d), e) e f) da Figura 4.6. Na primeira coluna os o campo de deslocamentos horizontais e segunda coluna os verticais.

Figura 4.5 – Deslocamentos em viga esbelta.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.6 INTEGRADORES TEMPORAIS

Na análise dinâmica, problemas são considerados transientes, ou seja, as forças inerciais são adicionadas e as forças externas podem variar ao longo do tempo. Conforme apresentado na Equação (4.30), a equação que descreve o equilíbrio dinâmico é dependente do tempo e da configuração geométrica no espaço, em que essas foram discretas até o presente o momento no espaço e contínuas no tempo.

Portanto, necessitando transformar o tempo contínuo em discreto faz-se uso de métodos de macha no tempo. Desse modo, os algoritmos de integração temporal são mecanismos que, gradativamente, em função do tempo, estabelecem soluções aproximadas para as equações diferenciais que regem o problema físico.

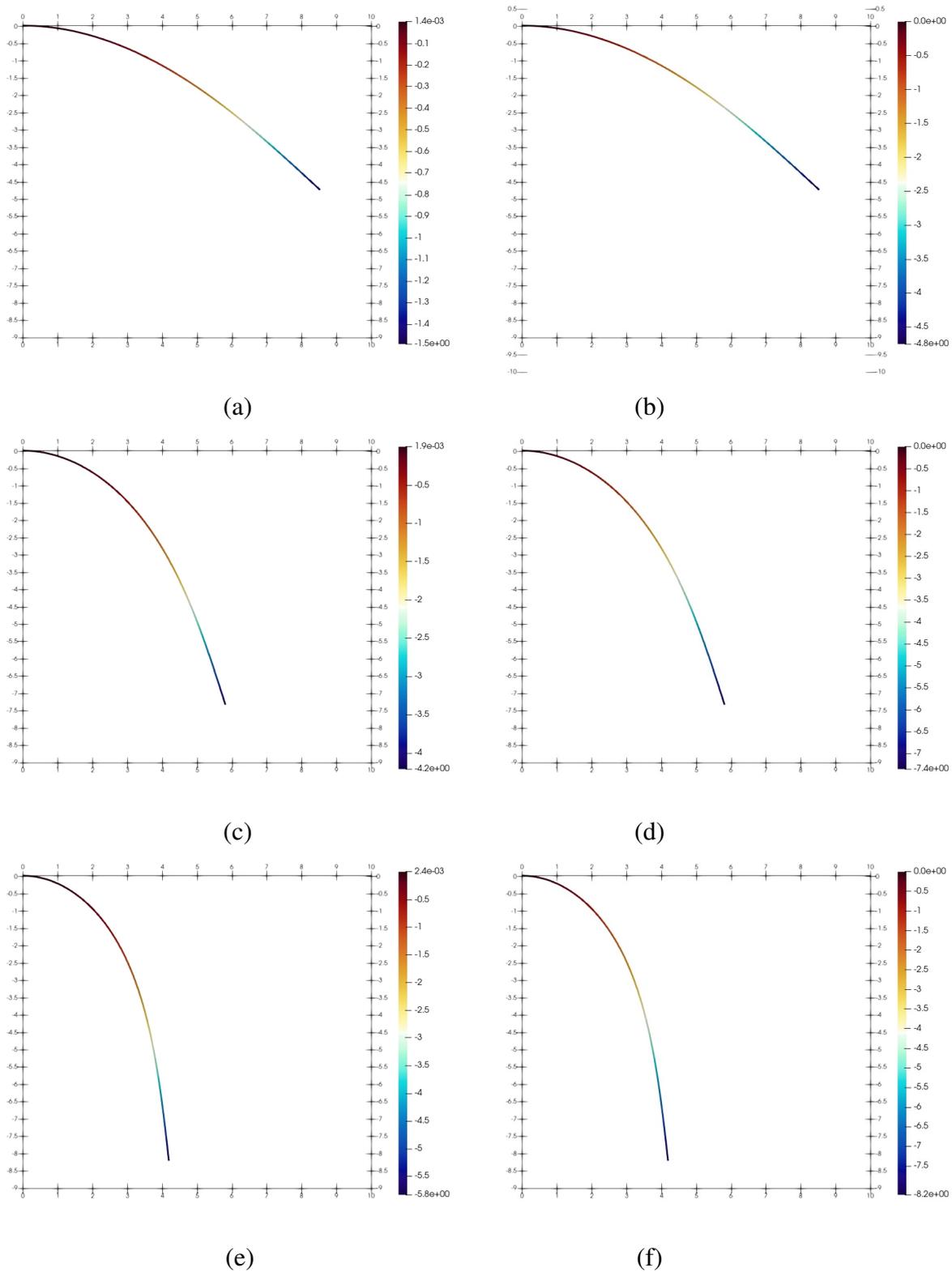
Os integradores temporais podem ser subdivididos dois grandes grupos: métodos explícitos e implícitos. Nos métodos explícitos, a solução no passo atual ($t + \Delta t$) é obtida por meio de condições de equilíbrio do passo anterior. Já nos métodos implícitos, as posições no passo de tempo atual envolvem as velocidades e acelerações do passo corrente.

Referente a estabilidade dos integradores, tais métodos podem ser definidos como estáveis ou instáveis, e classificados como condicional ou incondicional.

Os métodos implícitos são tradicionalmente incondicionalmente estáveis e seu incremento de tempo é prescrito em função da precisão. No caso dos métodos explícitos, estes são condicionalmente estáveis, e seu incremento de tempo passa a ser regido pela estabilidade do algoritmo.

Os procedimentos explícitos são mais adequados para resolução de problemas de propa-

Figura 4.6 – Campo de deslocamentos horizontais e verticais em viga esbelta.



Fonte: Elaborada pelo autor.

gação de onda, enquanto que os esquemas implícitos são mais eficazes para problemas inerciais. No entanto, o custo computacional de ambas as abordagens é influenciada pela topologia da malha de elementos finitos (DOKAINISH; SUBBARAJ, 1989).

Todos os métodos serão descritos nesta Seção em função das posições nodais. Este trabalho foi inicialmente desenvolvido com o algoritmo de *Newmark- β* para integração temporal, e posteriormente desenvolvido para o método do α -Generalizado implícito, tendo em vista um melhor desempenho para problemas altamente não lineares, exemplo de ponto de sela, como no caso dinâmico com contato estrutural.

Cada método tem suas características próprias referente a estabilidade, consistência, precisão e eficiência. Contudo, o método de α -Generalizado possibilita a transição entre diferentes integradores temporais em função de seus parâmetros, descrito na Sub-Seção 4.6.2.

4.6.1 Método de Newmark

O pesquisador N. M. Newmark no ano de 1959 desenvolveu uma família de métodos de tempo baseados nas equações que serão apresentadas a seguir, tendo esta sua eficiência validada em trabalhos como [Coda e Paccola \(2009\)](#), [Sanches e Coda \(2010\)](#), entre outros.

O matriz de massa para o MEFP é contante, e estende-se para a formulação Lagrangiana Total, conservação da quantidade de movimento e de energia para uma maior parcela de problemas na engenharia, podendo ser obtido maiores detalhes no trabalho de [Sanches e Coda \(2013\)](#).

Assim, as aproximações no campo de velocidade e aceleração nos passos de tempo são descritas pelas Equações (4.43) e (4.44), respectivamente.

$$\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{y}_t + \dot{\mathbf{y}}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{y}}_t + \beta \ddot{\mathbf{y}}_{t+1} \right] \Delta t^2, \quad (4.43)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_{t+1} = \dot{\mathbf{y}}_t + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{y}}_t + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{y}}_{t+1}. \quad (4.44)$$

no qual β e γ são parâmetros arbitrários do método que caracterizam a estabilidade e precisão do método. É denotado o índice $t + 1$ e t para o passo de tempo atual e anterior, respectivamente.

O método de *Newmark- β* é um integrador temporal generalizado cujos valores especificados para β e γ permitem realizar tanto integração explícita como implícita (incondicionalmente estável) e atingir convergência de primeira ou de segunda ordem, o que faz que este seja amplamente empregado ([NEWMARK, 1959](#); [BAKER, 1976](#)).

Na família de *Newmark*, variando os valores de β e γ , obtêm-se alguns métodos derivados do método, conforme apresentado na Tabela 1.

Escrevendo uma equação isolando o termo de aceleração, através de manipulações algébricas utilizando a Equação (4.44) obtêm-se a Equação (4.45).

$$\ddot{\mathbf{y}}_{t+1} = \frac{\mathbf{y}_{t+1}}{\beta \Delta t^2} - \frac{\mathbf{y}_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{y}}_t}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{y}}_t. \quad (4.45)$$

As parcelas dos vetores de contribuição dinâmica \mathbf{q}_t e \mathbf{r}_t são dependentes das velocidades, acelerações e posições do passo anterior (i.e, constantes dentro do passo de tempo) e definidos

Tabela 1 – Alguns métodos da família de Newmark.

Método	Tipo	β	γ	Estabilidade	Precisão
Aceleração média (Regra do Trapézio)	Implícito	1/4	1/2	Incondicional	2
Aceleração Linear	Implícito	1/6	1/2	Condicional	2
Fox-Goodwin	Implícito	1/12	1/2	Condicional	2
Diferença Central	Explícito	0	1/2	Condicional	2

Fonte: Adaptado de [Vieira \(2004\)](#).

através das Equações (4.46) e (4.47).

$$\mathbf{q}_t = \frac{\mathbf{y}_t}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{y}}_t}{\beta\Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{y}}_t \quad (4.46)$$

$$\mathbf{r}_t = \dot{\mathbf{y}}_t + (1 - \gamma)\Delta t\ddot{\mathbf{y}}_t \quad (4.47)$$

e assim, velocidade e aceleração podem ser descritos no passo de tempo por:

$$\dot{\mathbf{y}}_{t+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{y}_{t+1} + \mathbf{r}_t - \gamma\Delta t\mathbf{q}_t \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{y}}_{t+1} = \frac{\mathbf{y}_{t+1}}{\beta\Delta t^2} - \mathbf{q}_t, \quad (4.48)$$

podendo a velocidade do tempo atual ser descrita também na forma reduzida como:

$$\dot{\mathbf{y}}_{t+1} = \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{y}}_{t+1} + \mathbf{r}_t. \quad (4.49)$$

Assim, substituindo as Equações (4.46) e (4.47) em (4.30), o equilíbrio dinâmico passa a ser definido em uma forma simplificada na Equação (4.50).

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}_{t+1}) = \left. \frac{\partial \Pi_{def}}{\partial \mathbf{y}} \right|_{t+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2}\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{M}\cdot\mathbf{q}_t + \frac{\gamma\mathbf{C}}{\beta\Delta t}\cdot\mathbf{y}_{t+1} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{r}_t - \gamma\Delta t\mathbf{C}\cdot\mathbf{q}_t - \mathbf{f}_{t+1}^{ext}(t) = 0. \quad (4.50)$$

Retomando a Equação (4.50), expandindo-a em série de Taylor e truncando ao fim da primeira derivada, assim como já realizado na Sub-Seção 4.4.1, obtêm-se a Equação (4.51), descrevendo o equilíbrio encontrando no instante de tempo corrente quando $\mathbf{g}(\mathbf{y}_{t+1}) = 0$, têm-se que:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{H}^{est} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma\mathbf{C}}{\beta\Delta t}, \quad (4.51)$$

logo, o sistema linear para correção da posição no instante de tempo corrente, conforme Equação 4.52.

$$\mathbf{H}\Delta\mathbf{y} = -\mathbf{g}(\mathbf{y}_{t+1}^0), \quad (4.52)$$

em que \mathbf{y}_{t+1}^0 a posição de tentativa, assumida na primeira interação do passo de tempo como \mathbf{y}_t . A posição é atualização conforme Equação (4.41) e (4.42).

Isolando o termo de aceleração da Equação (4.30), têm-se que no primeiro passo de tempo a aceleração deve ser calculada pela Equação (4.53).

$$\ddot{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{f}_{ext(0)} - \mathbf{f}_{int(0)} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_0]. \quad (4.53)$$

4.6.2 Método implícito de α -Generalizado

Inicialmente em [Hilber, Hughes e Taylor \(1977\)](#) foi apresentado um método de integração baseado no método de *Newmark*, denominado HHT- α , que consiste na introdução de um parâmetro de dissipação numérica (α_f) na equação de equilíbrio.

Posteriormente [Wood, Bossak e Zienkiewicz \(1980\)](#) desenvolveram um novo método definido como WBZ- α , introduzindo um parâmetro de amortecimento numérico (α_m) no algoritmo de *Newmark*, alterando os termos referentes as forças inerciais.

Por fim, [Chung e Hulbert \(1993\)](#), apresentaram uma generalização dos algoritmos HHT- α e WBZ- α para mecânica dos sólidos, intitulado de α -Generalizado, que consiste na combinação de ambos os métodos.

Desta forma, de acordo com a formulação para o instante de tempo intermediário, a equação de equilíbrio é modificada da seguinte maneira:

$$\mathbf{g}_{t+1} = \mathbf{f}_{t+1-\alpha_f}^{int} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_{t+1-\alpha_m} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_{t+1-\alpha_f} - \mathbf{f}_{t+1-\alpha_f}^{ext} = \mathbf{0}. \quad (4.54)$$

em que:

$$\ddot{\mathbf{y}}_{t+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m)\ddot{\mathbf{y}}_{t+1} + \alpha_m\ddot{\mathbf{y}}_t, \quad (4.55)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_{t+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)\dot{\mathbf{y}}_{t+1} + \alpha_f\dot{\mathbf{y}}_t, \quad (4.56)$$

$$\mathbf{y}_{t+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)\mathbf{y}_{t+1} + \alpha_f\mathbf{y}_t. \quad (4.57)$$

$$\mathbf{f}_{t+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)\mathbf{f}_{t+1} + \alpha_f\mathbf{f}_t. \quad (4.58)$$

Associando as Equações (4.55), (4.56) e (4.57) ao equilíbrio de forças descrito em instantes de tempo intermediários, obtêm-se a Equação (4.59), descrita em função do passo de tempo atual e anterior.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{t+1} = (1 - \alpha_f)(\mathbf{f}_{t+1}^{int} - \mathbf{f}_{t+1}^{ext}) + \alpha_f(\mathbf{f}_t^{int} - \mathbf{f}_t^{ext}) + (1 - \alpha_m)\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_{t+1} + .. \\ \alpha_m\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_t + (1 - \alpha_f)\mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_{t+1} + \alpha_f\mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_t = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde α_f e α_m são parâmetros de ponderação pré-determinados, que descrevem a dissipação numérica e amortecimento artificial.

Substituindo as expressões da Equação (4.48) em (4.59), resulta-se na Equação (4.60).

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{t+1} = (1 - \alpha_f)(\mathbf{f}_{t+1}^{int} - \mathbf{f}_{t+1}^{ext}) + \alpha_f(\mathbf{f}_t^{int} - \mathbf{f}_t^{ext}) + \left[(1 - \alpha_m)\mathbf{M} \left(\frac{\mathbf{y}_{t+1}}{\beta\Delta t^2} - \mathbf{q}_t \right) \right] + .. \\ \alpha_m\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_t + \left[(1 - \alpha_f)\mathbf{C} \left(\frac{\gamma\mathbf{y}_{t+1}}{\beta\Delta t} + \mathbf{r}_t - \gamma\Delta t\mathbf{q}_t \right) \right] + \alpha_f\mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_t = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Os campos de velocidade e aceleração são determinados assim como no método de *Newmark- β* pelas expressões da Equação (4.48). Nesse contexto, a matriz Hessiana completa

para o problema com o integrador temporal α -Generalizado é descrito na Equação (4.61).

$$\mathbf{H}_{t+1} = \frac{\partial \mathbf{g}_{t+1}}{\partial \mathbf{y}_{t+1}} = (1 - \alpha_f) \mathbf{H}^{est} + (1 - \alpha_m) \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + (1 - \alpha_f) \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t}. \quad (4.61)$$

Ao analisar as Equações (4.60) e (4.61), o integrador passa a ser descrito através de 4 parâmetros ($\alpha_m, \alpha_f, \beta$ e γ). De acordo com [Chung e Hulbert \(1993\)](#), de modo a otimizar a dissipação das altas frequências e garantir consistência e estabilidade, introduziu-se uma relação entre tais parâmetros e um raio espectral da região de alta frequência, conforme expressões definidas na Equação (4.62).

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad \text{e} \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad (4.62)$$

O método α -Generalizado implícito é incondicionalmente estável e apresenta precisão de segunda ordem, devendo ser obedecida a Inequação (4.63).

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2}. \quad (4.63)$$

As máximas dissipações em altas frequências são garantidas pelas Equações (4.64).

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2. \quad (4.64)$$

O raio espectral é descrito no intervalo $\rho_\infty \in [0, 1]$, em que para $\rho_\infty = 0$ corresponde a dissipação numérica total em alta frequência, enquanto $\rho_\infty = 1$ indica ausência de dissipação numérica. Os intervalos correspondentes aos parâmetros do método em função do raio espectral são ilustrados na Figura 4.7.

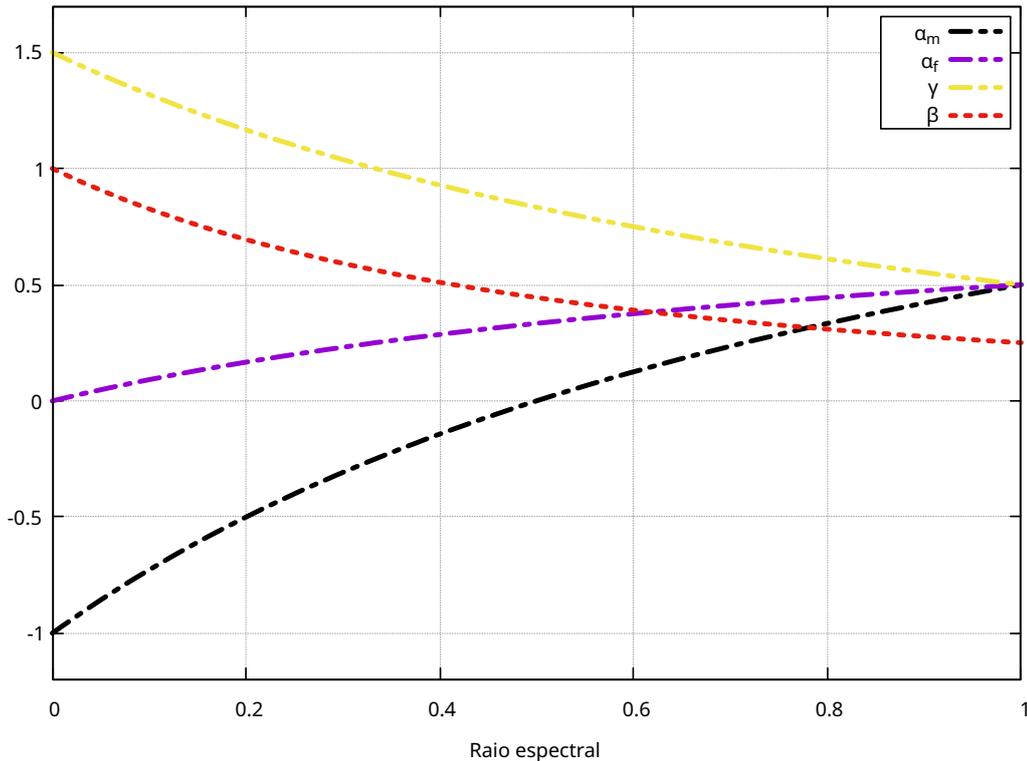
O integrador temporal pode ser visualizado através de um esquema apresentado na Figura 4.8. Percebe-se que pode ocorrer uma defasagem entre os termos inerciais denotados em $t_{i+1-\alpha_m}$ e demais termos $t_{i+1-\alpha_f}$, dependendo diretamente dos parâmetros (α_m, α_f e ρ_∞).

Vale o destaque para o caso de $\alpha_f = 0$ implica no método WBZ- α , e $\alpha_m = 0$ o retorno ao método HHT- α . Já para o uso de $\alpha_m = 0$ e $\alpha_f = 0$ reduz o algoritmo ao método de Newmark (Regra do Trapézio).

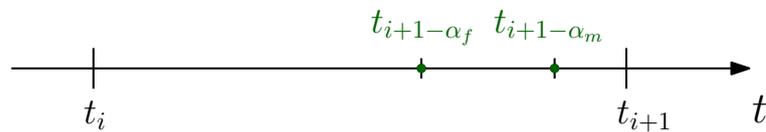
4.7 MÉTODO DE SOLUÇÃO NUMÉRICA - SISTEMA DINÂMICO

O problema dinâmico é associado ao método de Newton-Raphson, definido de forma genérica referente ao equilíbrio dinâmico e resolução do sistema, pois para cada método de integração temporal tem sua particularidade.

Figura 4.7 – Parâmetros em função do raio espectral para mecânica dos sólidos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.8 – Integração temporal via α -Generalizado para mecânica dos sólidos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.7.1 Newton-Raphson associado à análise dinâmica

O processo incremental e iterativo de Newton-Raphson para o MEF posicional em relação ao sistema dinâmico é apresentado no Algoritmo 2 com uso do integrador temporal de *Newmark*.

Para a devida modificação para o uso do integrador temporal α -Generalizado o leitor deve atentar-se aos vetores de contribuição de dinâmica que farão parte da montagem dos vetores de forças inerciais e da Hessiana completa (ver 4.6.2).

4.8 APLICAÇÕES NUMÉRICAS DINÂMICAS

Esta seção é destinada à exposição dos exemplos de validação da formulação dinâmica desenvolvida e integradores temporais implementados em linguagem C++. Para isso, são selecionados três exemplos objetivando comprovar a eficácia do código, abordando cada uma das

Algoritmo 2: Código MEF posicional dinâmico com NR e integrador temporal de *Newmark*;

```

1 Leitura dados de entrada: Propriedades físicas, geométricas, vetores de carregamento e
   tolerância;
2 Cálculo da Matriz de Massa [M] (4.28), Matriz de Amortecimento [C] (caso seja considerado)
   e aceleração inicial  $\{\ddot{\mathbf{y}}_0\}$ (4.53);
3 para cada Passo de tempo faça
4   Cálculo de  $\{\mathbf{f}_{ext}\}$  (4.23);
5   Cálculo de  $\{\mathbf{q}\}_t$  (4.46) e  $\{\mathbf{r}\}_t$  (4.47);
6   enquanto erro > tol faça
7     Cálculo de  $\{\mathbf{f}_{int}\}$  (4.18);
8      $\{\mathbf{g}\} \leftarrow \{\mathbf{f}_{int}\} + \{\mathbf{f}_{iner}\} - \{\mathbf{f}_{ext}\}$  (4.50);
9      $[\mathbf{H}] \leftarrow \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{y}$  (4.51);
10    para cada Elemento finito 'e' faça
11      para cada Ponto de integração 'p' faça
12        Cálculo de A, J, C e E por (3.2), (3.15), (3.5) e (3.7);
13        Cálculo de S e C;
14        para cada nó  $\alpha$  e direção  $i$  faça
15          Cálculo  $\partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{y}_i^\alpha$  por (4.21);
16           $\{g\}_{q(1-\alpha)+i} \leftarrow \{g\}_{q(1-\alpha)+i} + S_{kl} (\partial E_{kl} / \partial y_i^\alpha) |J^0| \omega_p$ , onde:  $\omega_p$  é o peso do
            ponto de integração p;
17        fim
18        para cada nó  $\beta$  e direção  $i$  faça
19          Cálculo  $\partial \mathbf{S} / \partial \mathbf{y}_j^\beta$  por (4.33);
20          para cada nó  $\alpha$  e direção  $i$  faça
21            Cálculo de  $\partial^2 \mathbf{E} / (\partial \mathbf{y}_i^\alpha \partial \mathbf{y}_j^\beta)$  por (4.37);
22             $m \leftarrow q(\alpha - 1) + i$ ;
23             $n \leftarrow q(\beta - 1) + j$ ;
24             $[H]_{mn} \leftarrow [H^{est}]_{mn} + \left( \frac{\partial S_{kl}}{\partial y_j^\beta} \frac{\partial E_{kl}}{\partial y_i^\alpha} + S_{kl} \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} \right) |J^0| \omega_p$ ;
25          fim
26        fim
27      fim
28    fim
29    para cada nó  $\alpha$  e direção  $i$  com posição prescrita faça
30      Zerar linha e coluna de índice  $q(\alpha - 1) + i$  em  $[\mathbf{H}]$  e termo da diagonal principal
        igual a 1;
31       $\{g\}_{q(\alpha-1)+i} \leftarrow (y)_i^{\alpha \text{prescrito}} - y_i^\alpha$ ;
32    fim
33    Resolução do sistema linear  $[\mathbf{H}]\{\Delta \mathbf{y}\} = -\{\mathbf{g}\}$  (4.32);
34    Atualização das posições  $\mathbf{y} \leftarrow \{\mathbf{y}\} + \{\Delta \mathbf{y}\}$ (4.41);
35    Cálculo do erro  $\leftarrow \|\{\Delta \mathbf{y}\}\| / \|\{\mathbf{x}\}\|$ (4.42);
36  fim
37  Cálculo da velocidade  $\{\dot{\mathbf{y}}\}$  (4.43) e aceleração  $\{\ddot{\mathbf{y}}\}$  (4.44);
38 fim

```

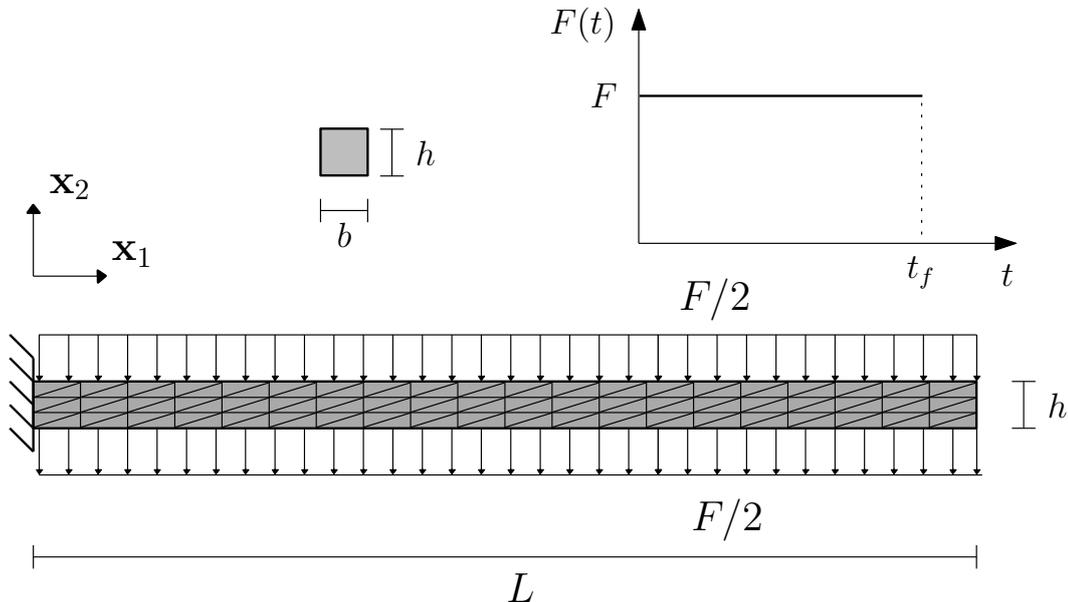
etapas e implementações realizadas.

4.8.1 Exemplo 1: Viga engastada livre com carregamento distribuído

O primeiro exemplo refere-se a uma estrutura esbelta engastada e uma extremidade e livre em outra sujeita à aplicação de um carregamento instantâneo constante. Este problema foi proposto originalmente por [Bathe, Ramm e Wilson \(1975\)](#). Este problema foi escolhido com a finalidade de verificar o código desenvolvido aplicado a problemas que envolvem a presença de grandes deslocamentos com carregamento de superfície.

A geometria e carregamento do problema são apresentados na Figura 4.9, com seção transversal quadrada $b = h = 1$ in, comprimento $L = 10$ in e considera-se estado plano de tensão (EPT). O módulo de elasticidade é $E = 1,2 \cdot 10^4$ lb/in², coeficiente de poisson $\nu = 0,2$ e massa específica $\rho = 10^{-6}$ lb.s²/in⁴. O carregamento é constante de $F = 2,85$ lb/in aplicada subitamente. Foram desprezadas as forças de volume (b).

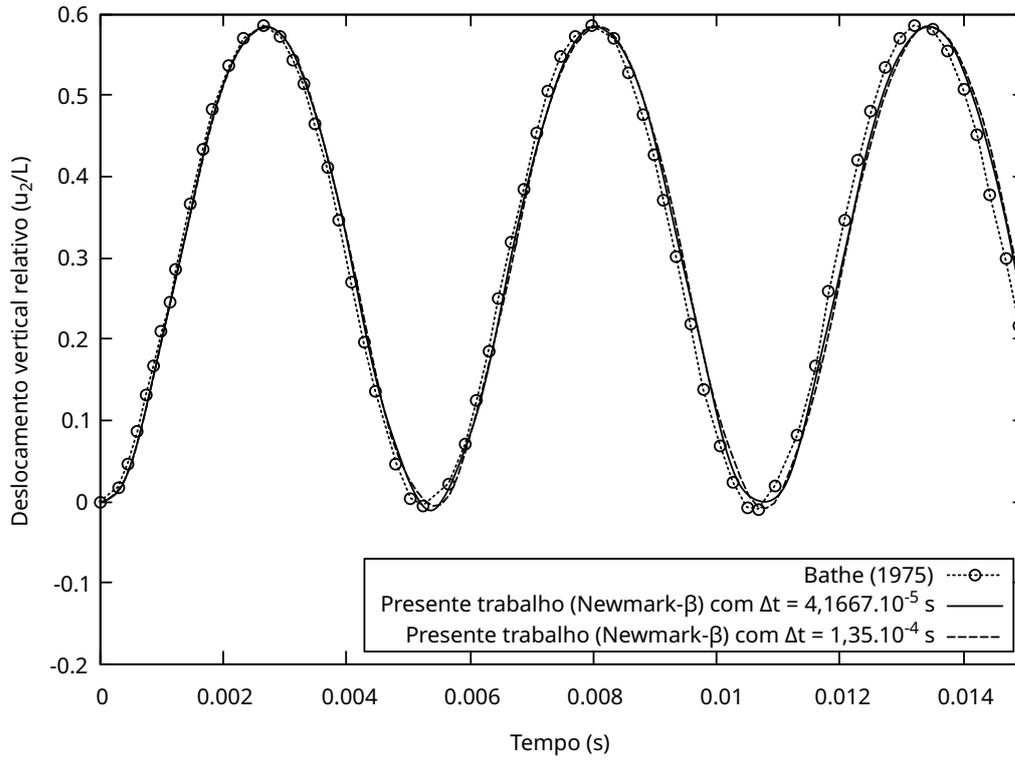
Figura 4.9 – Viga engastada com carregamento distribuído.



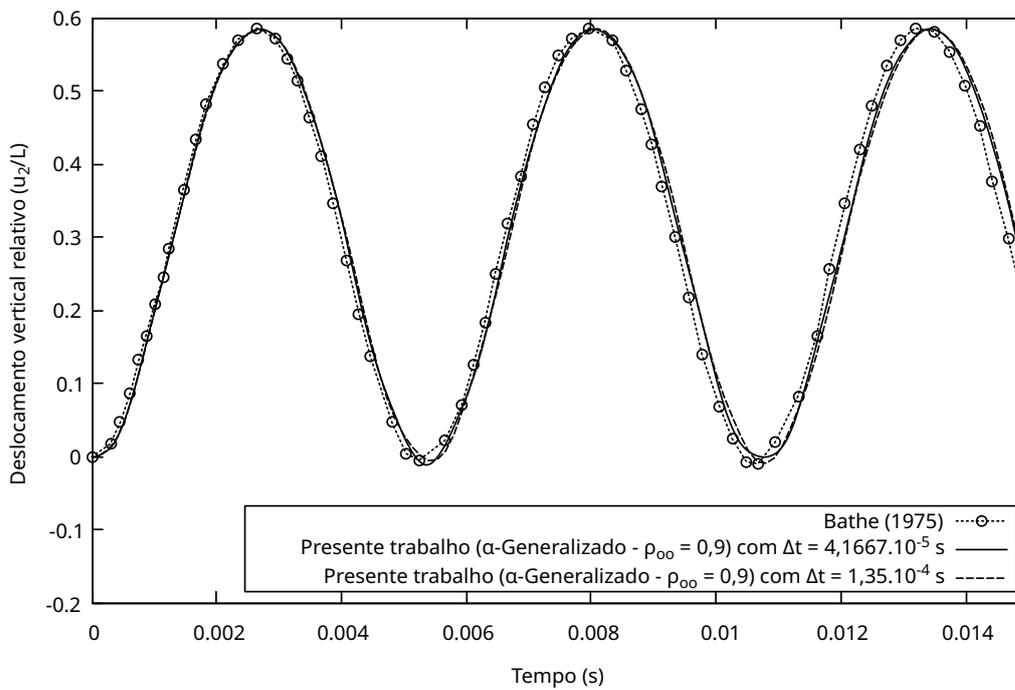
Fonte: Adaptado de [Bathe, Ramm e Wilson \(1975\)](#).

Neste trabalho adotou-se uma discretização com uma malha regular de 120 elementos T10, com dois passos de tempo, $\Delta t = 1,35 \cdot 10^{-4}$ s e $\Delta t = 4,1667 \cdot 10^{-5}$ s e tolerância igual a $1 \cdot 10^{-10}$. É analisado a extremidade livre da viga em função do tempo e os resultados obtidos referente ao deslocamento relativo e o tempo total de análise para o integrador temporal de *Newmark- β* ($\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$) e α -Generalizado, com $\rho_\infty = 0,9$. Os resultados são expostos por meio gráfico nas Figuras 4.10 e 4.11.

Ao analisar a Figura 4.10 é possível notar uma boa concordância com os resultados provenientes de [Bathe, Ramm e Wilson \(1975\)](#) para o integrador temporal de *Newmark- β* e α -Generalizado com $\rho_\infty = 0,9$. Vale ressaltar que a referência utilizou uma discretização de 5 elementos finitos bidimensionais quadrilaterais de 8 nós e diferentes passos de tempo, dado o período fundamental de oscilação da estrutura.

Figura 4.10 – Deslocamento vertical relativo da extremidade (*Newmark- β*).

Fonte: Elaborado pelo autor.

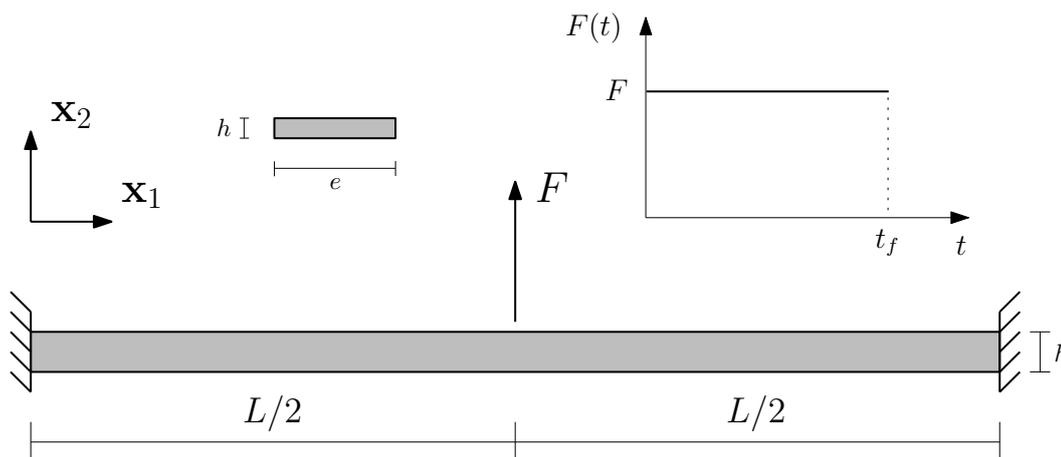
Figura 4.11 – Deslocamento vertical relativo da extremidade - α -Generalizado.

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.8.2 Exemplo 2: Viga biengastada

Neste exemplo, foi proposto por [McNamara \(1974\)](#) e também estudado por [Mondkar e Powell \(1977\)](#) para o caso dinâmico de uma viga bi-engastada submetida a um carregamento concentrado aplicado repentinamente no meio do vão. A geometria do problema, seção transversal, condições de vinculação e tipo de carregamento são apresentados na Figura 4.12.

Figura 4.12 – Viga bi-engastada.



Fonte: Adaptado de [Mondkar e Powell \(1977\)](#).

O comprimento L é de 50,8 cm, $h = 0,3175$ cm, $e = 2,54$ cm, $F = 2846,85$ N/cm, $E = 20,6$ MN/cm² (206,84 GPa), $\nu = 0$, $\rho = 0,00271263$ kg/cm³ (2712,63 kg/m³). Foram desprezadas as forças de volume (b) nesta análise. A discretização adotada consiste em 204 elementos finitos de ordem cúbica (T10) com uma malha regular e 1228 nós. Pela geometria do domínio ser muito esbelta a malha não será apresentada.

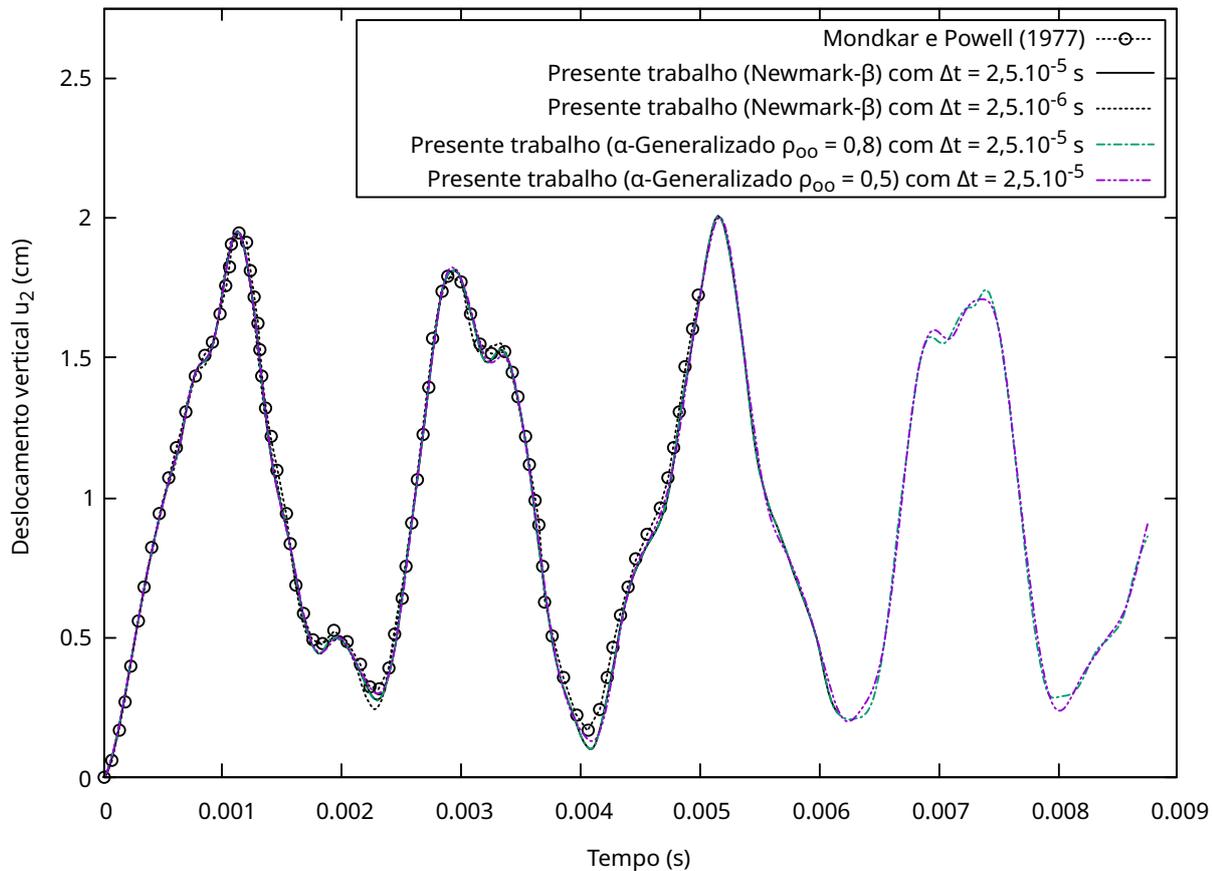
São utilizados dois passos de tempo, $\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-5}$ s e $2,5 \mu\text{s}$, para o integrador temporal de *Newmark* com $\beta = 0,25$ e $\gamma = 0,5$. Já para α -Generalizado utilizou-se o raio espectral igual a $\rho_\infty = 0,8$ e $0,5$.

O deslocamento vertical no centro do vão é apresentado na Figura 4.13, sendo estes comparados com os resultados de [Mondkar e Powell \(1977\)](#), em que se observa uma boa compatibilidade, sendo simulada até um tempo final maior, possibilitando a verificação da amplitude dos deslocamentos.

4.8.3 Exemplo 3: Estrutura engastada em formato de arco elíptico

O terceiro exemplo trata-se de uma estrutura engastada em formato de arco elíptico sujeita ao impacto de uma força F de intensidade 10000 kN constante ao longo de toda a análise. Este problema foi estudado por [Rosa \(2021\)](#) sob estado plano de tensão, de modo a verificar sua implementação computacional para discretização isogeométrica por funções NURBS cúbicas e discretização por elementos finitos triangulares de ordem cúbica.

Figura 4.13 – Deslocamento vertical no centro da viga bi-engastada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

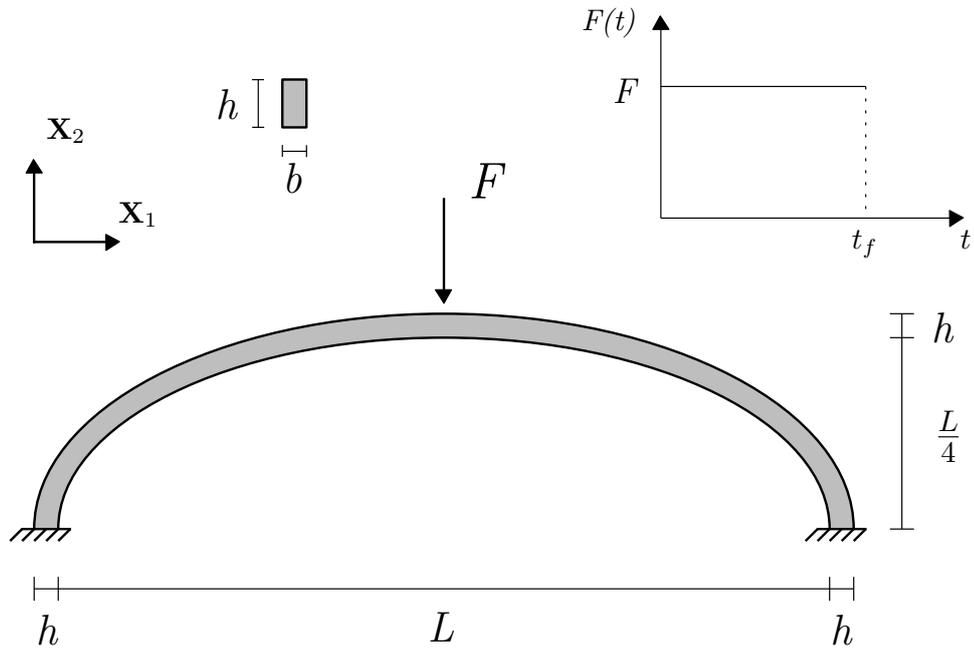
O domínio do problema, suas configurações geométricas e função que descreve o impacto são apresentadas na Figura 4.14. Para as propriedades geométricas, utilizou-se o comprimento interno entre o maior diâmetro da elipse (L) como 10,0 m, largura do arco (h) como 0,3 m e espessura do domínio (b) como 0,1m. Propriedades físicas são: módulo de elasticidade longitudinal $E = 200$ GPa, coeficiente de poisson $\nu = 0,25$ e massa específica $\rho = 7850$ kg/m³.

O domínio do problema foi discretizado em 188 elementos T10 com 998 nós, conforme Figura 4.15. Na análise transiente, utilizou-se a técnica do integrador temporal de *Newmark* com aceleração linear constante, equivalente ao utilizado pela referência. De modo a possibilitar uma sensibilidade da técnica α -Generalizado, variou-se o raio espectral (ρ_∞) induzindo um amortecimento numérico.

Os parâmetros temporais utilizados na simulação numérica foram: 1200 passos de tempo, com incrementos de 0,5 ms, tolerância 1.10^{-11} . Para *Newmark* com aceleração linear constante foi utilizado $\beta = 0,25$ e $\gamma = 0,5$. Já para a técnica α -Generalizado variou-se o raio espectral (ρ_∞) cinco vezes, de 0,5 a 0,9.

As diferentes configurações deformadas do corpo nos tempos 200ms, 300ms, 400ms e 500ms são ilustradas na Figura 4.16. O deslocamento vertical do ponto de aplicação da força em

Figura 4.14 – Viga engastada em formato de arco elítico.



Fonte: Adaptado de Rosa (2021).

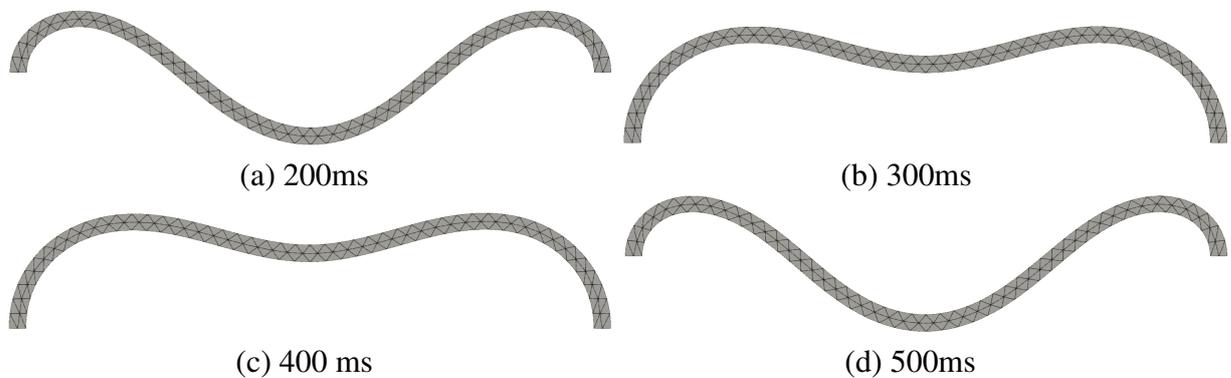
Figura 4.15 – Discretização arco elítico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

função do tempo é apresentada na Figura 4.17 para todas as análises.

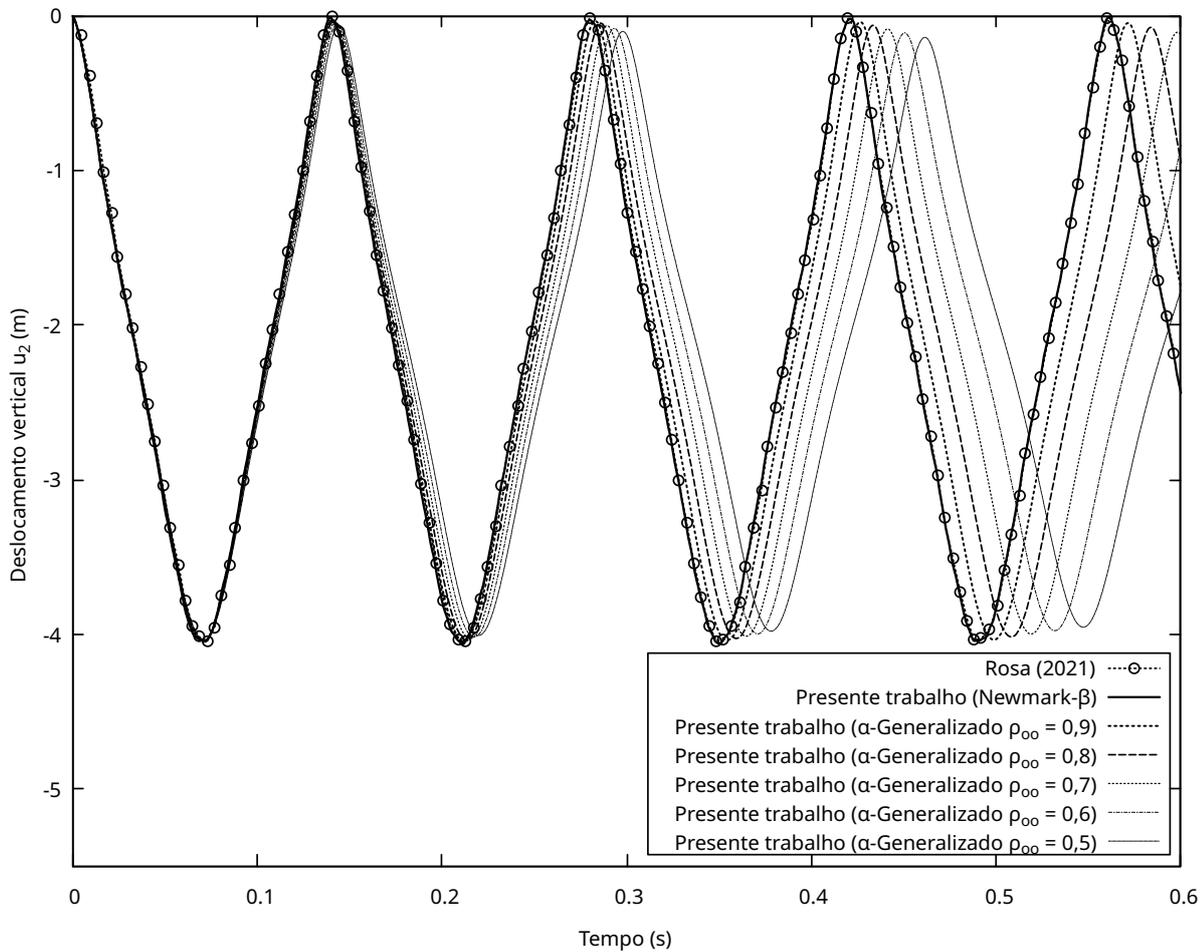
Figura 4.16 – Configurações deformadas em arco elítico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados obtidos segundo 4.17 apresentam boa concordância com a referência utilizando o integrador de *Newmark* para $\beta = 0,25$ e $\gamma = 0,5$. Para o α -Generalizado observa-se

Figura 4.17 – Deslocamento vertical do arco elítico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

um amortecimento numérico induzido, como se esperava, a medida que o raio espectral diminui.

4.9 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

O presente capítulo teve por finalidade a apresentação dos desenvolvimentos matemáticos relacionados ao Método dos Elementos Finitos em sua versão posicional para descrição do problema físico, que será necessário para devida associação no acoplamento entre fase sólida e líquida.

A formulação do elemento finito bidimensional foi deduzida no contexto da elasticidade não linear, apresentando os conceitos referentes à energia específica de deformação, forças internas, forças cinéticas e Hessiana. Os elementos finitos são implementados para os graus de aproximação T3, T6 e T10.

Posteriormente, apresentou-se duas formulações para integradores temporais, *Newmark-β* e *α-Generalizado*, assim como suas associações para a transição do processo de marcha no tempo do método *α-Generalizado*, que possibilita com o controle de seus parâmetros transitar

entre diferentes integradores e dissipação de altas frequências.

Por fim, foram simulados exemplos estáticos e dinâmicos presentes na literatura para atestar a eficiência da ferramenta numérica desenvolvida com o elemento T10. A fim de simular consistentemente o comportamento do problema físico para análise não linear geométrica utilizando o Modelo constitutivo de *Saint-Venant Kirchhoff*.

5 MECÂNICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

Neste capítulo são abordados os conceitos fundamentais referentes à mecânica dos fluidos, com objetivo de propiciar os subsídios necessários para o entendimento do procedimento no acoplamento entre o problema físico sólido e fluído. Como base para o desenvolvimento da teoria exposta, destaca-se que a presente formulação foi utilizada para o desenvolvimento do software pertencente ao grupo de pesquisa GRUMEC do programa de pós-graduação em Engenharia Civil (EESC - USP).

O programa foi desenvolvido considerando as Equações *Navier-Stokes* e Equação da Continuidade com a técnica ALE associado a métodos de estabilização para elementos finitos. Recomenda-se para entendimento e associação sobre os conceitos presentes nesta formulação as referências de [Tezduyar \(2003b\)](#), [Tezduyar e Sathe \(2003\)](#), [Bazilevs, Takizawa e Tezduyar \(2013\)](#) e [Fernandes \(2020\)](#)

No presente trabalho, serão abordados as Equações adaptadas, chamadas de *Navier-Stokes-Brinkamnn*, que em função da porosidade fluída e permeabilidade intrínseca do domínio no qual o fluido esta inserido, pode-se caracterizar as transição entre escoamento de *Darcy*, *Stokes* e de *Navier-Stokes*.

Assim, o principal objetivo deste capítulo consiste no desenvolvimento dos conceitos matemáticos necessários para formulação do problema físico da fase fluída, para posterior associação a poroelasticidade dinâmica com as devidas adaptações das equações de *Navier-Stokes* e da conservação de massa a luz de domínios porosos saturados. A notação das variáveis são adaptadas para facilitar o entendimento do acoplamento proposto.

5.1 FLUIDOS NEWTONIANOS INCOMPRESSÍVEIS

Neste trabalho é considerado o modelo de fluidos Newtonianos incompressíveis, contínuos, relação linear entre o tensor de tensões e de deformações, isotrópicos e, portanto, as leis de deformações são independentes dos eixos para serem expressos.

O tensor de tensão total do fluido (σ^f), ou tensor de *Cauchy*, que associa tensões de cisalhamento com a pressão (p^f), parcela hidrostática. Portanto, a equação constitutiva do modelo é definida na Equação (5.1), referente a parcela hidrostática e desviatória, em notação indicial e tensorial, respectivamente.

$$\sigma_{ij}^f = -p^f \delta_{ij} + \lambda^f \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\mu^f}{\phi^f} \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^f}{\partial x_i} \right) \text{ e } \boldsymbol{\sigma}^f = -p^f \mathbf{I} + \lambda \nabla \mathbf{v}^f \mathbf{I} + \frac{\mu^f}{\phi^f} (\nabla \mathbf{v}^f + \nabla (\mathbf{v}^f)^T) \quad (5.1)$$

em que μ^f é a viscosidade do fluido, ϕ^f é a porosidade do domínio inserido do fluido, δ é o Delta de *Kronecker*, \mathbf{I} é um tensor identidade e \mathbf{v}^f a velocidade do fluido. O parâmetro constitutivo

(λ^f) do modelo segundo a hipótese de *Stokes* vale $-2/(3\mu^f)$, porem sua parcela de contribuição é anulada pela definição de divergência nula de fluidos incompressíveis, e assim podemos simplificar conforme Equação (5.2).

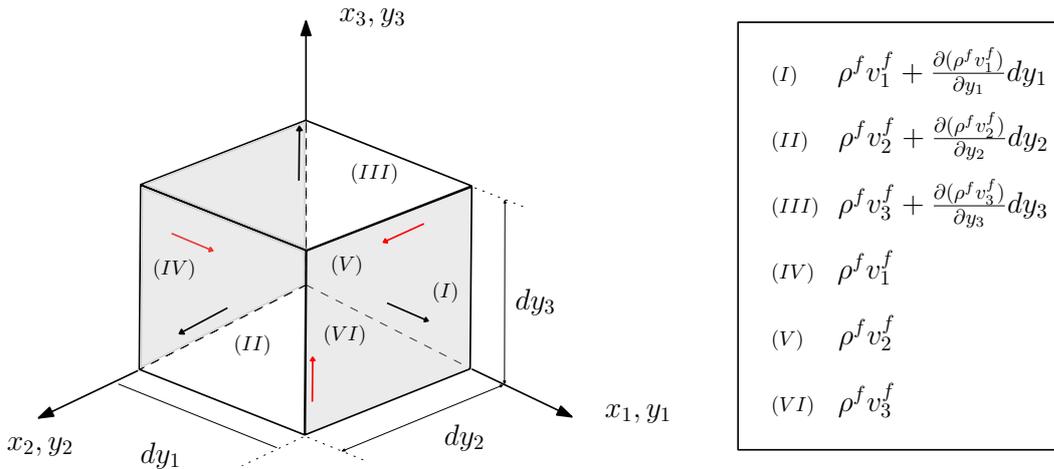
$$\sigma_{ij}^f = -p^f \delta_{ij} + \frac{\mu^f}{\phi^f} \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^f}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}^f = -p^f \mathbf{I} + \frac{\mu^f}{\phi^f} (\nabla \mathbf{v}^f + (\nabla \mathbf{v}^f)^T) \quad (5.2)$$

O efeito da consideração da porosidade e permeabilidade intrínseca será devidamente explicado nos balanços da fase fluida.

5.2 CONSERVAÇÃO DE MASSA

De acordo com a conservação de massa, parte-se do princípio de não criação e não destruição de matéria. Sendo a massa (m^f) do fluido contida em um volume infinitesimal ao longe de um tempo t . É ilustrado na Figura 5.1 o balanço de fluxo de massa em um volume de controle. A partir da Figura 5.1 é possível determinar a variação de massa específica de um

Figura 5.1 – Fluxo mássico em um elemento infinitesimal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

fluido qualquer em função do tempo, de acordo com o balanço da quantidade de entrada e saída em cada face em uma determinada direção, conforme Equação (5.3).

$$\dot{m}_{entrada} - \dot{m}_{saida} = \frac{\partial m^f}{\partial t} = \frac{\partial \rho^f}{\partial t} dy_1 \cdot dy_2 \cdot dy_3 \quad (5.3)$$

Realizando um somatório dos termos de entrada e saída do elemento infinitesimal de controle para determinar a vazão mássica temos que:

$$\begin{aligned} & \rho^f v_1^f dy_2 dy_3 + \left(\rho^f v_1^f + \frac{\partial(\rho^f v_1^f)}{\partial y_1} \right) dy_2 dy_3 + \rho^f v_2^f dy_1 dy_3 + \left(\rho^f v_2^f + \frac{\partial(\rho^f v_2^f)}{\partial y_2} \right) dy_1 dy_3 + \dots \\ & \rho^f v_3^f dy_1 dy_2 + \left(\rho^f v_3^f + \frac{\partial(\rho^f v_3^f)}{\partial y_3} \right) dy_1 dy_2 = \frac{\partial \rho^f}{\partial t} dy_1 dy_2 dy_3. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Simplificando a Equação (5.4), obtemos a Equação (5.5) que é definida como Equação da Continuidade do fluido em Descrição Euleriana.

$$\frac{\partial \rho^f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_1}(\rho^f v_1^f) + \frac{\partial}{\partial y_2}(\rho^f v_2^f) + \frac{\partial}{\partial y_3}(\rho^f v_3^f) = 0, \quad (5.5)$$

em notação tenorial ou indicial, respectivamente, na forma:

$$\frac{\partial \rho^f}{\partial t} + \nabla_y \cdot (\rho^f \mathbf{v}^f) = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \rho^f}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^f v_i^f)}{\partial y_i} = 0, \text{ com } i = 1, 2, 3. \quad (5.6)$$

pela regra do produtos, temos que a segunda parcela da Equação (5.6) é:

$$\frac{\partial(\rho^f v_i^f)}{\partial y_i} = \rho^f \frac{\partial(v_i^f)}{\partial y_i} + v_i^f \frac{\partial \rho^f}{\partial y_j}, \quad (5.7)$$

e ainda, pela definição da Derivada Material, podemos escrever a Equação da Continuidade como sendo:

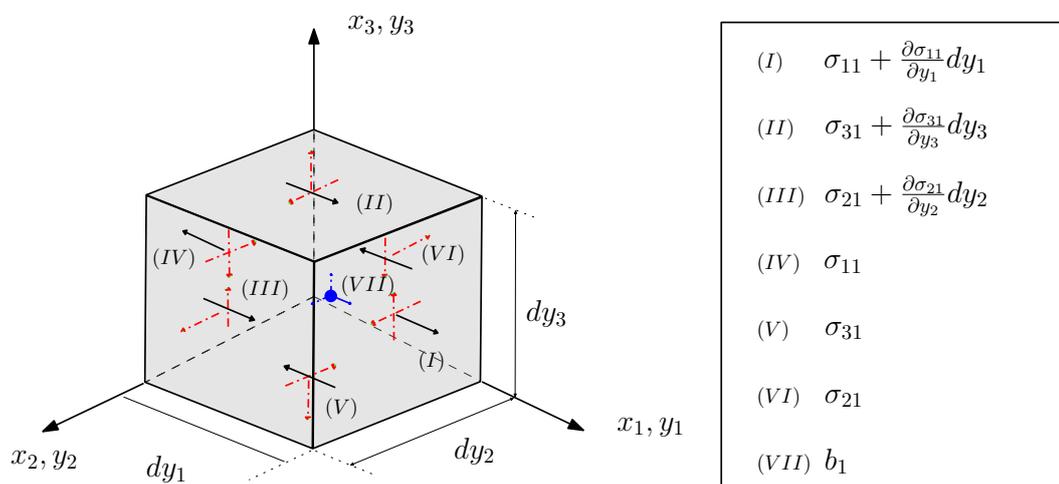
$$\frac{D\rho^f}{Dt} + \rho^f \frac{\partial v_i^f}{\partial y_i} = 0. \quad (5.8)$$

5.3 CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A lei da conservação da quantidade de movimento para um volume de controle infinitesimal estabelece que a taxa de acumulação da quantidade de movimento dentro do volume de controle é igual à taxa do fluxo da quantidade de movimento que entra no volume de controle menos a taxa do fluxo da quantidade de movimento do que sai do volume de controle mais a resultante das forças que atuam no volume de controle (SANCHES, 2022).

A partir das forças que atuam em um elemento infinitesimal em um instante qualquer t . As componentes de campo, tensões nas faces (σ_{ij}^f) e força de volume (\mathbf{b}^f), conforme Figura 5.2. Por simplicidade as componentes na direção 1 são destacadas.

Figura 5.2 – Forças atuantes em um elemento infinitesimal.



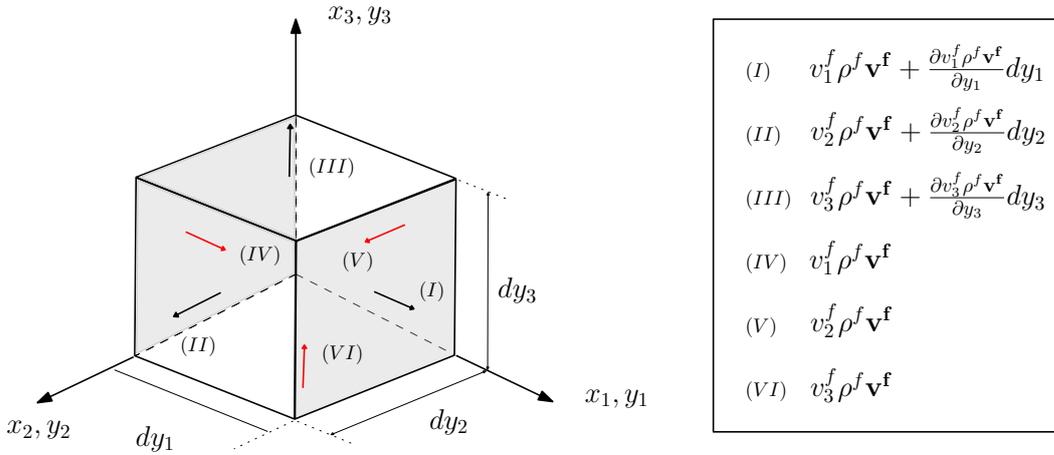
Fonte: Elaborado pelo autor.

Como tal dedução já foi realizada na Seção 3.4.2, retoma-se que o conceito obtido na Equação (3.23), e portanto a força resultante ($\mathbf{f}^{f,R}$) por unidade de volume em Descrição Euleriana é representado pela Equação (5.9).

$$\mathbf{f}^{f,R} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^f + \mathbf{b}^f. \quad (5.9)$$

Realizando o somatório das componentes de quantidade de movimento apresentadas na Figura 5.3, obtemos que:

Figura 5.3 – Quantidade de movimento e sua convecção.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^f \mathbf{v}^f}{\partial t} &= \frac{\partial \rho^f \mathbf{v}^f}{\partial t} dy_1 dy_2 dy_3 = v_1^f (\rho^f \mathbf{v}^f) dy_2 dy_3 + v_2^f (\rho^f \mathbf{v}^f) dy_1 dy_3 + \dots \\ &v_3^f (\rho^f \mathbf{v}^f) dy_1 dy_2 - \left(v_1^f (\rho^f \mathbf{v}^f) + \frac{\partial (v_1^f (\rho^f \mathbf{v}^f))}{\partial y_1} dy_1 \right) dy_2 dy_3 - \dots \\ &\left(v_2^f (\rho^f \mathbf{v}^f) + \frac{\partial (v_2^f (\rho^f \mathbf{v}^f))}{\partial y_2} dy_2 \right) dy_1 dy_3 - \left(v_3^f + \frac{\partial (v_3^f (\rho^f \mathbf{v}^f))}{\partial y_3} dy_3 \right) dy_1 dy_2 + \mathbf{f}^{f,R} dy_1 dy_2 dy_3. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Subtraindo os termos semelhantes e dividindo toda a Equação (5.10) por seu volume ($dy_1 dy_2 dy_3$), obtemos:

$$\frac{\partial \rho^f \mathbf{v}^f}{\partial t} = - \frac{v_1^f (\rho^f \mathbf{v}^f)}{\partial y_1} - \frac{v_2^f (\rho^f \mathbf{v}^f)}{\partial y_2} - \frac{\partial v_3^f (\rho^f \mathbf{v}^f)}{\partial y_3} + \mathbf{f}^{f,R}. \quad (5.11)$$

Nesse contexto, substituindo a Equação (5.11) em (5.9), obtemos as Equações (5.12) e (5.13), em notação tensorial e indicial, respectivamente.

$$\frac{\partial \rho^f \mathbf{v}^f}{\partial t} + \nabla_y \cdot (\rho^f \mathbf{v}^f \otimes \mathbf{v}^f) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{\sigma}^f - \mathbf{b}^f = \mathbf{0}, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \rho^f v_i^f}{\partial t} + \frac{\partial v_j^f (\rho^f v_i^f)}{\partial y_j} - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial y_j} - b_i^f = 0. \quad (5.13)$$

Separando as parcelas desviatórias e hidrostáticas do tensor de *Cauchy* (σ^f) descrevemos da seguinte forma:

$$\sigma^f = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p^f & 0 & 0 \\ 0 & p^f & 0 \\ 0 & 0 & p^f \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Utilizando as parcelas separadas a Equação da quantidade de movimento de uma partícula de fluido em notação indicial é definida na Equação (5.15).

$$\frac{\partial \rho^f v_i^f}{\partial t} + \frac{\partial v_j^f (\rho^f v_i^f)}{\partial y_j} + \frac{\partial p^f}{\partial y_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y_j} - b_i^f = 0. \quad (5.15)$$

E assim, utilizando a Equação (5.2) que descreve o modelo constitutivo do fluido e, portanto, é possível substituir na (5.15) e considerando a densidade do fluido constante e isotérmico, de modo a descrever as Equações de *Navier-Stokes-Brinkman* (5.16) e (5.17), quantidade de movimento e continuidade, respectivamente, considerando o termo de Darcy ($\mathbf{v}^f = -(k^f/\mu^f)\nabla p^f$), a porosidade e permeabilidade.

$$\rho^f \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial t} + v_j^f \frac{\partial v_i^f}{\partial y_j} \right) + \frac{\partial p^f}{\partial y_i} - \frac{\mu^f}{\phi^f} \left(\frac{\partial^2 v_i^f}{\partial y_j^2} + \frac{\partial^2 v_j^f}{\partial y_i^2} \right) + \frac{\mu^f \phi^f}{k^f} v_i^f - b_i^f = 0. \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial v_i^f}{\partial y_i} = 0. \quad (5.17)$$

ou em notação tensorial mista na forma:

$$\rho^f \left(\frac{\partial \mathbf{v}^f}{\partial t} + \mathbf{v}^f \cdot \nabla \mathbf{v}^f \right) + \nabla p^f - \frac{\mu^f}{\phi^f} (\nabla \mathbf{v}^f + (\nabla \mathbf{v}^f)^T) + \frac{\mu^f \phi^f}{k^f} \mathbf{v}^f - \mathbf{b}^f = \mathbf{0}, \quad (5.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^f = 0. \quad (5.19)$$

A Equação (5.18) permite passa assintoticamente do comportamento contínuo, onde o fluxo de *Darcy* é dominante ($k^f \rightarrow 0$) para escoamento de *Navier-Stokes* ($k^f \rightarrow \infty$) de acordo com a porosidade do domínio. Quando a porosidade (ϕ^f) é igual a 1 temos o escoamento de Stokes (para baixo número de Reynolds). Já para porosidade (ϕ^f) no intervalo $]0, 1[$, têm-se escoamento de Darcy e a velocidade é descrita por:

$$\mathbf{v}^f = -\frac{k^f}{\mu^f} \nabla p^f. \quad (5.20)$$

5.4 DESCRIÇÃO LAGRANGIANA-EULERIANA ARBITRÁRIA (ALE)

Áreas como Interação Fluido Estrutura (FSI) e também na poromecânica, como será comentado na Seção 6.2.1, é utilizado na literatura a descrição ALE, devido ao fato da descrição Euleriana pura não ser capaz de caracterizar os efeitos para essas situações de forma adequada.

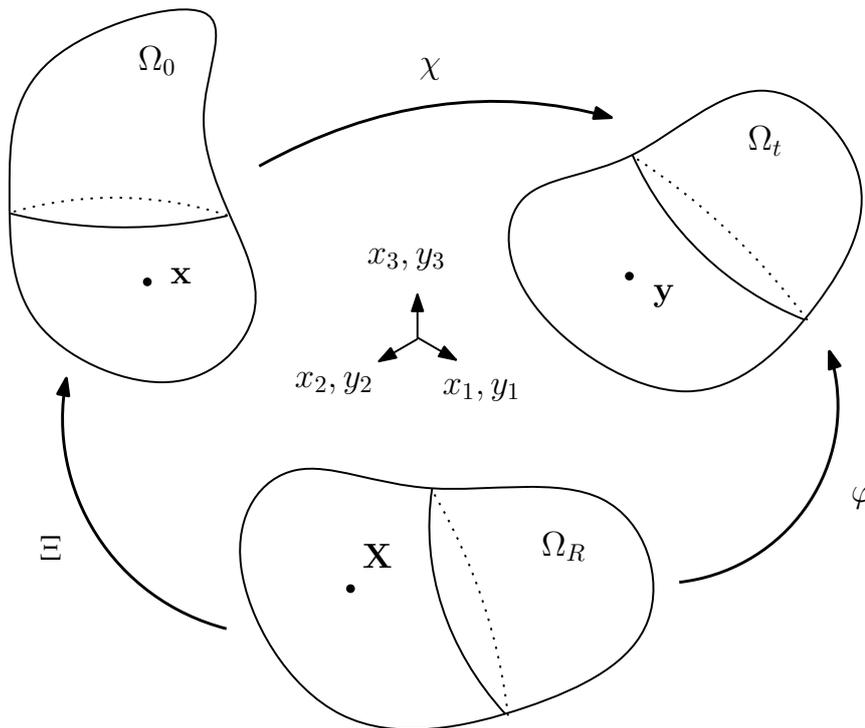
Na formulação Lagrangiana considera-se que um observador segue a partícula ao longo de sua trajetória. Já a Euleriana têm-se que o observador é fixo (i.e, a malha computacional é fixa). Dessa forma, a geração de vórtices devido a grandes deformações necessitando de uma tratativa específica com o uso de uma formulação Lagrangiana e mais facilmente capturada na descrição Euleriana.

Devido diferentes descrições do movimento dos problemas físicos, a descrição ALE (Lagrangiana-Euleriana Arbitrária) é comumente utilizada para sobrepujar a problemática de associação entre as diferentes descrições físicas.

A ideia básica é permitir o movimento da malha, como na formulação Lagrangiana, mas ainda assim ser dissociada do movimento das partículas, como na formulação Euleriana (VUONG, 2016).

Portanto, na descrição ALE introduz-se uma terceira configuração definida como configuração de referência (Ω_R). É ilustrado na Figura 5.4 as configurações e funções mudança de configuração.

Figura 5.4 – Configurações e função mudança de configuração.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A função mudança de configuração entre a configuração material e atual é definida por e portanto:

$$\chi : \begin{cases} \Omega_0 \rightarrow \Omega_t(t), & (\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{y}, \\ \chi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t). \end{cases} \quad (5.21)$$

já a que define a mudança de configuração entre a configuração referência e atual é φ , de modo que:

$$\varphi : \begin{cases} \Omega_R(t) \rightarrow \Omega_t(t), & (\mathbf{X}, t) \rightarrow \mathbf{y}, \\ \varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{X}, t). \end{cases} \quad (5.22)$$

e por fim, a função de mapeamento entre a configuração de referência e material (Ξ) é descrita por:

$$\Xi : \begin{cases} \Omega_R(t) \rightarrow \Omega_0, & (\mathbf{X}, t) \rightarrow \mathbf{x}, \\ \Xi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \end{cases} \quad (5.23)$$

Conceitualmente a única configuração que não depende do tempo (t) é a material (inicial). Na abordagem ALE, a derivada material de uma quantidade espacial qualquer $(\bullet)(\mathbf{y}, t)$, esta é definida como sendo:

$$\frac{D(\bullet)(\mathbf{y}, t)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial(\bullet)(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}, \quad (5.24)$$

em que a velocidade da partícula fluida pode ser escrita como:

$$\mathbf{v}^f = \frac{D\mathbf{y}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}. \quad (5.25)$$

Sabendo que $\partial \mathbf{y}(\mathbf{X}, t)/\partial t|_{\mathbf{x}} = \mathbf{v}^m$, ou seja a velocidade da malha. Assim, associando esta definição, juntamente a Equação (5.25) na Equação (5.24), obtém-se a Equação (5.26).

$$\frac{D(\bullet)(\mathbf{y}, t)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^m) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}(\bullet). \quad (5.26)$$

A Equação (5.26) é a base dos conceitos da Descrição ALE, introduzindo um termo convectivo representado por $(-\mathbf{v}^m \cdot \nabla_{\mathbf{y}}(\bullet))$ ao movimento do observador.

Nesse contexto, as equações de *Navier-Stokes-Brinkman* passam a ser escritas na descrição ALE conforme Equações (5.27) e (5.28), ver por exemplo [Fernandes \(2020\)](#).

$$\rho^f \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial t} + (v_j^f - v_j^m) \frac{\partial v_i^f}{\partial y_j} \right) + \frac{\partial p^f}{\partial y_i} - \frac{\mu^f}{\phi^f} \left(\frac{\partial^2 v_i^f}{\partial y_j^2} + \frac{\partial^2 v_j^f}{\partial y_i^2} \right) + \frac{\mu^f \phi^f}{k^f} (v_i^f - v_i^m) - b_i^f = 0, \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial v_i^f}{\partial y_i} = 0, \quad (5.28)$$

ou em notação tensorial mista na forma:

$$\rho^f \left(\frac{\partial \mathbf{v}^f}{\partial t} + (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^m) \cdot \nabla \mathbf{v}^f \right) + \nabla p^f - \frac{\mu^f}{\phi^f} (\nabla \mathbf{v}^f + (\nabla \mathbf{v}^f)^T) - \frac{\mu^f \phi^f}{k^f} (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^m) - \mathbf{b}^f = \mathbf{0}, \quad (5.29)$$

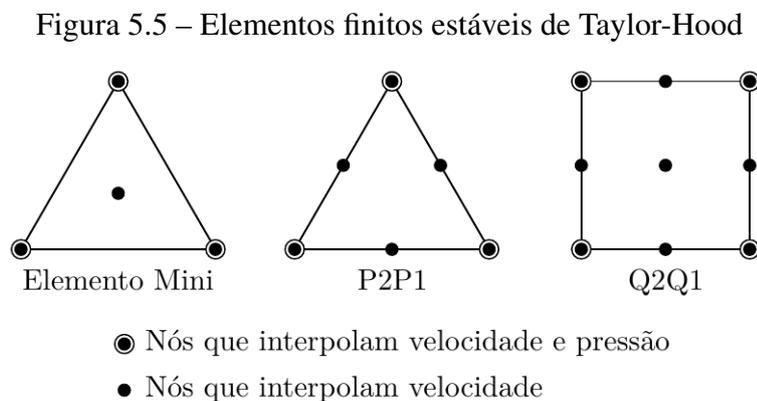
$$\nabla \cdot \mathbf{v}^f = 0. \quad (5.30)$$

em que v^m refere-se a velocidade da malha, e assim, quando esta é igual a zero retoma-se a descrição Euleriana e quando esta é $v^m = v^f$ obtém-se a descrição Lagrangiana atualizada.

5.5 TÉCNICAS DE ESTABILIZAÇÃO E FORMA FRACA

Em relação a estabilidade da aproximação por elementos finitos das Equações que regem problemas de escoamentos incompressíveis, algumas situações são necessárias para serem comentadas.

É comum a utilização do método de *Galerkin* (ou *Bubnov-Galerkin*) para aproximação dos espaço de funções ponderadoras e aproximadoras. Para o uso de tal método deve ser atendido a condição de *Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi* (LBB), por se tratar de um problema de ponto de sela, induzindo na aproximação de cada variável do problema (p^f e \mathbf{v}^f). Combinações de elementos e suas aproximações para cada campo de variáveis são apresentados no trabalho de [Donea e Huerta \(2003\)](#), conforme Figura 5.5.



Fonte: [Fernandes \(2020\)](#).

Trabalhos como [Hughes, Franca e Balestra \(1986\)](#), [Hughes, Franca e Hulbert \(1989\)](#) e [Tezduyar \(1992\)](#) apresentaram formulações estabilizadas para superar a restrição de LBB. As estratégias utilizadas no trabalho de [Fernandes \(2020\)](#) foram o emprego da técnica SUPG (*Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin*) (ver [Brooks e Hughes \(1982\)](#)) para sobrepujar problemas gerados por convecção dominante, ou seja, maioria dos casos com número de *Reynolds* elevado.

As outras técnicas utilizadas para o desenvolvimento do algoritmo computacional foram: PSPG (*Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin*) (ver [Tezduyar \(1992\)](#)) possibilitando o uso das mesmas funções aproximadoras para os dois campos de variáveis do problema e por fim, a técnica LSIC (*Least-Squares on the Incompressibility Constraint*) para manter um bom condicionamento do sistema algébrico mesmo em problemas com valores elevados de *Reynolds* (ver [Tezduyar e Osawa \(2000\)](#)).

A partir da Equação (5.27), escreve-se a forma fraca das Equações de *Navier-Stokes-Brinkman* com as técnicas de estabilização, que se consiste na adição do resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado por $\tau_{SUPG}(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^m) \cdot \nabla \Psi$, o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado por $\tau_{PSPG}(\nabla \psi / \rho^f)$ e o resíduo da equação da continuidade

ponderado por $\rho^f \nu_{LSIC} \nabla \cdot \Psi$, conforme Equação (5.31).

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_t} \Psi \cdot \left[\rho^f \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial t} + (v_j^f - v_j^m) \frac{\partial v_i^f}{\partial y_j} \right) + \frac{\partial p^f}{\partial y_i} - \frac{\mu^f}{\phi^f} \left(\frac{\partial^2 v_i^f}{\partial y_j^2} + \frac{\partial^2 v_j^f}{\partial y_i^2} \right) + \frac{\mu^f \phi^f}{k^f} (v_i^f - v_i^m) \right. \\
& \left. - b_i^f \right] d\Omega + \int_{\Omega_t} \psi \nabla \cdot \mathbf{v}^f d\Omega_t - \int_{\Gamma_N} \Psi \cdot \mathbf{h} d\Gamma_N \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{SUPG} \left((\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^m) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{v}^f, p^f) d\Omega_t \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{PSPG} \left(\frac{\nabla \psi}{\rho^f} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{v}^f, p^f) d\Omega_t \\
& + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \rho^f \nu_{LSIC} \nabla \cdot \Psi r_C(\mathbf{v}^f) d\Omega_t = 0,
\end{aligned} \tag{5.31}$$

sendo Ψ e ψ as funções teste da equação da quantidade de movimento e continuidade, respectivamente. E n_{el} é o número de elementos finitos da discretização, \mathbf{h} as forças de superfície e τ_{SUPG} , τ_{PSPG} e ν_{LSIC} são os parâmetros de estabilização. Os vetores \mathbf{r}_M e r_C são os resíduos das equações de conservação de quantidade de movimento e continuidade, respectivamente, conforme Equações (5.32) e (5.33).

$$\mathbf{r}_M = \rho^f \left(\frac{\partial \mathbf{v}^f}{\partial t} + (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^m) \cdot \nabla \mathbf{v}^f \right) + \nabla p^f - \frac{\mu^f}{\phi^f} (\nabla \mathbf{v}^f + (\nabla \mathbf{v}^f)^T) - \frac{\mu^f \phi^f}{k^f} (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^m) - \mathbf{b}^f, \text{ e} \tag{5.32}$$

$$r_C = \nabla \cdot \mathbf{v}^f. \tag{5.33}$$

Para cada técnica é utilizado um parâmetro de estabilização, τ_{SUPG} , τ_{PSPG} e ν_{LSIC} . Para determinação desses parâmetros existem diferentes trabalhos na literatura, porém os utilizados na formulação por (FERNANDES, 2020) foi a de (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013), conforme as seguintes Equações:

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \left(\frac{1}{\tau_{SUGN1}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN2}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN3}^2} \right)^{-1/2}, \tag{5.34}$$

$$\nu_{LSIC} = \tau_{SUPG} \|\mathbf{v}^f - \bar{\mathbf{v}}^f\|^2, \tag{5.35}$$

no qual,

$$\tau_{SUGN1} = \left(\sum_{i=1}^{Nno} |(\mathbf{v}^f - \bar{\mathbf{v}}^f) \cdot \nabla N| \right)^{-1}, \tag{5.36}$$

$$\tau_{SUGN2} = \frac{\Delta t}{2}, \tag{5.37}$$

$$\tau_{SUGN3} = \frac{h_{RGN}^2}{4\nu^f}, \tag{5.38}$$

$$h_{RGN} = 2 \left(\sum_{i=1}^{Nno} |\mathbf{r} \cdot \nabla N| \right)^{-1}, \tag{5.39}$$

$$\mathbf{r} = \frac{\nabla \|\mathbf{v}^f - \bar{\mathbf{v}}^f\|}{\|\nabla \|\mathbf{v}^f - \bar{\mathbf{v}}^f\|\|} \quad (5.40)$$

em que N_{no} é o número de nós do elemento finito, N a função de aproximação, Δt o respectivo passo de tempo para a discretização temporal e ν^f a viscosidade cinemática do fluido.

Vale ressaltar que para problemas com baixo número de *Reynolds* a técnica PSPG é suficiente (i.e, problemas com velocidade baixa), por ser necessário contornar apenas o problema de devido ao LBB na aproximação entre o campo das variáveis.

5.6 INTEGRADOR TEMPORAL α -GENERALIZADO - IMPLÍCITO

Para solucionar o problema transiente do fluido, requer-se o uso de uma técnica de integração temporal adequada, de modo a se obter a manter estabilidade e precisão.

O esquema adotado foi o uso do método do α -generalizado para a discretização temporal das Equações de *Navier-Stokes*, em conformidade com o integrador temporal desenvolvido para o problema da fase sólida deste trabalho. A esquematização da técnica para análise dinâmica e fluidos em [Jansen, Whiting e Hulbert \(2000\)](#), permitindo dissipação de altas frequências e possível amortecimento artificial induzido.

Como já supracitado na Seção 4.6.2, a aproximação do campo de variáveis, nesse caso velocidade e aceleração, por valores intermediários, conforme Equações (5.41) e (5.42), respectivamente.

$$\mathbf{v}_{t+\alpha_f}^f = \mathbf{v}_t^f + \alpha_f(\mathbf{v}_{t+1}^f - \mathbf{v}_t^f), e \quad (5.41)$$

$$\mathbf{a}_{t+\alpha_m}^f = \dot{\mathbf{v}}_{t+\alpha_m}^f = \dot{\mathbf{v}}_t^f + \alpha_m(\dot{\mathbf{v}}_{t+1}^f - \dot{\mathbf{v}}_t^f). \quad (5.42)$$

sendo tal estratégia vinculado ao Método de *Newmark*, portanto relação entre a velocidade e aceleração no tempo $t+1$ podem ser descritas pela Equação (5.43).

$$\mathbf{v}_{t+1}^f = \mathbf{v}_t^f + \Delta t((1 - \gamma)\dot{\mathbf{v}}_t^f + \gamma\dot{\mathbf{v}}_{t+1}^f). \quad (5.43)$$

Para garantir a convergência de segunda ordem, o valor de γ é descrito pela Equação (5.44).

$$\gamma = 1/2 + \alpha_m - \alpha_f, \quad (5.44)$$

e torna-se incondicionalmente estável para:

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq 1/2. \quad (5.45)$$

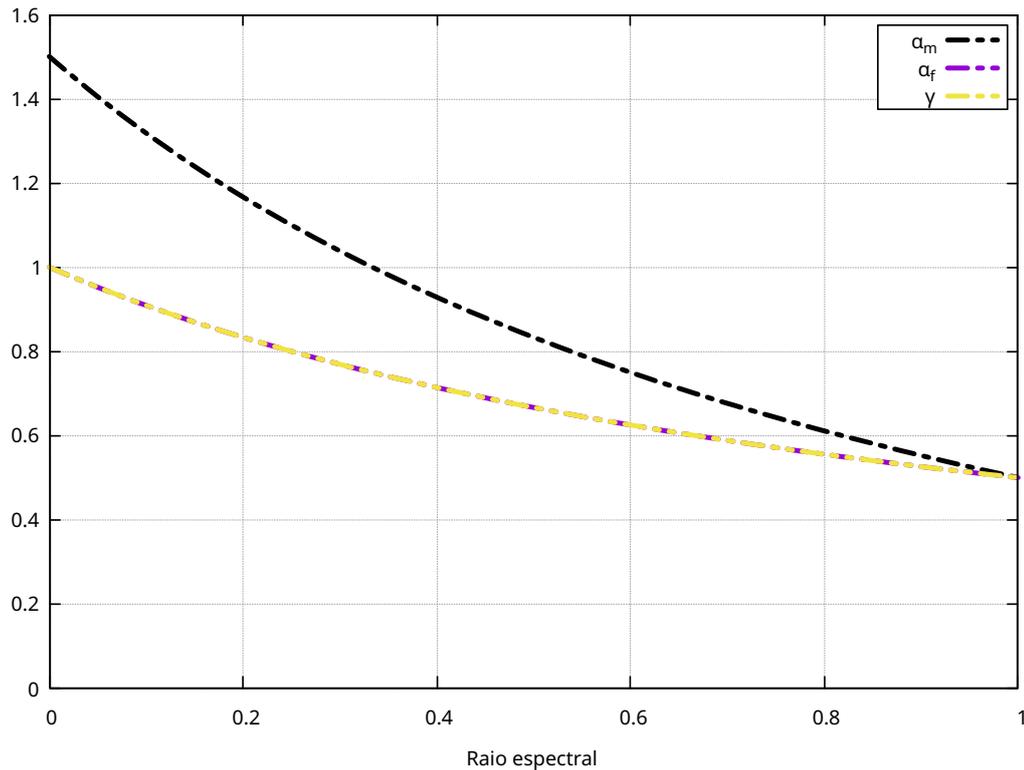
Os valores de α_f e α_m são descritos em função do raio espectral, de modo a controlar a dissipação de altas frequências. Nesse contexto, utiliza-se as Equações (5.46) e (5.47) para determinações desses parâmetros.

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}, e \quad (5.46)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left(\frac{3 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \right). \quad (5.47)$$

O raio espectral é descrito no intervalo $\rho_\infty \in [0, 1]$, assim como apresentado na Seção 4.6.2. Os intervalos correspondentes aos parâmetros do método de integração temporal para a mecânica dos fluidos em função do raio espectral são ilustrados na Figura 5.6.

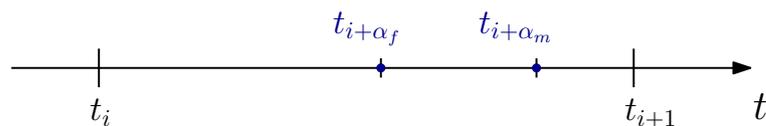
Figura 5.6 – Parâmetros em função do raio espectral para mecânica dos fluidos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O raio espectral é um valor possível no intervalo de $[0,1]$, de modo a não ocorrer dissipação para o valor máximo e máxima dissipação para o menor valor. O integrador temporal esquematizado dentro do intervalo do raio espectral é apresentado na Figura 5.7.

Figura 5.7 – Integração temporal via α -Generalizado para mecânica dos fluidos.



Fonte: Adaptado de [Fernandes \(2020\)](#).

Diferente da estratégia que foi utilizado no sólido, no fluido o tempo intermediário encontrado pode não ser o mesmo em relação ao do sólido, pela sua dependência do raio espectral de cada fase, por se tratar de uma formulação adaptada para a mecânica dos fluidos e

o valor nodal calculado intermediário é obtido por $t + \alpha_f$ ou $t + \alpha_m$, já no sólido utilizou-se a técnica original do α -generalizado de calcular as variáveis nos tempos $t + 1 - \alpha_f$ e $t + 1 - \alpha_m$.

5.7 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

O presente capítulo teve por finalidade a apresentação dos desenvolvimentos matemáticos da mecânica dos fluidos para fluidos Newtonianos incompressíveis com técnicas de estabilização, juntamente a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (ALE).

A devida sistematização para apresentação da forma fraca e discretização espacial pelo MEF é devidamente apresentada no trabalho de [Fernandes \(2020\)](#) em seu capítulo 2, juntamente sua integração temporal com o α -Generalizado. A construção matricial da discretização espacial das equações de *Navier-Stokes* encontra-se no Anexo C.

6 MECÂNICA DOS MEIOS POROSOS SATURADOS

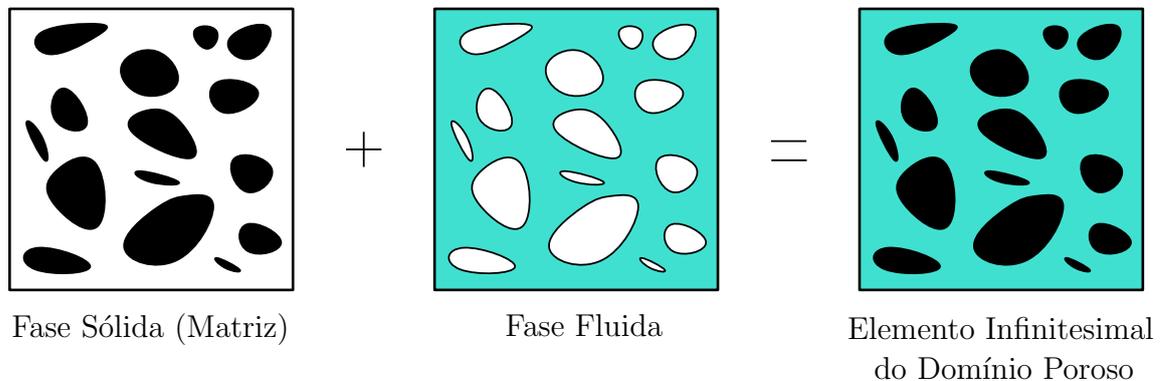
6.1 INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS MEIOS POROSOS

Os materiais porosos são classificados como materiais com uma estrutura interna. Tendo estes uma fase sólida (matriz ou esqueleto) e poros (fluido ou gás) na sua constituição, podendo eles ser abertos ou fechados.

Segundo Coussy (2004), os meios porosos são estudados em uma escala macroscópica em que cada ponto do meio é um volume elementar composto por suficiente matéria (sólidos e fluidos) para ser representativo dos fenômenos estudados.

A partir da mecânica do contínuo, o meio poroso é tratado como sendo a superposição no tempo e espaço de dois domínios ou duas fases conforme Figura 6.1: esqueleto (solo) e fluido, ambos contínuos, onde as posições das partículas do esqueleto e do fluido coincidem sobre o mesmo volume infinitesimal geométrico, e em um instante de tempo qualquer (i.e, Homogeneização de Fases, com porosidade conectada e sem consideração de porosidade oclusa).

Figura 6.1 – Idealização microscópica do meio poroso.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando o material poroso é submetido a forças externas e variações na pressão do fluido, o esqueleto sólido do material se deforma, equivalente a descrição apresentada na Seção 3.2 pela mecânica do contínuo para materiais sólidos.

De modo a quantificar a variação do volume no espaço poroso define-se o termo de porosidade. A porosidade (Euleriana η^f - ou Lagrangiana ϕ^f) descrita na Equação (6.1) quantifica os "vazios" conectados, podendo estar completamente saturados e os poros não conectados são tratados como parcela da matriz sólida.

$$\eta^f = \frac{d\Omega_t^f}{d\Omega_t}, \quad (6.1)$$

mm que $d\Omega_t^f$ o volume de poros conectados (nesse caso, volume contido de fluido no poro), $d\Omega_t$ volume total atual da partícula no meio poroso. Quando um meio poroso de volume Ω_t sofre uma deformação, a porosidade η^f não quantifica adequadamente a variação do volume relativo ao volume do material no instante inicial $d\Omega_0$.

A mudança do volume poroso é melhor quantificada pela porosidade Lagrangiana (ϕ^f), a qual é a relação entre o volume de poros atual e o volume inicial $d\Omega_0$. A Equação (6.2), fornece a relação entre ambas as porosidades sendo $J = d\Omega_t/d\Omega_0$ o jacobiano da transformação entre as medidas de porosidade.

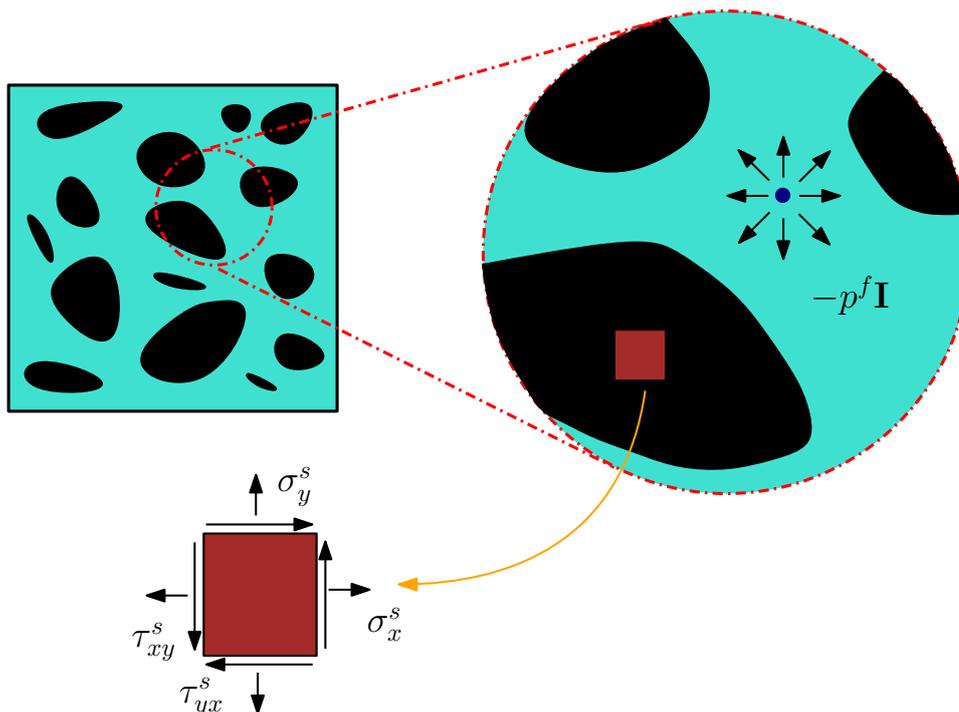
$$\phi^f d\Omega_0 = \eta^f d\Omega_t \quad ; \quad \phi^f = J\eta^f. \quad (6.2)$$

6.2 TEORIA DOS MEIOS POROSOS BIFÁSICOS

Como já dito anteriormente, a estrutura do domínio poroso considerado é composto por uma fase sólida e uma fase porosa, com poros interligados e preenchidos totalmente por fluido. As duas fases são distinguidas em um sentido contínuo de um volume infinitesimal, conforme apresentado na Figura 6.1.

A escala considerada para distinção entre cada fase constituinte do domínio é a microescala (maior que a escala atômica), podendo esta ser ilustrada segundo a Figura 6.2, verificando as ações que ocorrem entras as interfaces fluido e estrutura, abordadas a luz da mecânica do contínuo clássica para tal escala.

Figura 6.2 – Representação microescala de Interação Fluido Estrutura.



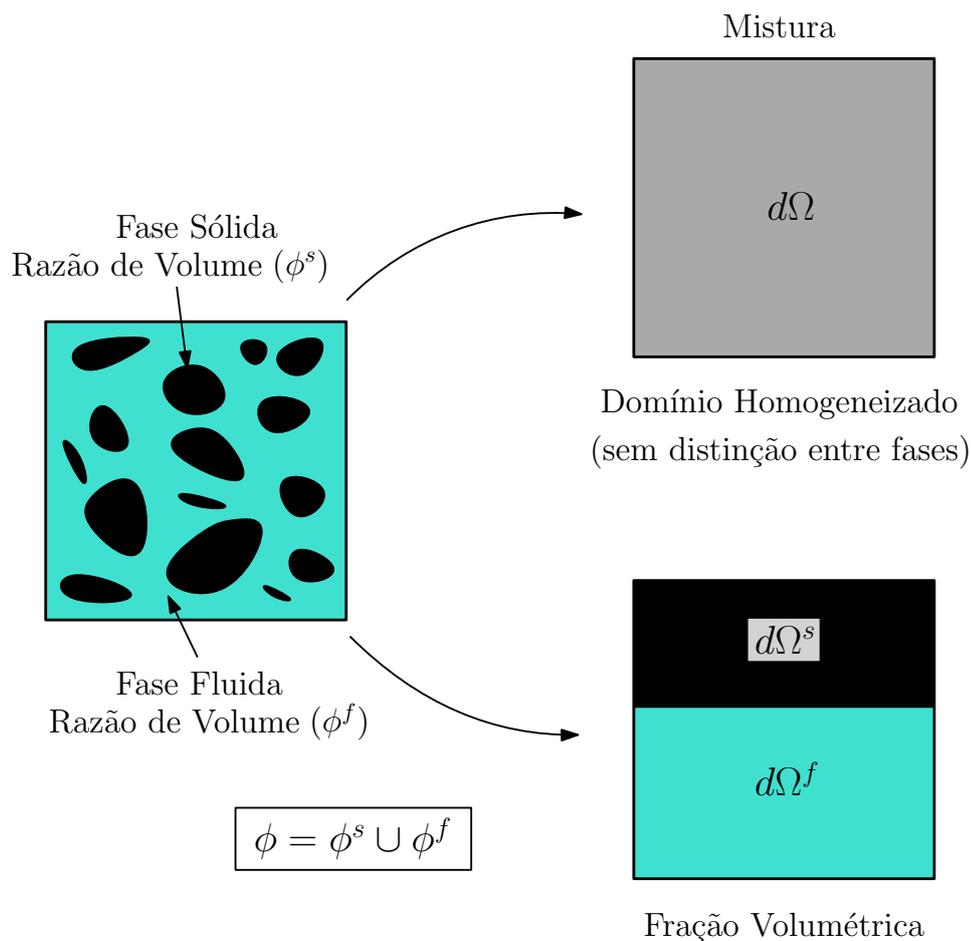
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para utilizar a microescala, mesmo que tenha uma boa representatividade local, a abordagem torna-se diferente, pois nesse contexto trata-se de um problema de Interação Fluido-Estrutura diretamente associada a imposição das condições de contorno de *Dirichlet-Neumann* nas interfaces dos domínios, por exemplo.

Assim, para uma representação na macroescala, escala superior a microescala, é necessário uma devida associação entre as escalas micro-macro referente as equações governantes, variáveis principais, parâmetros do modelo e do material. Na literatura a presente abordagem pode ser encontrada como Teoria das Misturas (*Mixture Theory*) ou juntamente ao Cálculo da Média (em inglês, *Averaging* ou *Volume Averaging*).

Até então foi esquematizado um modelo representativo do domínio poroso, conforme Figura 6.1. Partindo do elemento representativo, a homogeneização realizada associando as interfaces dos domínios constituintes com base na proporção de cada fase em função da porosidade, conforme ilustrado na Figura 6.3.

Figura 6.3 – Processo de homogeneização de fases para domínio poroso bifásico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando a condição de domínio totalmente saturado, o termo de porosidade (ϕ^s) presente na Figura 6.3 representa a fração volumétrica total das fases no domínio poroso, que

por sua vez pode ser definido por:

$$\phi = \phi^s + \phi^f = 1. \quad (6.3)$$

Na literatura, para modelar domínios porosos, diferentes são os métodos numéricos e escalas utilizadas, sendo grande parte deles baseados na definição de um volume elementar representativo (ou em inglês *Representative Elementary Volume - REV*), grande o suficiente para captar a geometria correspondente ao domínio e pequeno suficientemente de modo a captar efeitos físicos de interesse, estratégia utilizada neste trabalho.

Avanços do método de cálculo da média de volume pode ser encontrado nos trabalhos de [Whitaker \(1986a, 1986b, 1986c, 1986d, 1996\)](#), assim como algumas estratégias de correlação entre as variáveis definidas entre as escalas.

Portanto, trabalhando-se em uma escala macroscópica, parâmetros como porosidade, tortuosidade e permeabilidade são caracterizados no mesmo sentido da escala de análise. Nesse sentido, as quantidades físicas são classificadas em intrínsecas, microscópicas médias e macroscópicas médias.

Quantidades intrínsecas são quantidades verdadeiras na escala microscópica, estas não são diretamente constituintes nas equações que governam domínios porosos homogeneizados, sendo substituídas por quantidades médias.

Como toma-se necessário a conexão entre diferentes abordagens, define-se que $\overline{(\bullet)}$ é definido como quantidade média de (\bullet) referente a um volume total V_0 , portanto:

$$\overline{(\bullet)} = \frac{1}{V_0} \int_{V^\pi} (\bullet) dV^\pi. \quad (6.4)$$

e π define a respectiva fase, sólida (s) ou fluida (f). Além disso, a quantidades microscópicas como ρ^s e σ^f , por exemplo, não são quantidades intrínsecas (in), ou seja, podemos definir que densidades e tensores de tensão macroscópicos são:

$$\rho^S = \overline{\rho_{in}^s} = \rho^s(1 - \phi), \quad (6.5)$$

$$\rho^F = \overline{\rho_{in}^f} = \rho^f \phi, \quad (6.6)$$

$$\sigma^S = \overline{\sigma_{in}^s} = \sigma^s(1 - \phi), \quad (6.7)$$

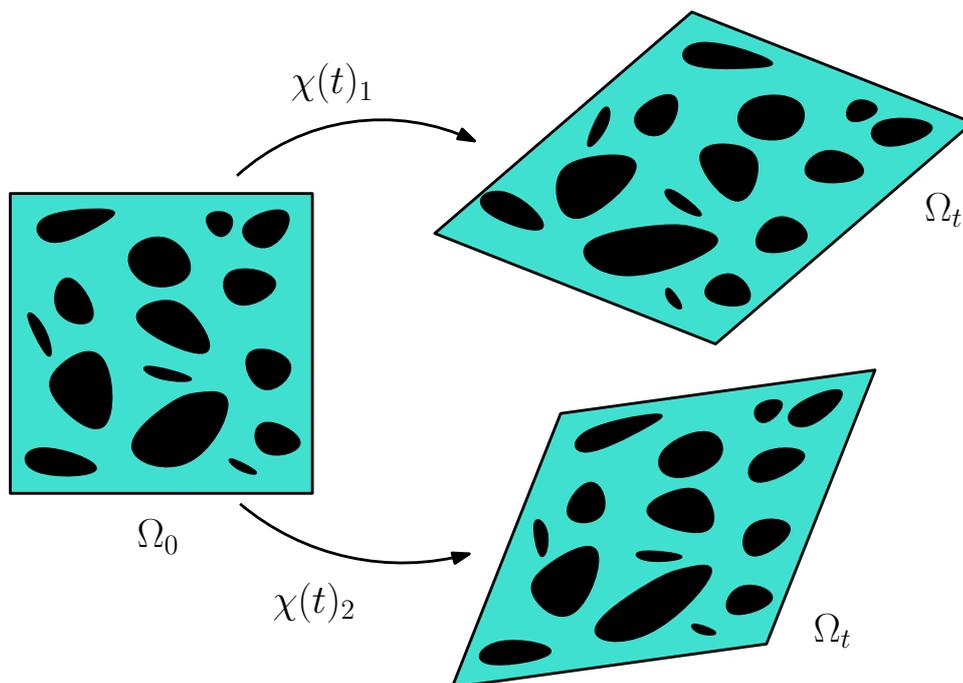
$$\sigma^F = \overline{\sigma_{in}^f} = \sigma^f \phi, \quad (6.8)$$

Portanto, quantidades microscópicas médias são quantidades intrínsecas médias sobre o volume de fase a que estão associadas. Já quantidades macroscópicas médias referem-se ao volume poroso total. O mesmo vale para outras variáveis como velocidades médias de cada fase. No caso do tensor de deformações de *Green-Lagrange* (\mathbf{E}) não terá sobrescrito na notação, pois este condiz com o domínio poroso completo.

6.2.1 Derivada material do domínio poroso

Matematicamente torna-se parcialmente abstrato o conceito da presença das duas fases estando constituídas no mesmo ponto do contínuo (homogeneizado), dada a abordagem clássica da Mecânica do Contínuo. Considerando a configuração inicial (Ω_0) e as duas fases incompressíveis, o determinante do gradiente de deformação não é necessariamente 1, como pode-se observar pela Figura 6.4 pelas as configurações deformadas apresentadas.

Figura 6.4 – Configuração deformada macroscópica do domínio poroso incompressível.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, as duas fases dentro do domínio poroso podem deformar-se independentemente conforme ilustrado na Figura 6.5, e portanto, cada fase é correspondida por uma derivada material (ver [Bird, Stewart e Lightfoot \(2006\)](#)), definida pelo conceito de acompanhar um observador Lagrangiano e portanto, definir a taxa de variação de alguma quantidade física (escalar ou vetorial) de uma partícula ao longo do tempo.

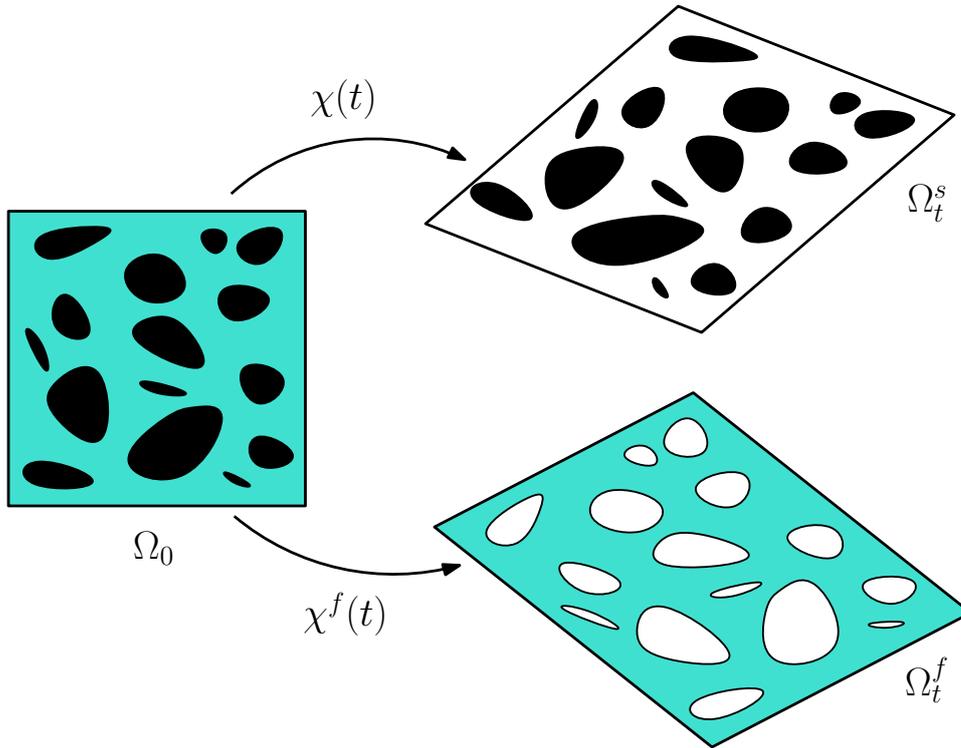
Neste caso, pela consideração de duas fases têm-se: a derivada do tempo material em relação a matriz seguindo a partícula do sólido e a derivada de tempo material em relação à fase fluida, acompanhando a partícula do fluido. Portanto, a derivada material em relação à fase de sólida (D^s/Dt) de uma quantidade de material $(\bullet)(\mathbf{x}, t)$ é representada pela Equação (6.9).

$$\frac{D^s(\bullet)(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \left. \frac{\partial(\bullet)(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}, \quad (6.9)$$

já a derivada material em relação a uma quantidade espacial $(\bullet)(\mathbf{y}, t)$ é:

$$\frac{D^s(\bullet)(\mathbf{y}, t)}{Dt} = \left. \frac{\partial(\bullet)(\mathbf{y}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \nabla(\bullet) \cdot \mathbf{v}^s, \quad (6.10)$$

Figura 6.5 – Configuração deformada macroscópica de cada fase.



Fonte: Adaptado de [Vuong, Yoshihara e Wall \(2015\)](#)

sabendo que $\mathbf{v}^s = \partial \mathbf{y} / \partial t|_{\mathbf{x}}$, e, portanto, por seguir a fase sólida, esta deriva material é equivalente a da mecânica dos sólidos clássica.

Para domínios porosos o observador é Lagrangiano da fase sólida, como já apresentado inicialmente nesse trabalho, e para o fluido mantém-se a ideia da descrição ALE. Assim, a derivada material da fase fluida em relação a uma quantidade espacial qualquer $(\bullet)(\mathbf{y}, t)$ é representada pela Equação (6.11).

$$\begin{aligned} \frac{D^f(\bullet)(\mathbf{y}, t)}{Dt} &= \left. \frac{\partial(\bullet)(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial(\bullet)(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}^f} \\ &= \left. \frac{\partial(\bullet)(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial(\bullet)(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}^f}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

tendo pela definição supracitada, a velocidade do fluido sendo expressa na Equação (6.12).

$$\mathbf{v}^f = \frac{D^f \mathbf{y}}{Dt} = \left. \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}^f}. \quad (6.12)$$

Substituindo a Equação (6.12) na Equação (6.11) e pela definição $\partial \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) / \partial t|_{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}}^s = \mathbf{v}^m$ para o caso das coordenadas \mathbf{x} do sólido serem consideradas como coordenadas de referência para o fluido, obtém-se a Equação (6.13).

$$\frac{D^f(\bullet)(\mathbf{y}, t)}{Dt} = \left. \frac{\partial(\bullet)(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}(\bullet). \quad (6.13)$$

Ressaltando que o movimento entre as fases são diferentes, tal abordagem é equivalente a formulação ALE descrita na Seção 5.4, tomando a velocidade do sólido ($\dot{\mathbf{y}}^s$) equivalente a velocidade da malha (\mathbf{v}^m).

Como já expresso nos capítulos anteriores, é conveniente o uso de uma descrição Lagrangiana para problemas de mecânica dos sólidos, e portanto sua equivalência para a matriz sólida do domínio poroso, assim como variáveis cinemáticas de deslocamento do sólido (\mathbf{d}^s) e $\dot{\mathbf{y}}^s$.

$$\mathbf{d}^s = \mathbf{y}^s - \mathbf{x}^s \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{y}}^s = \frac{\partial \mathbf{d}^s}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{y}^s}{\partial t}. \quad (6.14)$$

Já para o escoamento de um fluido através de um poro adota-se considera-se uma velocidade denotada como velocidade de infiltração (\mathbf{w}) que descreve o movimento do fluido em relação a fase sólida.

Consequentemente, a chamada velocidade de Darcy (\mathbf{v}^d) pode ser introduzida como uma quantidade cinemática adicional que relaciona \mathbf{w} com a quantidade fluida representativa no domínio poroso de acordo com a porosidade, expressa pela Equação (6.15)

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}^d = \phi^f \mathbf{w}. \quad (6.15)$$

Uma explicação conceitual e visual é apresentada na Seção 6.2.2 sobre as velocidade do fluido e velocidade de Darcy.

6.2.2 Velocidade real do fluido e velocidade de Darcy para escoamento em meio poroso

O escoamento em meio poroso é tradicionalmente atrelado a relação empírica obtida por [Darcy \(1856\)](#). Um ensaio para o escoamento de água através de uma coluna de areia determinou-se que a perda de carga hidráulica (∇p^f) e a velocidade de água em seu interior estão linearmente dependentes, e assim, define-se a Lei de Darcy pela Equação (6.16) completa.

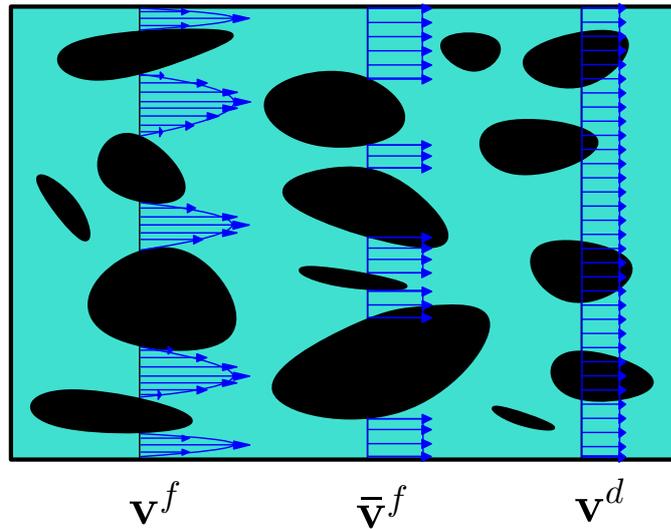
$$\mathbf{v}^d = \frac{\mathbf{k}}{\mu^f} (\nabla p^f + \rho^f (\mathbf{g} - \mathbf{a}^f)) \quad (6.16)$$

A velocidade \mathbf{v}^d representa a velocidade média do fluido no volume de controle total (Ω_t) sendo representativa para uma escala macroscópica. Já a velocidade média do fluido $\bar{\mathbf{v}}^f$ é a média da velocidade do fluido que percola pelos poros, definindo portanto a Equação 6.17 que correlaciona as duas velocidades.

$$\bar{\mathbf{v}}^f \phi^f = \mathbf{v}^d \quad (6.17)$$

De tal forma, é válido ressaltar que, para o caso de escoamento de fluidos, considera-se no presente momento que $\dot{\mathbf{y}}^s \approx 0$ (sólido indeformável e em repouso). Nesse contexto, é ilustrada na Figura 6.6 uma representação dos perfis de velocidade do fluido e a definição de velocidade de Darcy, considerando um escoamento que ocorre da esquerda para a direita.

Figura 6.6 – Velocidades em microescala.



Fonte: Elaborado pelo autor

Devido à porosidade ser uma variável função do tempo e espaço, sua variação no tempo pode ser negligenciada (ver [Morán e Toledo \(2011\)](#)) para pequenas mudanças e considerar apenas sua variação no espaço.

Na notação deste trabalho é utilizado v^f ao invés de \bar{v}^f para escoamento em meio poroso como velocidade média por questão de simplicidade por se tratar de uma formulação utilizada em macroescala, porém viu-se necessário alertar ao leitor sobre a influência da velocidade real em microescala. No caso de problemas não porosos ($\phi^f = 1$), têm-se que $v^f = \bar{v}^f = v^d$, a depender das condições impostas para deslizamento e consideração para com os termos das equações governantes.

6.3 DEFINIÇÕES POSTULADAS NA MECÂNICA DOS SOLOS

6.3.1 Tensão Efetiva de Terzaghi

A formulação macroscópica das leis de comportamento dos solos saturados deformáveis define-se que, para um domínio poroso isótropo, o equilíbrio local é governado em termos das tensões efetivas princípio da tensão efetiva de Terzaghi), conforme Equação (6.18), descrita em notação tensorial e indicial.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s - \alpha_b p^f \mathbf{I} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s - \alpha_b p^f \delta_{ij}, \quad (6.18)$$

na qual σ_{ij} são as tensões totais, σ_{ij}^s são as tensões efetivas e α_b o coeficiente de Biot. Esta formulação para solos saturados possibilita o uso de modelos clássicos da mecânica dos sólidos (elástico, plástico, visco-plástico, etc.) utilizando o tensor de tensões efetivas (ver por exemplo [DEBOER \(1992\)](#), [Buhan, Chateau e Dormieux \(1998\)](#), [Coussy \(2004\)](#), [Schreyer-Bennethum \(2007\)](#) para mais informações).

Na teoria poroelástica o comportamento da fase sólida é descrito pelos princípios da elasticidade e o fluido considerado um material viscoso em que escoar segundo uma lei de fluxo (Lei de Darcy), consideração de regime laminar.

6.3.2 Coeficiente de Biot

As definições aqui apresentadas são um breve resumo que pode ser encontrado em [Coussy \(2004\)](#). Na mecânica dos solos, em escala macroscópica, existem duas medidas adicionais de rigidez: o módulo de Biot (M_b) e o coeficiente de Biot (α_b), comumente encontrada em funcionais de energia livre que caracteriza o comportamento de um material poroso, por exemplo.

Na teoria linear, esses módulos caracterizam a resposta de tensão pela variação de porosidade e pressão. Em trabalhos presentes na literatura também são utilizados para postular modelos constitutivos não lineares (ver [Callari e Abati \(2009\)](#), [Chapelle e Moireau \(2014\)](#)).

De modo geral, o coeficiente de Biot (α_b) para o caso de partícula sólida incompressível atribui-se a seguinte definição apresentada na Equação (6.19).

$$\alpha_b = \frac{\partial \sigma}{\partial E} = 1. \quad (6.19)$$

Para mensurar o comportamento de um material poroso através de um ensaio triaxial e obter o α_b , realiza-se o ensaio em condição não drenada (*jacket*) e drenada (*unjacket*). Dessa forma, obtém-se os valores de *Bulk Modulus* (\underline{K}) para as duas situações.

Na condição não drenada obtém-se \underline{K}^u e drenada \underline{K}^d , em que na condição não drenada (considerando o fluido como não compressível), verifica-se a compressibilidade do sólido. Já condição drenada verifica-se a compressibilidade da matriz.

Aplicando os valores de \underline{K} de um ensaio triaxial na Equação (6.20) determina-se o α_b .

$$\alpha_b = 1 - \frac{\underline{K}^u}{\underline{K}^d}, \quad (6.20)$$

sendo que $\underline{K}^u \leq \underline{K}^d$. No caso de $\underline{K}^u \ll \underline{K}^d$ corresponde ao $\alpha_b = 1$ no caso de uma partícula sólida incompressível. Em [Biot e Willis \(1957\)](#) foi matematicamente demonstrado que o limite inferior de α_b é a própria porosidade do meio.

O conjunto dos possíveis valores de α_b como $\alpha_b = \{x \in R \mid 1 \geq x \geq \phi\}$. Os limites teóricos de α_b foram experimentalmente comprovados em diversos trabalhos como [Berryman \(1992\)](#), [Laurent et al. \(1993\)](#), [Nermoen et al. \(2013\)](#), [Selvadurai \(2019\)](#).

Com a Equação (6.20) mensura-se a importância da compressibilidade dos grãos para a deformação de meios porosos. Quanto maior α_b , menor será a influência da compressibilidade para a deformação e vice-versa.

No presente trabalho considera-se a partícula sólida e fluida incompressíveis e não apresentou-se demais informações sobre o M_d por não fazer parte diretamente da formulação apresentada.

6.4 CONDIÇÃO DRENADA E NÃO DRENADA

De acordo com Verruijt (1995) o comportamento de um meio poroso é dito totalmente drenado, se a duração do processo de consolidação for curta em comparação com a escala de tempo do problema. Para uma superfície considerando condição de fluxo livre, esta região é considerada de pressão nula.

No caso de condições não drenadas, assume-se que o carregamento é tão rápido, ou que a permeabilidade é tão baixa que não ocorre fluxo para o fluido em uma determinada região.

De modo geral, a rigidez do problema é aumentada pela resistência do fluido contido nos poros, a depender de sua compressibilidade. Portanto, um problema com contornos impermeáveis, ou seja, sem fluxo de fluido sobre os contornos, é definido como não drenada.

6.5 PERMEABILIDADE E TORTUOSIDADE

A técnica utilizada parte do princípio do *Volume Averaging* parte de algumas suposições, sendo algumas delas geométricas. Os parâmetros representativos para meios porosos presentes na literatura são: permeabilidade e tortuosidade.

No caso da permeabilidade (intrínseca), essa representa a resistência do esqueleto sólido contra a percolação do fluido no espaço poroso, que depende da micro-geometria do domínio poroso (i.e arranjo das partículas sólidas). Portanto, permeabilidade é representada pela Equação (6.21).

$$\mathbf{k}^f = \frac{\mathbf{K}^f \mu^f}{\rho^f \mathbf{g}} = \left[\frac{\left(\frac{m}{s}\right) \left(\frac{kg}{m \cdot s}\right)}{\left(\frac{kg}{m^3}\right) \left(\frac{m}{s^2}\right)} \right] = [m^2] \quad (6.21)$$

onde \mathbf{K} é a condutividade hidráulica, \mathbf{k} é a permeabilidade intrínseca [m^2] e \mathbf{g} é a aceleração gravitacional. A permeabilidade (\mathbf{k}^f) é um tensor de segunda ordem positivo definido e simétrico, conforme Equação (6.22).

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x^f & 0 & 0 \\ 0 & k_y^f & 0 \\ 0 & 0 & k_z^f \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

A permeabilidade por ser intrinsecamente geométrico, depende de informações da geometria microscópica no nível macroscópico. No caso da condutividade hidráulica \mathbf{K}^f depende das propriedades do fluido (saturação, viscosidade, temperatura e densidade). É apresentada na

Tabela 2 algumas faixas de permeabilidades e porosidade para alguns materiais porosos presentes na natureza.

Tabela 2 – Faixa de permeabilidade e porosidade de diferentes materiais.

Material	Permeabilidade [m ²]	Porosidade
Mármore	10 ⁻¹⁹	0,005 - 0,02
Concreto	10 ⁻¹⁶ - 10 ⁻²¹	0,02 - 0,07
Argila	10 ⁻¹⁶ - 10 ⁻²⁰	0,5
Granito	10 ⁻¹⁶ - 10 ⁻²⁰	0,002 - 0,04
Couro	10 ⁻¹³ - 10 ⁻¹⁴	0,56 - 0,59
Calcário	10 ⁻¹² - 10 ⁻¹⁶	0,04 - 0,29
Arenito	10 ⁻¹¹ - 10 ⁻¹⁷	0,08 - 0,38
Cascalho, areia	10 ⁻⁹ - 10 ⁻¹²	0,37 - 0,50

Fonte: Adaptado de [Nield e Bejan \(1998\)](#).

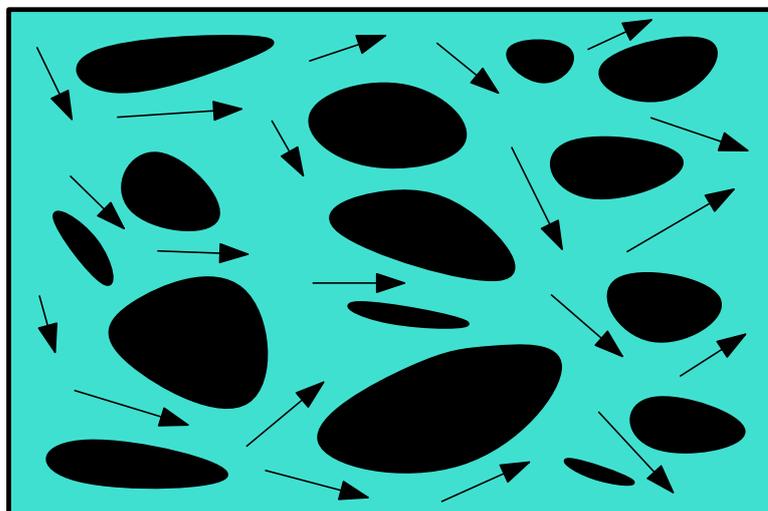
A permeabilidade intrínseca muda devido à deformação conforme Equação (6.23).

$$\mathbf{k}_t^f = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{k}_0^f \cdot \mathbf{A}^T \quad (6.23)$$

Diferentes trabalhos presentes na literatura buscam uma caracterização satisfatória em nível micro-macro para a permeabilidade. Em [Jourde *et al.* \(2007\)](#) é proposta uma lei alternativa para a permeabilidade de estruturas geométricas porosas complexas. Neste trabalho, para todos os exemplos numéricos, uma permeabilidade constante do material é assumida.

Já a tortuosidade (φ) descreve a "curvatura" dos poros e, portanto, depende da microestrutura das partículas sólidas, sendo φ inversamente proporcional a k^f . Na Figura 6.7 é ilustrado o efeito de tortuosidade.

Figura 6.7 – Efeito da tortuosidade na microescala.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O escoamento da Figura 6.7 aponta predominantemente da esquerda para a direita, levando a uma velocidade média correspondente. Porém, devido as diferentes curvaturas microgeométricas pela variabilidade das partículas, as forças de inércia também podem atuar em outras direções.

Em Coussy (2004) o efeito da tortuosidade é considerado no balanço entre as fases como um termo de inércia adicional ao sistema. A tortuosidade não é considerada neste trabalho, e, portanto, não aparece nas equações da fase fluída, mas considera-se interessante o conhecimento ao leitor.

6.6 RELAÇÕES DE BALANÇO PARA MODELO BIFÁSICO

Nesta seção serão apresentados os balanços das fases homogeneizadas e sua relação com a porosidade do meio, que no presente trabalho são assumidas as seguintes hipóteses para a dedução do modelo:

- Fluido monofásico;
- Viscosidade constante;
- Permeabilidade constante;
- Porosidade espacial e temporal constantes;
- Porosidade interconectada e sem porosidade oclusa;
- Sólido e fluido incompressíveis.

6.6.1 Balanço de volume

Cada fase do modelo bifásico deve atender a conservação de massa, como já apresentado inicialmente nos problemas desacoplados para os capítulos anteriores, que parte do princípio de não ocorra criação ou desaparecimento de matéria, formulado pela Equação (6.24)

$$\frac{\partial(\rho^\pi \eta^\pi)}{\partial t} + \rho^\pi \eta^\pi \nabla \cdot (\mathbf{v}^\pi) = 0, \quad \text{em que } \pi \in \{s, f\} \quad (6.24)$$

na qual π referência a fase em questão, η^s define a quantidade sólida representativa ($1 - \eta^f$), logo, η^f refere-se a porosidade fluída do meio. Pela hipótese de constituintes materialmente incompressíveis, podemos assim definir a Equação (6.25).

$$\rho^f = \text{const.}, \text{ e } \rho^s = \text{const.}, \quad (6.25)$$

em que para uma análise em pequenas deformações, pode-se considerar que porosidade Lagrangiana e Euleriana são equivalentes ($\eta \approx \phi$). Assim, a obtemos a partir da associação das Equações (6.24) e (6.25) à Equação (6.26)

$$\frac{\partial \phi^\pi}{\partial t} + \phi^\pi \nabla \cdot (\mathbf{v}^\pi) = 0, \quad \text{em que } \pi \in \{s, f\} \quad (6.26)$$

Portanto, desenvolvendo a Equação (6.26) para ambas as fases e somando as mesmas, obtém-se a Equação (6.27).

$$\nabla \cdot (\phi^f \mathbf{v}^f + (1 - \phi^f) \dot{\mathbf{y}}^s) = 0. \quad (6.27)$$

recordando o leitor a formulação da fase sólida por se tratar de posições apresentamos a velocidade da fase (\mathbf{v}^s) como sendo ($\dot{\mathbf{y}}^s$), pela equivalência.

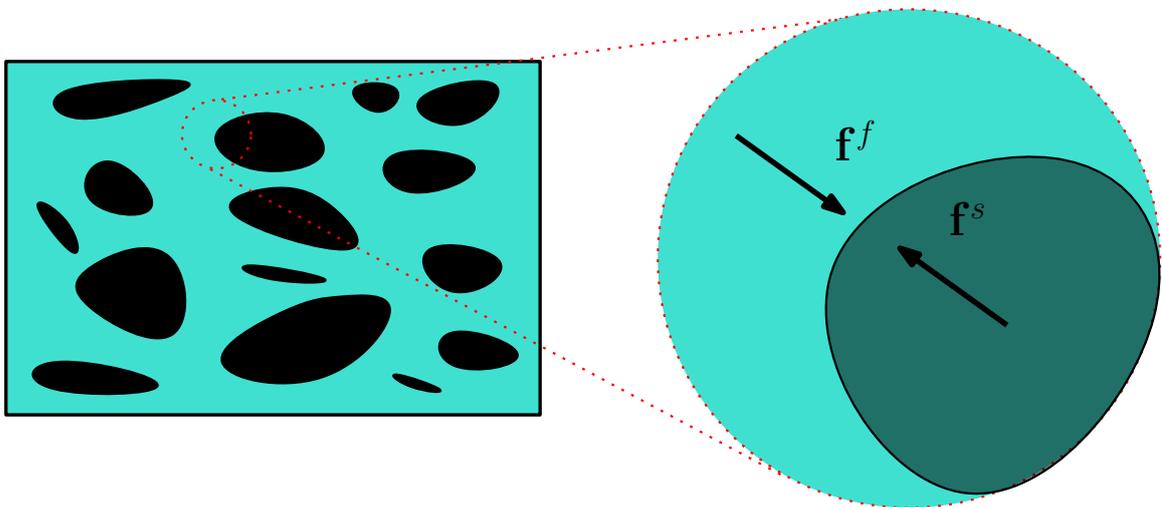
6.6.2 Balanço da quantidade de movimento

A equação de balanço da quantidade de movimento denota que a resultante de todas as forças atuantes no domínio Ω_t deve ser igual à taxa de variação da quantidade de movimento. O balanço de quantidade de movimento de cada fase homogeneizada é definida pela Equação (6.28), já considerando a equivalência entre porosidade Lagrangiana e Euleriana.

$$\phi^\pi \rho^\pi \frac{\partial v^\pi}{\partial t} = \nabla \cdot (\sigma^\pi) + \phi^\pi \rho^\pi \mathbf{g} + \mathbf{f}^\pi, \quad \text{em que } \pi \in \{s, f\} \quad (6.28)$$

onde $\phi^\pi \rho^\pi \mathbf{g} = \phi^\pi \mathbf{b}^\pi$ é a força de massa específica do corpo agindo uniformemente sobre a fase, e \mathbf{f}^π representa a força de interação local específica do volume entre o fluido e o constituinte sólido, que pode ser entendida pela Figura 6.8.

Figura 6.8 – Interação local específica de volume entre fases.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, pela à conservação geral de quantidade de movimento entre as fases, o equilíbrio deve ser atendido, assim têm-se que:

$$\mathbf{f}^s + \mathbf{f}^f = \mathbf{0} \quad (6.29)$$

Ao aplicar o conceito de tensões efetivas apresentada na Seção 6.3.1, para descrever o estado de tensão em uma fase de material poroso homogeneizado, detalha-se a decomposição do

tensor de Cauchy de cada fase e sua força de interação da seguinte forma:

$$\sigma^\pi = \sigma_E^\pi - \phi^\pi p^f \mathbf{I} \quad (6.30)$$

$$\mathbf{f}^f = p^f \nabla(\phi^f) + \mathbf{f}_E^f \quad (6.31)$$

Neste contexto, σ_E^π e \mathbf{f}_E^f são denominados como termos efetivos, e p^f pode ser interpretada como multiplicador de Lagrange para o requisito de incompressibilidade dentre as fases na mistura.

6.6.3 Balanço da quantidade de movimento do fluido homogeneizado

Segundo [Diebels, Ehlers e Markert \(2001\)](#), para um escoamento laminar, a parcela $\nabla \cdot (\sigma)_E^f \ll \mathbf{f}_E^f$ pode ser eliminada do balanço do momento do fluido. Considerando permeabilidade isotrópica ($k_x=k_y=k_z$), a força de interação (\mathbf{f}_E^f) é definida conforme Equação (6.32), neste trabalho também formulada como força de Darcy (\mathbf{F}_{Darcy}^f).

$$\mathbf{f}_E^f = -\frac{\mu^f (\phi^f)^2}{k^f} (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) = \mathbf{F}_{Darcy}^f. \quad (6.32)$$

Portanto, a Equação (6.28) para a fase fluida, negligenciando as parcelas de gradiente de porosidade, pela Equação (6.33).

$$\phi^f \rho^f \frac{\partial v^f}{\partial t} + \phi^f \nabla p^f - \phi^f \mathbf{b}^f + \frac{\mu^f (\phi^f)^2}{k^f} (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) = \mathbf{0}, \quad (6.33)$$

pode ser simplificada como:

$$\rho^f \frac{\partial v^f}{\partial t} + \nabla p^f - \mathbf{b}^f + \frac{\mu^f \phi^f}{k^f} (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) = \mathbf{0}, \quad (6.34)$$

A Equação (6.34) esta associada a escoamento laminar. Para este trabalho, ao se utilizar uma adaptação da Equação (5.29) de Navier-Stokes, ao associar as duas formulações, definindo portanto, a Equação (6.35) para contemplar as parcelas convectivas da formulação que possibilita escoamentos turbulentos e uso descrição ALE.

$$\phi^f \rho^f \left(\frac{\partial \mathbf{v}^f}{\partial t} + (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) \cdot \nabla \mathbf{v}^f \right) + \phi^f \nabla p^f + \frac{\mu^f (\phi^f)^2}{k^f} (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) - \mu^f (\nabla \mathbf{v}^f + (\nabla \mathbf{v}^f)^T) - \phi^f \mathbf{b}^f = \mathbf{0}, \quad (6.35)$$

Pelo mesmo princípio já citado, a Equação (6.36) pode ser simplificada pela porosidade fluida:

$$\rho^f \left(\frac{\partial \mathbf{v}^f}{\partial t} + (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) \cdot \nabla \mathbf{v}^f \right) + \nabla p^f + \frac{\mu^f \phi^f}{k^f} (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) - \frac{\mu^f}{\phi^f} (\nabla \mathbf{v}^f + (\nabla \mathbf{v}^f)^T) - \mathbf{b}^f = \mathbf{0}. \quad (6.36)$$

Vale ressaltar que o termo convectivo ($\mathbf{v}^f \cdot \nabla \mathbf{v}^f$) e difusivo ($\mu^f (\nabla \mathbf{v}^f + (\nabla \mathbf{v}^f)^T)$) da Equação (6.35) pode ser negligenciado para escoamento com baixo número de Reynolds.

6.6.4 Balanço da quantidade de movimento do sólido homogeneizado

Desenvolvendo a Equação (6.28) para a fase sólida, obtém-se a Equação (6.37)

$$\phi^s \rho^s \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}^s}{\partial t} - \nabla \cdot (\sigma_{\mathbf{E}^s} - \phi^s p^f \mathbf{I}) - \phi^s \mathbf{b}^s + \mathbf{f}^s = \mathbf{0}, \quad (6.37)$$

desconsiderando os termos de gradiente de porosidade e substituindo os termos convenientes pelo uso dos conceitos e Equações (6.30), (6.31) e (6.32), define-se portanto a Equação (6.38).

$$\phi^s \rho^s \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}^s}{\partial t} - \nabla \cdot (\sigma_{\mathbf{E}^s}) + \phi^s \nabla p^f - \phi^s \mathbf{b}^s - \frac{\mu^f (\phi^f)^2}{k^f} (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) = \mathbf{0}. \quad (6.38)$$

A Equação (6.38) representa o balanço de quantidade de movimento da fase sólida do domínio poroso, considerando a incompressibilidade do material e portanto, o que se deforma é a matriz do domínio poroso.

Já a forma Lagrangiana da quantidade de movimento para o sólido homogeneizado é definida na Equação (6.39). Para caso de dúvidas para a mudança de descrição (Euleriana - Lagrangiana) ver Seção 3.4.3.

$$\phi^s \rho^s \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}^s}{\partial t} - \nabla_0 \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^s) + J \mathbf{A}^{-T} \phi^s \cdot \nabla_0 p^f - \phi^s \mathbf{b}^s - \frac{\mu^f (\phi^f)^2 J}{k^f} (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) = \mathbf{0}. \quad (6.39)$$

Ressalta-se que inicialmente o equilíbrio do fluido é realizado em descrição Euleriana, e por consequência esta associado a porosidade η^f . No entanto, pela consideração de não variação de porosidade no espaço e no tempo, essa foi apresentada na formulação da fase fluida como ϕ^f .

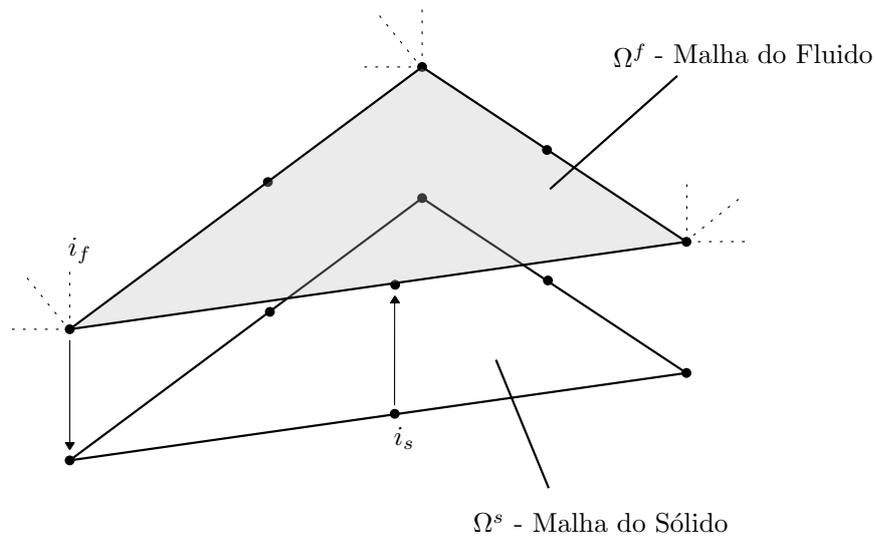
6.7 SUMÁRIO DE EQUAÇÕES E ACOPLAMENTO DAS FASES

Todas as equações, em sua forma forte, que conduzem finalmente à seguinte formulação forte do problema do meio poroso são expressas abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\phi^f \mathbf{v}^f + (1 - \phi^f) \dot{\mathbf{y}}^s) = 0, \quad \text{em } \Omega_t^f \times [t_0, t_f] \\ \phi^f \rho^f \left(\frac{\partial \mathbf{v}^f}{\partial t} + (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) \cdot \nabla \mathbf{v}^f \right) + \phi^f \nabla p^f + \frac{\mu^f (\phi^f)^2}{k^f} (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) \\ - \mu^f (\nabla \mathbf{v}^f + (\nabla \mathbf{v}^f)^T) - \phi^f \mathbf{b}^f = \mathbf{0}, \quad \text{em } \Omega_t^f \times [t_0, t_f] \\ \phi^s \rho^s \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}^s}{\partial t} - \nabla_0 \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^s) + J \mathbf{A}^{-T} \phi^s \cdot \nabla_0 p^f - \phi^s \mathbf{b}^s - \frac{\mu^f (\phi^f)^2 J}{k^f} (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) = \mathbf{0}, \\ \text{em } \Omega_0^s \times [t_0, t_f]. \end{array} \right. \quad (6.40)$$

A abordagem adotada neste trabalho utiliza variáveis primárias dos campos físicos do problema poroelástico, na parcela sólida o campo de posições (\mathbf{y}^s) e na parcela fluida do domínio o campo de velocidade (\mathbf{v}^f) e pressão (p^f) (ie, abordagem $\mathbf{y}^s \mathbf{v}^f p^f$).

Figura 6.10 – Sobreposição de domínios com malhas sobrepostas.

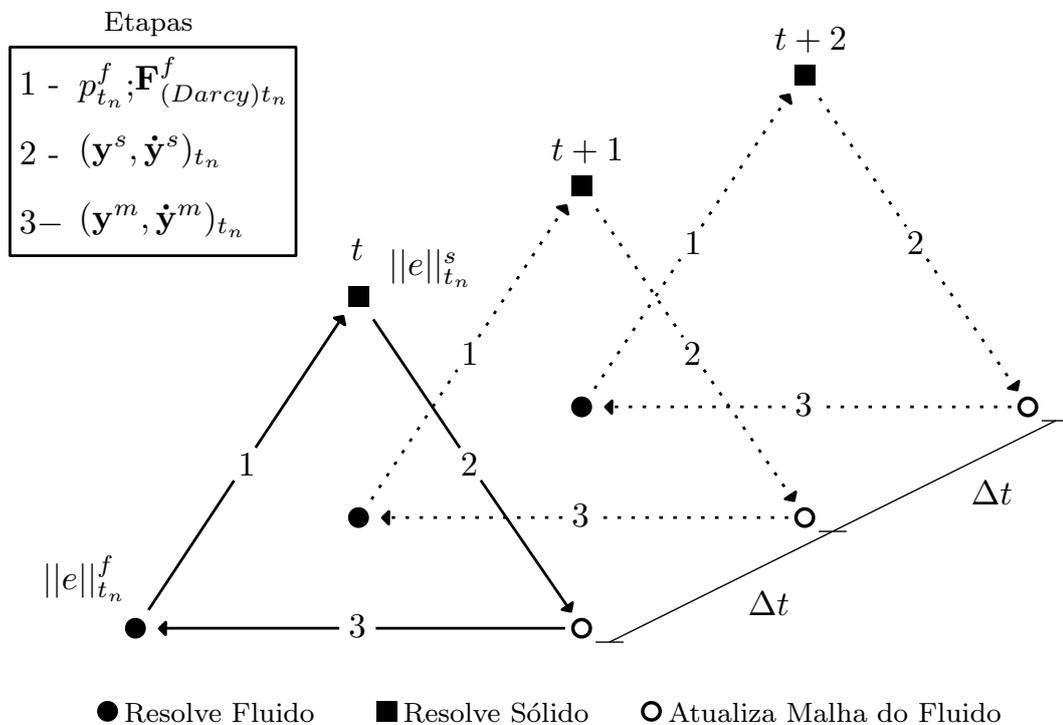


Fonte: Elaborado pelo autor.

descartadas. Estas informações são devidamente apresentadas no trabalho de [Bazilevs, Takizawa e Tezduyar \(2013\)](#).

Assim, o esquema iterativo utilizado pode ser mais facilmente entendido pela Figura 6.11, que ilustra a estratégia e procedimentos iterativos.

Figura 6.11 – Esquema particionado forte.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Definem-se portanto as seguintes etapas no processo iterativo:

1. Resolve-se o problema de escoamento do fluido. Calcula-se as pressões (p^f), em

seguida o gradiente de pressão (∇p^f) e força de Darcy (\mathbf{F}_{Darcy}^f) a serem aplicadas na fase sólida. Verifica-se a norma Euclidiana ($\|e\|_{t_n}^f$) da primeira e segunda Equação (6.40) para a fase fluida;

2. É resolvido o problema da matriz sólida com imposição das forças externas totais aplicadas no domínio poroso \mathbf{f}_{ext} , $\phi^s \nabla p^f$ e \mathbf{F}_{Darcy}^f , obtendo uma nova configuração (\mathbf{y}_t^s) e a velocidade do sólido ($\dot{\mathbf{y}}_t^s$). Verifica-se a norma Euclidiana ($\|e\|_{t_n}^s$) terceira Equação (6.40) para a fase sólida;

3. Nesta abordagem com descrição ALE do fluido, a posição da malha é equivalente a posição ($\mathbf{y}_t^m = \mathbf{y}_t^s$) e velocidade ($\mathbf{v}_t^m = \dot{\mathbf{y}}_t^s$) do sólido, portanto atualiza-se a malha;

Caso as normas do critério para as fases sejam atendidas, o problema poroelástico avança no tempo ($t+1$). Caso contrário, o ciclo é repetido até a convergência, e portanto, na iteração $k+1$, resolve-se o problema de escoamento com uma nova posição da malha ALE. Nota-se que para o cálculo da $\mathbf{F}_{(Darcy)t_n}^f$ utiliza-se a velocidade do sólido obtida na última iteração.

6.7.2 Condições de interface entre fases

As condições iniciais e de contorno devem ser definidas de modo apropriado para obter uma descrição completa do problema. As regiões referentes a condição de contorno material e atual são definidas em *Dirichlet* (D, π), *Neumann* (N, π) e limite de restrição de impermeabilidade (c, π), ou seja $\Gamma_0^\pi = \Gamma_0^{D,\pi} \cup \Gamma_0^{N,\pi} \cup \Gamma_0^{c,\pi}$ e $\Gamma_t^\pi = \Gamma_t^{D,\pi} \cup \Gamma_t^{N,\pi} \cup \Gamma_t^{c,\pi}$.

Devido às regiões de fronteiras de *Dirichlet* e *Neumann* de ambas as fases não necessitam ser idênticas, na região $\Gamma_t^{c,\pi}$ implica-se à igualdade das componentes normais das velocidades no caso do escoamento de Darcy, e velocidades idênticas para o escoamento de Darcy-Brinkman:

$$\text{Darcy: } \phi^f \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s) = 0 \times [t_0, t_f], \quad (6.41)$$

$$\text{Darcy-Brinkman: } \mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{y}}^s = \mathbf{0} \times [t_0, t_f]. \quad (6.42)$$

Para a fase sólida são impostos condições iniciais de posição e velocidade prescritos,

$$\mathbf{y}^s = \hat{\mathbf{y}}_0^s \text{ em } \Omega_0, \quad (6.43)$$

$$\dot{\mathbf{y}}^s = \dot{\hat{\mathbf{y}}}_0^s \text{ em } \Omega_0, \quad (6.44)$$

$$\mathbf{v}^f = \hat{\mathbf{v}}_0^f \text{ em } \Omega_t, \quad (6.45)$$

como, por exemplo, a condição de contorno de *Dirichlet* mais simples é um campo de posição prescrito $\hat{\mathbf{y}}^s$ em uma parte do contorno estrutural $\Gamma_0^{D,s}$ na configuração inicial. Bem como velocidade do fluido prescrita $\Gamma_t^{D,f}$.

$$\mathbf{y}^s = \hat{\mathbf{y}}_0^s \text{ em } \Gamma_0^{D,s} \times [t_0, t_f] \quad (6.46)$$

$$\mathbf{v}^f = \hat{\mathbf{v}}_t^f \text{ em } \Gamma_t^{D,f} \times [t_0, t_f] \quad (6.47)$$

É de alta complexidade definir condições de contorno adequadas para problemas de meios porosos, pois para cada fase é necessária sua devida condição de fronteira no domínio. Por exemplo, uma condição de *Neumann* pode ser aplicada no domínio homogeneizado global, bem como no fluido dos poros no mesmo contorno $\Gamma^{N,f}$ em diferentes configurações como:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^s) \cdot \mathbf{N} = \hat{\mathbf{t}}_0 \text{ em } \Gamma_0^{N,s} \times [t_0, t_f] \quad (6.48)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}^f \cdot \mathbf{n}) = \hat{\mathbf{t}}_t \text{ em } \Gamma_t^{N,f} \times [t_0, t_f] \quad (6.49)$$

Essas condições podem ser combinadas com um limite de tração para toda a mistura ou um limite de Dirichlet na fase sólida.

Em sistemas FSI monolíticos, o multiplicador de Lagrange atua em ambas as equações de balanço (sólido e fluido) (ver [Mayr et al. \(2015\)](#)). No caso da formulação particionada porosa deste trabalho, o multiplicador de Lagrange atua na fase fluida como restrição de incompressibilidade da fase, sendo esse também imposto na fase sólida como condição de incompressibilidade da partícula, caracterizado no equilíbrio de trações nas interfaces. O multiplicador de Lagrange para o domínio poroso pode ser entendido como a tração fluida \mathbf{t}^f atuante no limite de restrição $\Gamma_t^{c,f}$.

6.8 EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO

6.8.1 Geometria do problema de Adensamento dinâmico unidimensional

Como primeiro exemplo, foi considerado uma camada porosa de altura inicial (H_0) de 10 e seção transversal de 1m^s , conforme ilustrado na Figura 6.12. Este exemplo foi estudado por [Li, Borja e Regueiro \(2004b\)](#), [Li e Borja \(2005\)](#) e [Goda \(2019\)](#). Trata-se de um problema unidimensional, sendo geometricamente construído em 2D em estado plano de deformação (EPD).

A superfície superior é perfeitamente drenada e está submetida a uma tensão instantânea. Nas fronteiras laterais considera-se posição horizontal prescrita ($\mathbf{y}_x^s = \hat{\mathbf{y}}_x^s$) na fase sólida para as faces laterais e superfície inferior posição vertical prescrita ($\mathbf{y}_y^s = \hat{\mathbf{y}}_y^s$). Já no fluido estas fronteiras são consideradas impermeáveis. Os parâmetros materiais assumidos apresentados na Tabela 3.

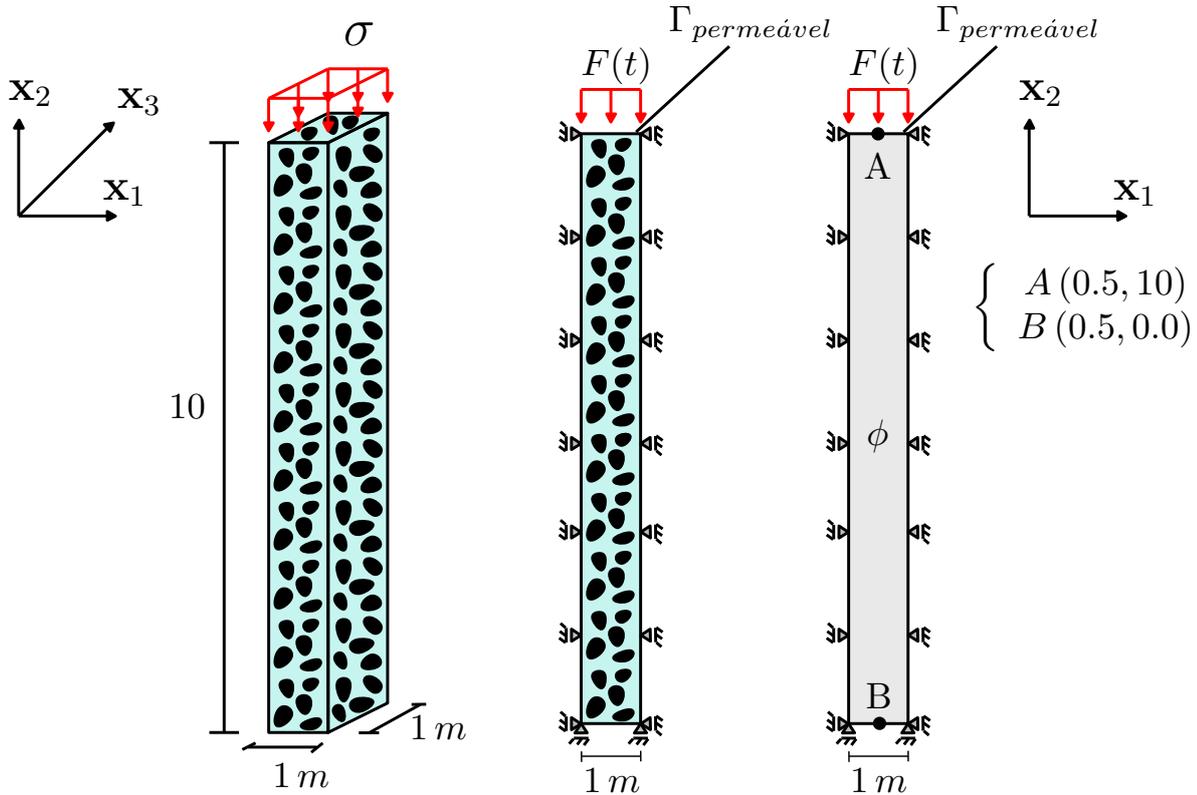
A solução analítica estacionária para este exemplo em situação de compressão simples geometricamente linear é descrito conforme Equação (6.50).

$$\Delta H = \frac{F(t) \cdot H_0}{M_c}, \quad M_c = \lambda + 2\mu \quad (6.50)$$

em que M_c é o módulo de restrição da matriz sólida, λ e μ são as constantes de Lamé para a matriz sólida, $\lambda = 29 \text{ MPa}$ e $\mu = 7 \text{ MPa}$.

Utilizou-se uma malha *Delaunay*, sendo esta apresentada na Figura 6.13 e consta com 188 elementos T6 e 435 nós.

Figura 6.12 – Esquema da coluna 1D de solo com carregamento no topo.



Fonte:Elaborado pelo autor

Tabela 3 – Parâmetros materiais da coluna porosa.

Parâmetros materiais	Valores	Unidades
Módulo de Elasticidade (E)	20	[MPa]
Coefficiente de poisson (ν)	0,4	-
Densidade do sólido (ρ^s)	2700	[kg/m ³]
Densidade do fluido (ρ^f)	1000	[kg/m ³]
Permeabilidade isotrópica (k^f)	10 ⁻⁸	[m ²]
Viscosidade dinâmica (μ^f)	10 ⁻³	[Pa.s]
Porosidade fluida (ϕ^f)	0,42	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6.13 – Malha Delaunay exemplo poroso 1.

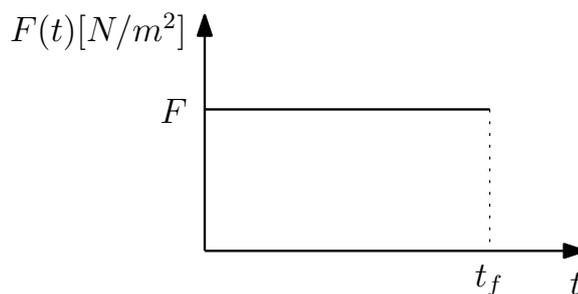


Fonte:Elaborado pelo autor.

6.8.1.1 Adensamento dinâmico com pulso constante

Para a primeira análise da coluna porosa apresentada na Figura 6.12, considerou-se um pulso instantâneo constante de intensidade $F(t) = 40 \text{ kN/m}^2$ a ser aplicado em todo domínio poroso, conforme perfil de carregamento da Figura 6.14.

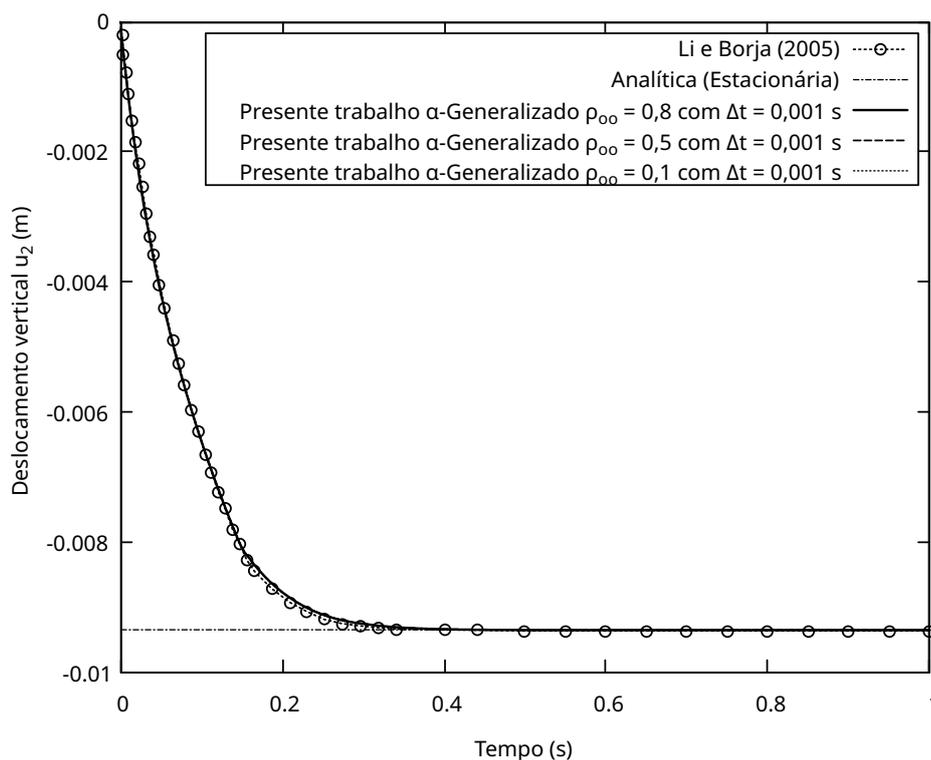
Figura 6.14 – Perfil de carga instantânea constante.



Fonte:Elaborado pelo autor.

Utilizou-se um passo de tempo fixo de $\Delta t = 10^{-3} s$ e raio espectral $\rho_{\infty} = [0, 1; 0, 5; 0, 8]$. Os resultados nodais foram analisados no ponto superior da coluna (A). Os deslocamentos verticais da coluna são comparados com a referência da literatura de [Li e Borja \(2005\)](#), conforme apresentado na Figura 6.15.

Figura 6.15 – Deslocamento vertical do ponto A com pulso constante.

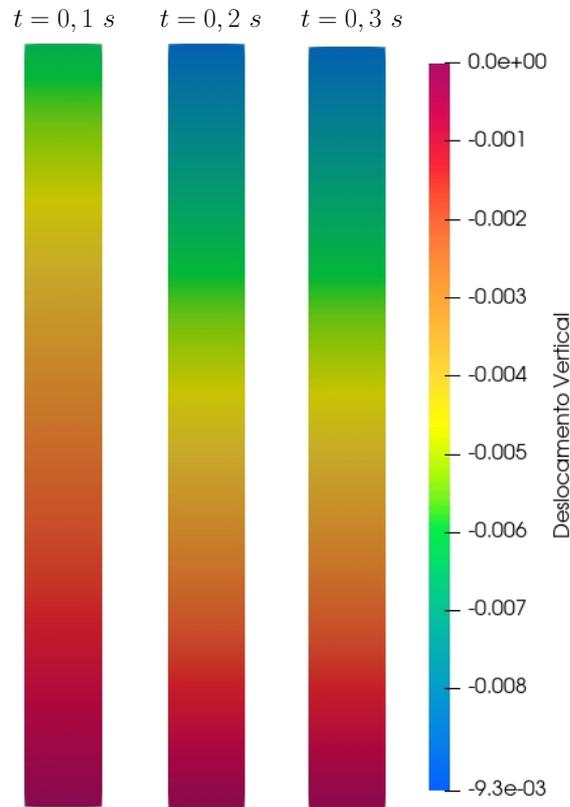


Fonte:Elaborado pelo autor.

Considera-se portanto que para o pulso imposto na superfície do domínio poroso obteve-se uma resposta satisfatória para o passo de tempo utilizado, assim como a pequena variação pela variação do raio espectral das fases. Como a permeabilidade é alta a resposta dinâmica se aproxima rapidamente da resposta estacionária e portanto, as forças inerciais das fases geram pouca influência para esse problema.

O campo de deslocamentos da fase sólida (matriz) é apresentado na Figura 6.16, de modo a ilustrar o avanço dos deslocamentos na escala temporal do domínio poroso.

Figura 6.16 – Campo de deslocamento da fase sólida com $\rho_\infty = 0,1$.



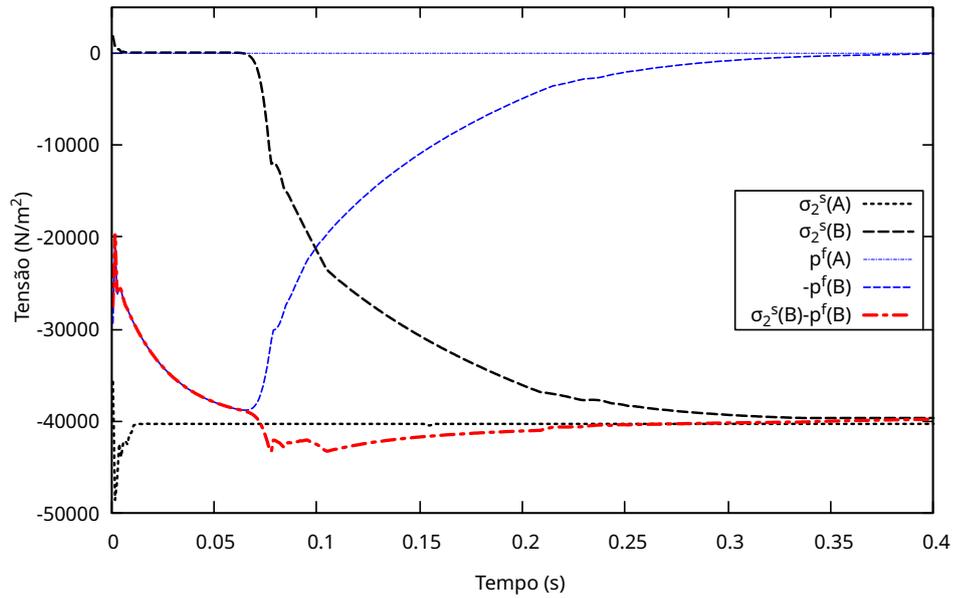
Fonte:Elaborado pelo autor.

A variação temporal no ponto A para a tensão de *Cauchy* do sólido σ_2^s em relação a p^f é ilustrada na Figura 6.17, verificando o efeito que a fase sólida após as dissipações das pressões do fluido está sujeita a toda a tensão imposta na superfície drenante do domínio.

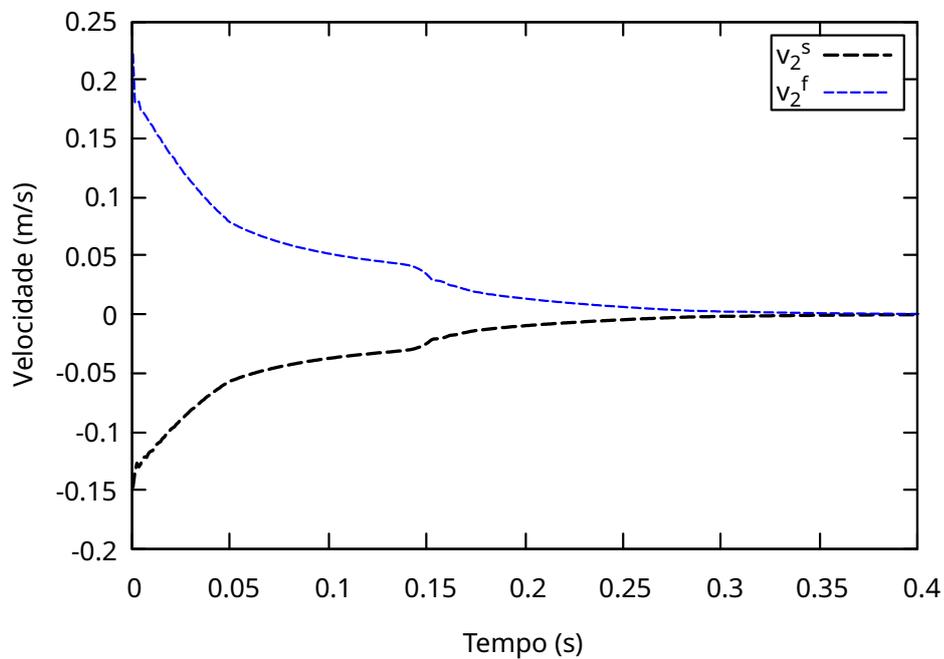
Algumas variações espúrias de pressão são apresentadas na Figura 6.17 devido a se tratar de um problema fortemente não linear, fazendo com que a estratégia particionada necessite de uma discretização espacial e temporal adequada para as duas fases. Porém, considera-se as respostas satisfatórias pelo efeito de qualquer instabilidade ocorrer de maneira similar entre as fases, demonstrando portanto eficiência no desenvolvimento da formulação apresentada.

Para o ponto A em análise da malha é válido a verificação das velocidades entre as fases, dada sua influência na \mathbf{F}_{Darcy}^f . O resultado obtido utilizando o raio espectral $\rho_\infty = 0,1$ para ambas a fases é exposto na Figura 6.18

Conforme apresentado na Figura 6.18, enquanto a velocidade do sólido reduz em função da deformação do domínio poroso, o fluido reduz sua velocidade pela dissipação das pressões devido a superfície drenante. Para alguns resultados apresentou-se apenas valores obtidos utilizando o integrador α -generalizado com uso do raio espectral $\rho_\infty = 0,1$ pois para

Figura 6.17 – Avanço temporal σ_2^s e p^f com $\rho_\infty = 0, 1$ para pulso constante.

Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 6.18 – Avanço temporal de $(v^s = \dot{y}^s)$ e a v^f com $\rho_\infty = 0, 1$ para pulso constante no ponto A.

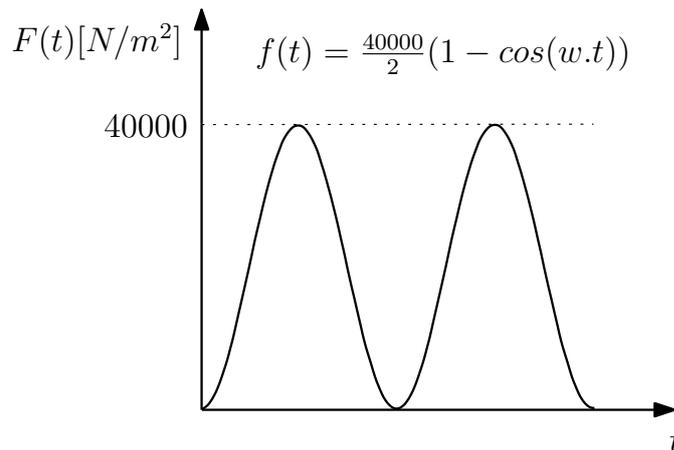
Fonte:Elaborado pelo autor.

outros valores variáveis secundárias e primárias obteve-se valores equivalentes, com variação suave no campo de pressão.

6.8.1.2 Adensamento dinâmico com pulso cossenoidal

Como segunda variação de perfil de carregamento imposto na superfície da coluna 1D, aplicou-se um pulso cossenoidal de compressão confinada ($\omega = 50 \text{ rad/s}$) conforme ilustrado na Figura 6.19. Os resultados foram comparados aos obtidos por [Goda \(2019\)](#), que apresentou a resposta analítica para o caso analisado (ver solução analítica completa ([BOER; EHLERS; LIU, 1993](#))).

Figura 6.19 – Perfil de carga instantânea cossenoidal.



Fonte:Elaborado pelo autor.

Utilizou-se os mesmos valores de Δt e ρ_∞ da pulso constante da Seção 6.8.1.1, assim como a análise no ponto nodal (A). Portanto, os deslocamentos verticais da coluna são comparados com a referência da literatura, conforme apresentado na Figura 6.20.

Todos as simulações produziram resultados com aproximações convergentes para o campo de deslocamento do sólido, partindo da solução de referência analítica no topo da coluna. Ilustra-se portanto na Figura 6.21.

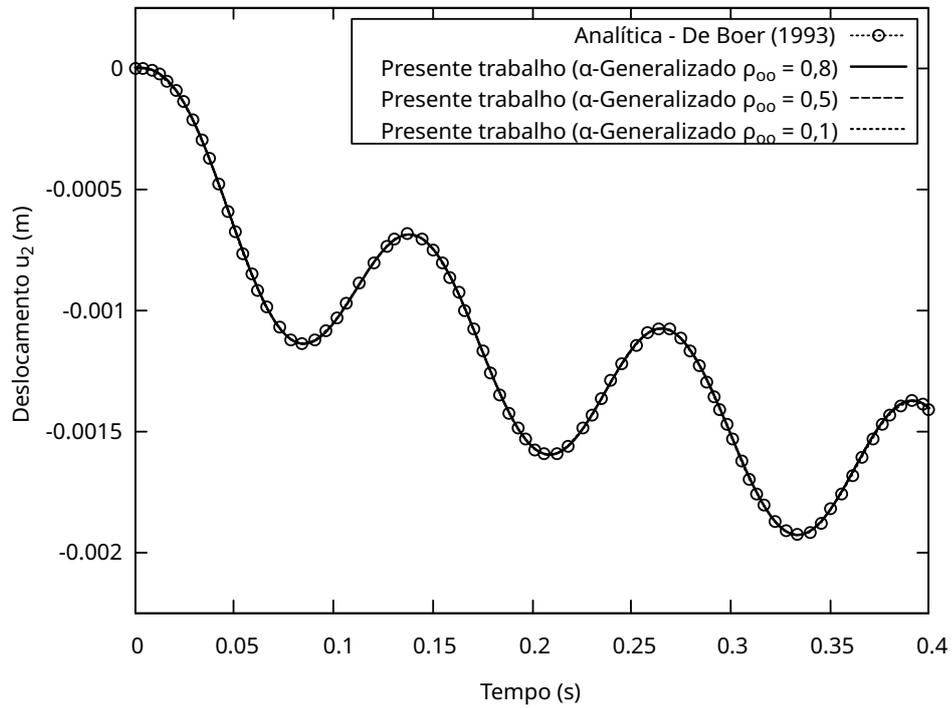
Percebe-se que o perfil de pressão (p^f) tem a tendência de se dissipar ao longo do tempo, até encontrar seu valor nulo. Nesse contexto, a tensão efetiva (σ_2) tem seu efeito de achatar a curva, de modo a convergir ao valor de tensão máxima aplicada de 40 kN/m^2 . Ao longo do tempo a tensão total ($\sigma_2 - p^f$) se eleva em intensidade.

Do mesmo que foi apresentado para o pulso constante, foi verificado as velocidades no ponto A para as fases, conforme ilustrado na Figura 6.23.

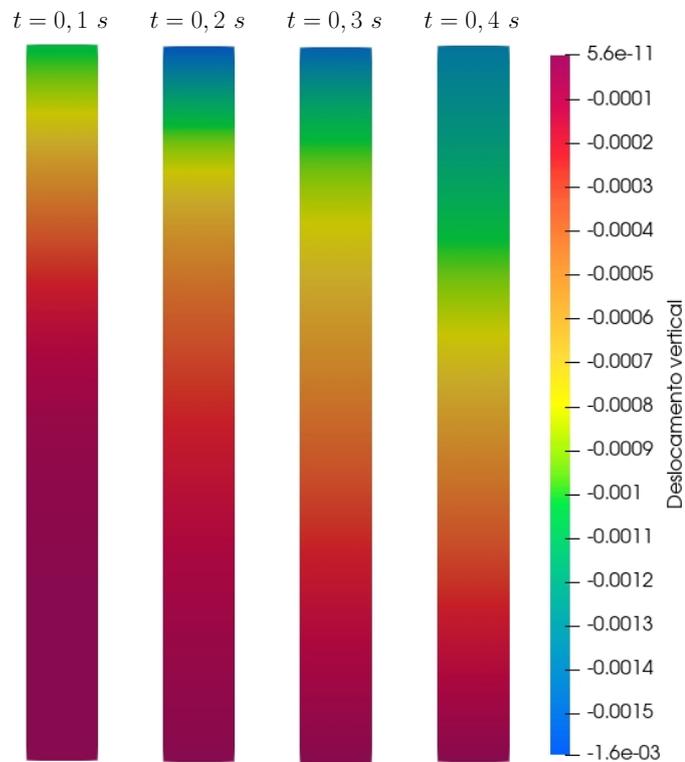
De acordo com a Figura 6.23, enquanto o fluido perde pressão devido a superfície drenante no topo, sua velocidade também se reduz na escala temporal. No caso da velocidade do sólido, esta também é dissipada na escala temporal, enquanto a matriz sólida do domínio poroso é comprimida. Como em intensidade as duas velocidades das fases são diferentes, gera-se no domínio uma força de Darcy (F_{Darcy}^f)

Por se tratar de um problema de propagação de onda, como o caso do pulso constante,

Figura 6.20 – Deslocamento vertical do ponto A com pulso cossenoidal.



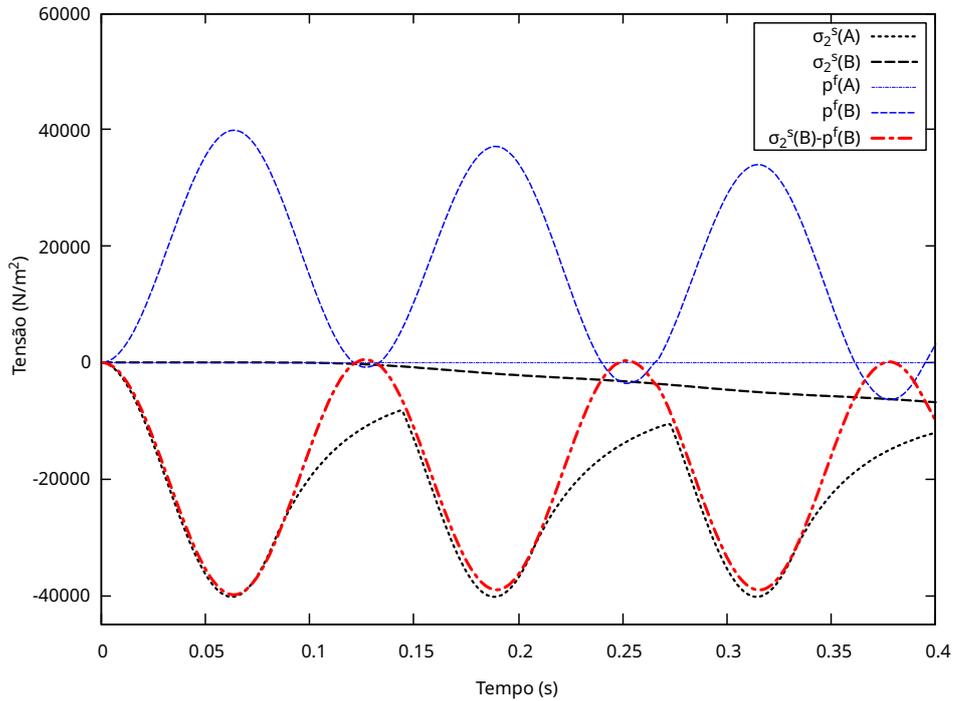
Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 6.21 – Campo de deslocamento da fase sólida com $\rho_\infty = 0,1$ para pulso cossenoidal.

Fonte:Elaborado pelo autor.

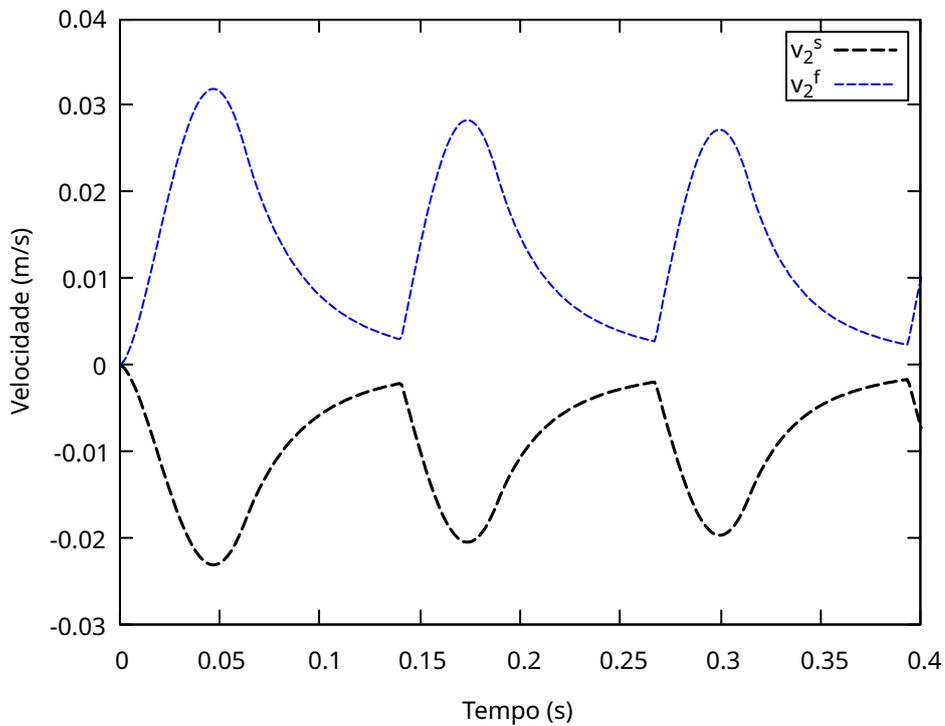
utilizou-se o pulso cossenoidal nesta mesma coluna porosa de modo a validar a formulação alternativa particionada para casos 1D com resultados presentes na literatura, assim como

Figura 6.22 – Avanço temporal de σ_2^s e p^f com $\rho_\infty = 0, 1$ para pulso cossenoidal.



Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 6.23 – Avanço temporal de $(v^s = \dot{y}^s)$ e v^f com $\rho_\infty = 0, 1$ para pulso cossenoidal no ponto A.



Fonte:Elaborado pelo autor.

verificar a devida implementação das variáveis primárias considerando porosidade constante.

6.8.2 Problema bidimensional de propagação de onda em meio poroso saturado

Neste segundo exemplo, é analisado para um problema de propagação de ondas em um domínio poroso simétrico bidimensional devido a uma carga dinâmica submetida em seu topo. Este problema foi apresentado inicialmente por Breuer (1999) e posteriormente estudado por Markert, Heider e Ehlers (2010) e Menon e Song (2021), tomados como base para comparação quanto aos resultados numéricos.

É apresentado na Figura 6.24 a geometria do problema, assim como suas condições de contorno. Para a fase fluida drenante em seu topo ($\bar{p}^f = 0$) e e nas demais superfícies consideradas impermeáveis. Já para a fase sólida (matriz) é devidamente ilustrado as condições de contorno aplicadas.

Para o domínio do problema discretizou-se com o uso de de duas malhas *Delaunay* de elementos T6 para ambas as fases, a malha 1 (ML1) com 2208 elementos e 4541 nós. Já para a segunda malha (ML2) o número de elementos e nós são, 3326 e 6805, respectivamente. As malhas de ML1 e ML2 são apresentas na Figura 6.25, item a) e b), nesta ordem. É considerado EPD e os parâmetros do material são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 – Parâmetros materiais do domínio 2D poroso.

Parâmetros materiais	Valores	Unidades
Módulo de Elasticidade (E)	14,6	[MPa]
Coefficiente de poisson (ν)	0,3	-
Densidade do sólido (ρ^s)	2000	[kg/m ³]
Densidade do fluido (ρ^f)	1000	[kg/m ³]
Permeabilidade isotrópica (k^f)	10^{-9}	[m ²]
Viscosidade dinâmica (μ^f)	10^{-3}	[Pa.s]
Porosidade fluida (ϕ^f)	0,33	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

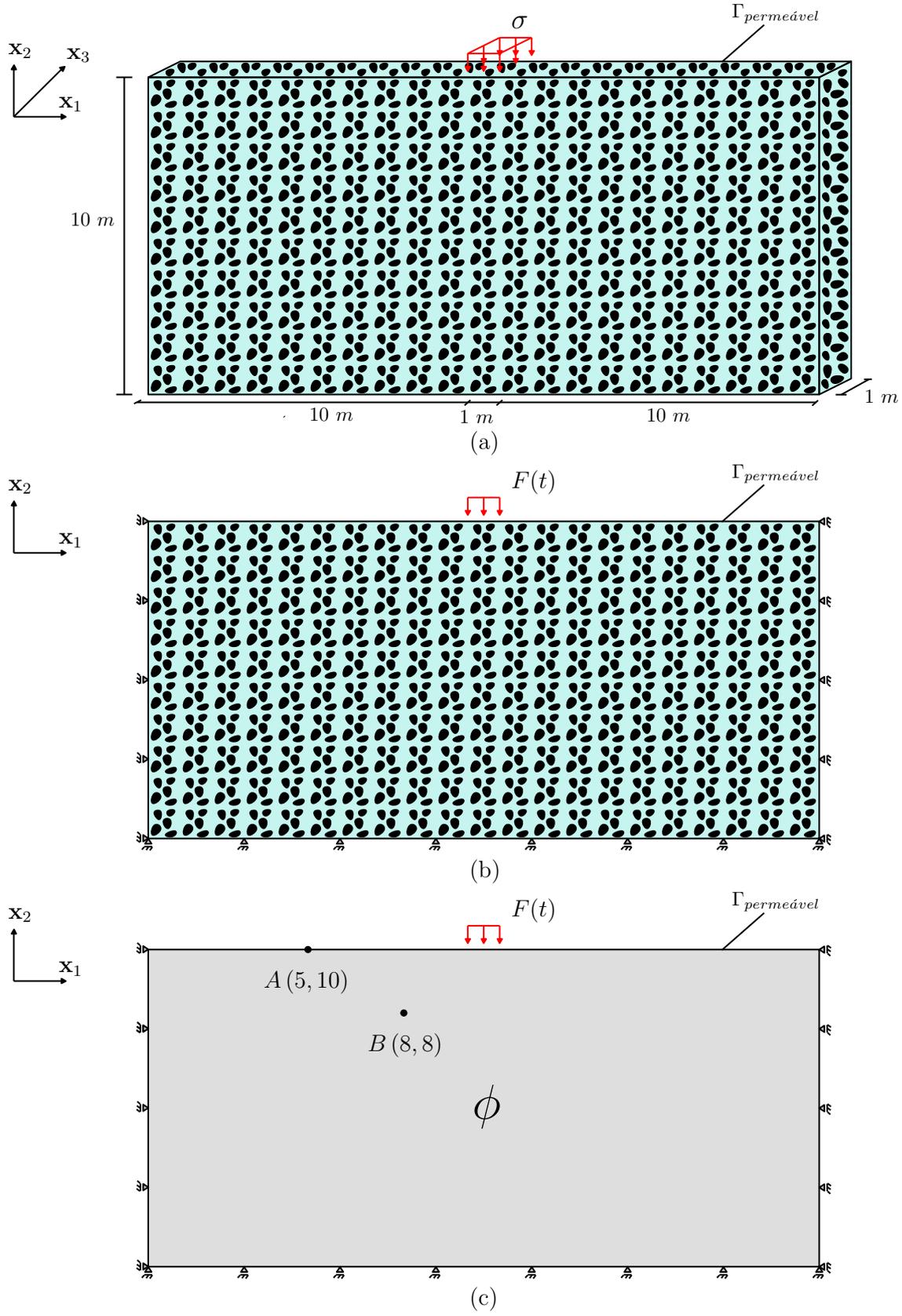
O domínio das fases são prescritos com tensão efetiva inicial e pressão nulas, conforme informado por Breuer (1999). A carga dinâmica é aplicada como um único pulso senoidal de acordo com Markert, Heider e Ehlers (2010), caracterizado na Figura 6.26.

Nas Figuras 6.27, 6.28, 6.29 6.30, são apresentados figuras dos campos de deslocamento do sólido horizontal, vertical, magnitude dos deslocamentos $\|\mathbf{u}^s\| = \sqrt{(\mathbf{u}_1^s)^2 + (\mathbf{u}_2^s)^2}$ e as pressões da fase fluida no poro, demonstrando de forma visual a propagação de ondas bidimensionais no domínio poroso saturado e a dissipação da pressão.

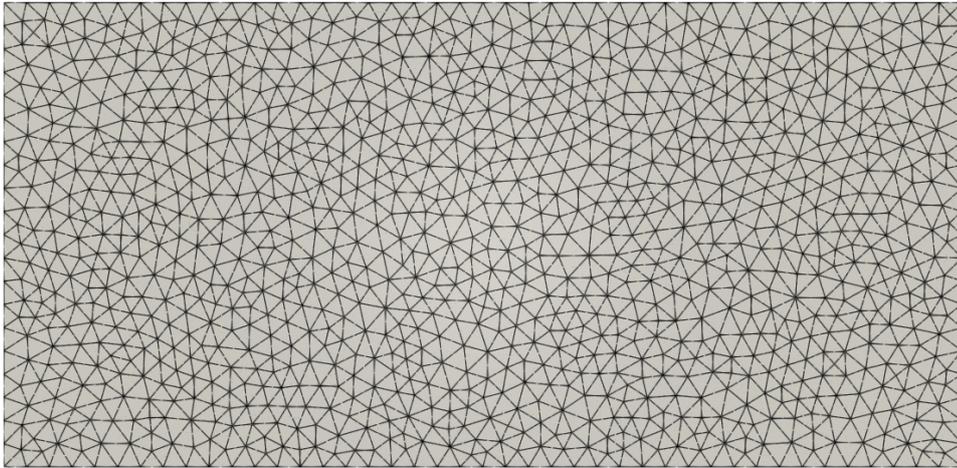
Dado o perfil de carga aplicado no problema, a energia de deformação dissipa-se lentamente à medida que a onda se desloca pelo domínio do problema.

Para este exemplo em específico, dado sua geometria e pulso aplicado, segundo Biot (1956d) esperava-se três tipos de ondas diferentes a serem propagadas. Duas destas ondas são: *P2-wave* (onda de Biot de 2º tipo) e *S-wave*, geradas no domínio poroso referentes a uma onda

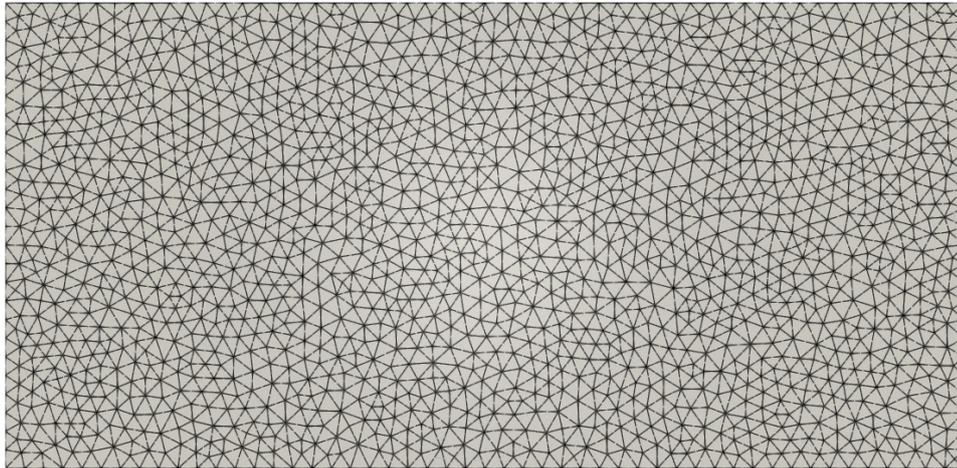
Figura 6.24 – Esquema de problema 2D de solo com carregamento no topo.



Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 6.25 – Malhas *Delaunay*.

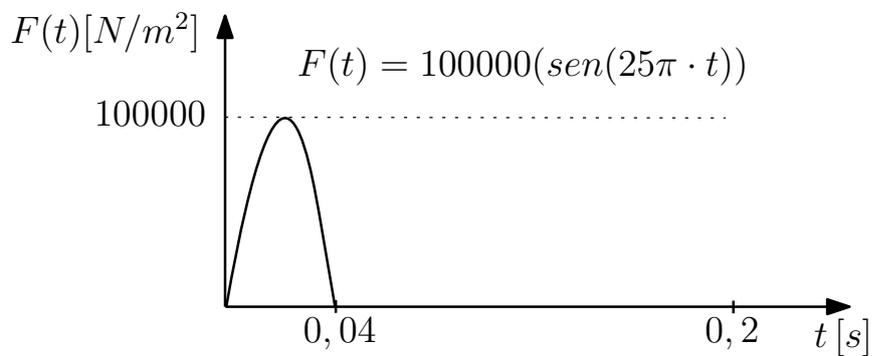
a) ML1



b) ML2

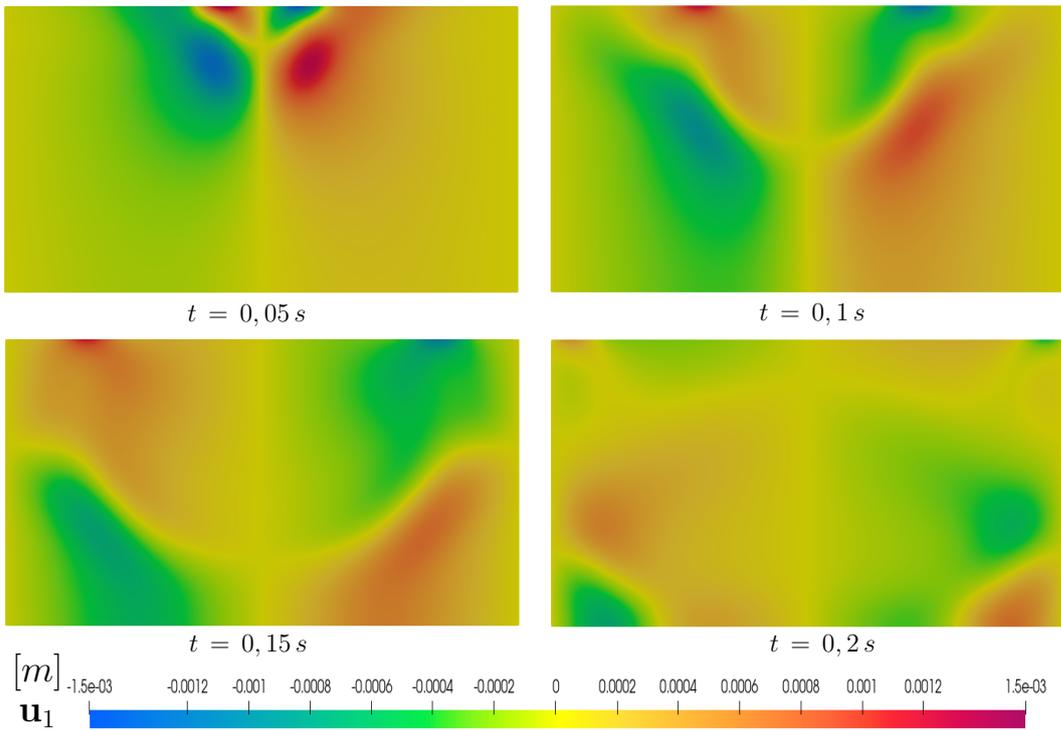
Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 6.26 – Perfil de carga instantânea senoidal em problema 2D.

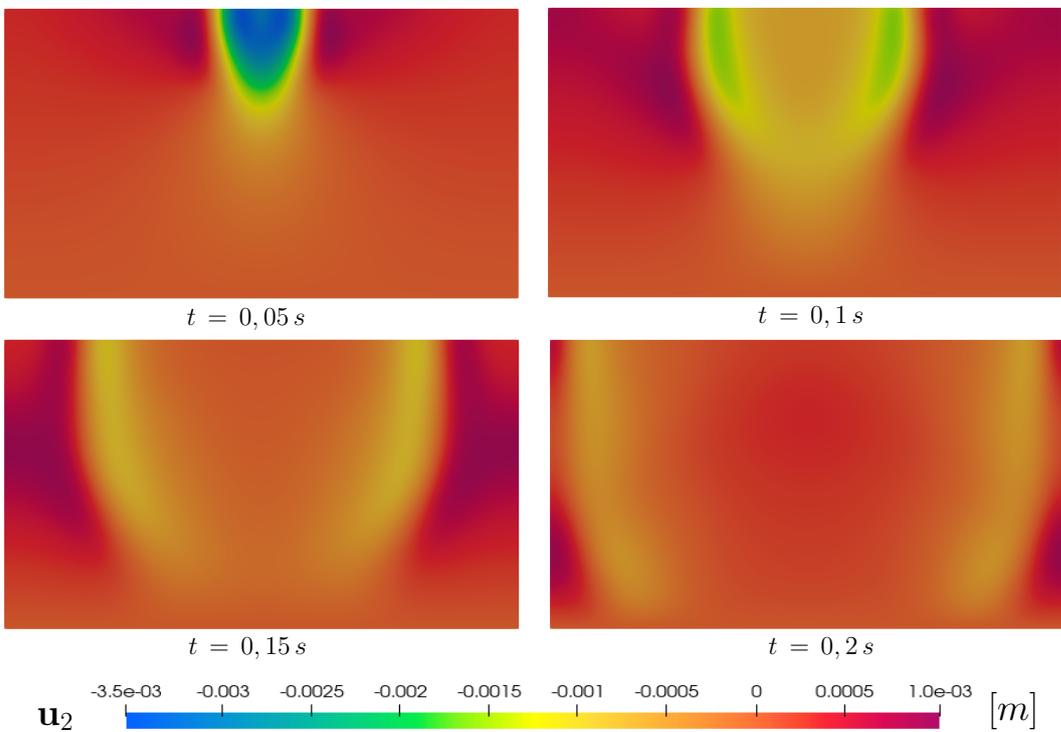


Fonte:Elaborado pelo autor.

de pressão lenta e outra de cisalhamento transversal, respectivamente. Na superfície porosa esperada-se a chamada onda de *Rayleigh* (*R-wave*), onda de superfície elástica caracterizada por um movimento elíptico de partículas em planos normais a superfície e paralelos a direção da

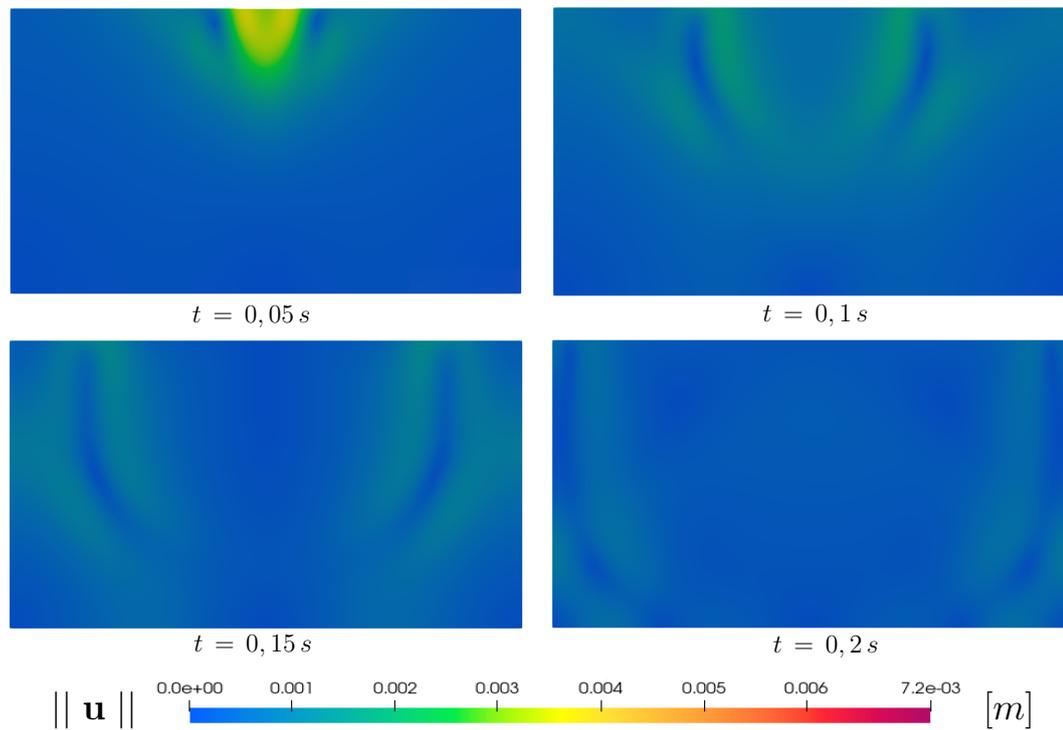
Figura 6.27 – Campo de deslocamentos horizontais da matriz sólida (ML1 - $\rho_\infty = 0,6$).

Fonte:Elaborado pelo autor.

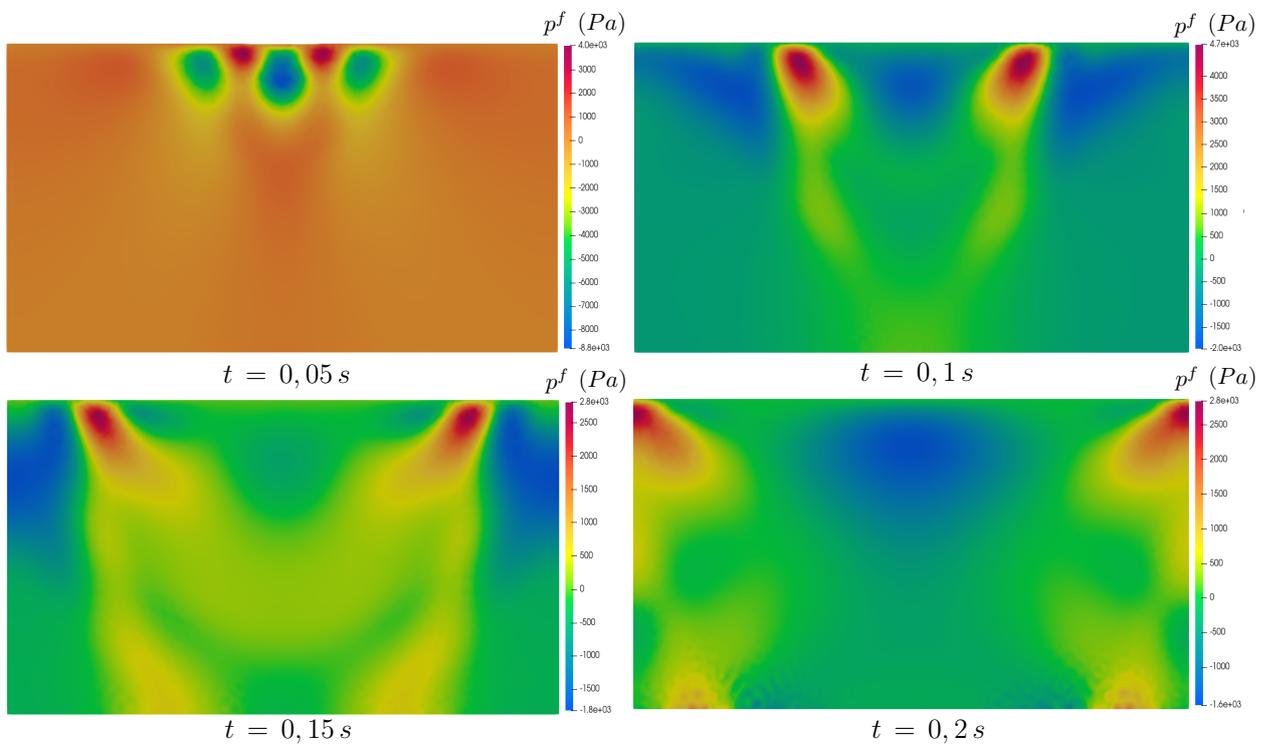
Figura 6.28 – Campo de deslocamentos verticais da matriz sólida (ML1 - $\rho_\infty = 0,6$).

Fonte:Elaborado pelo autor.

propagação da onda, efeito este chamado de *ground-rolling*, ocorrente em situações sísmicas moderadas ou elevadas, gerando o efeito de "rolamento suave" do solo.

Figura 6.29 – Campo de magnitude de deslocamentos da matriz sólida (ML1 - $\rho_\infty = 0,6$).

Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 6.30 – Campo de pressão fluída nos poros (ML1 - $\rho_\infty = 0,6$).

Fonte:Elaborado pelo autor.

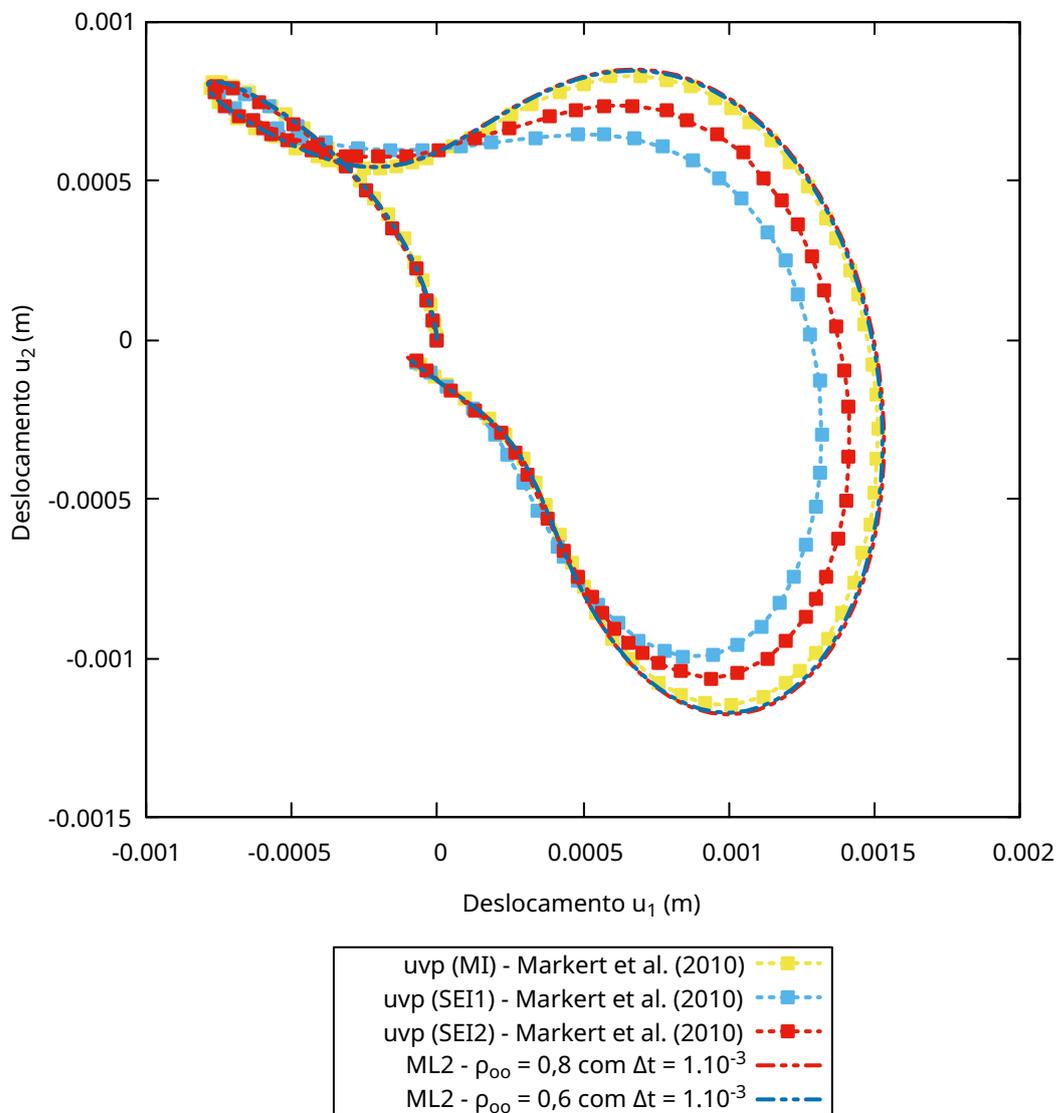
Destaca-se que pela presente formulação com materiais de constituintes incompressíveis uma onda longitudinal rápida e fracamente amortecida chamada de *PI-wave* (onda de Biot de 1°

tipo) tem sua velocidade teórica tendendo ao infinito.

No ponto A informado na Figura 6.24 verifica-se a solução para deslocamentos da matriz e no ponto B para a pressão no domínio do fluido. Nesse exemplo, avaliou-se o amortecimento numérico gerado pelo uso do integrador temporal α -generalizado e a influência do passo de tempo para a solução particionada.

Ilustra-se na Figura 6.31 o amortecimento gerado pela raio espectral (ρ_∞). A diferença entre os resultados obtidos para os deslocamentos nodais na matriz sólida entre ML1 e ML2 foi baixo, e, portanto, plotou-se apenas os resultados obtidos com a malha mais discretizada (ML2).

Figura 6.31 – Relação entre deslocamentos para a matriz sólida no ponto A.



Fonte:Elaborado pelo autor.

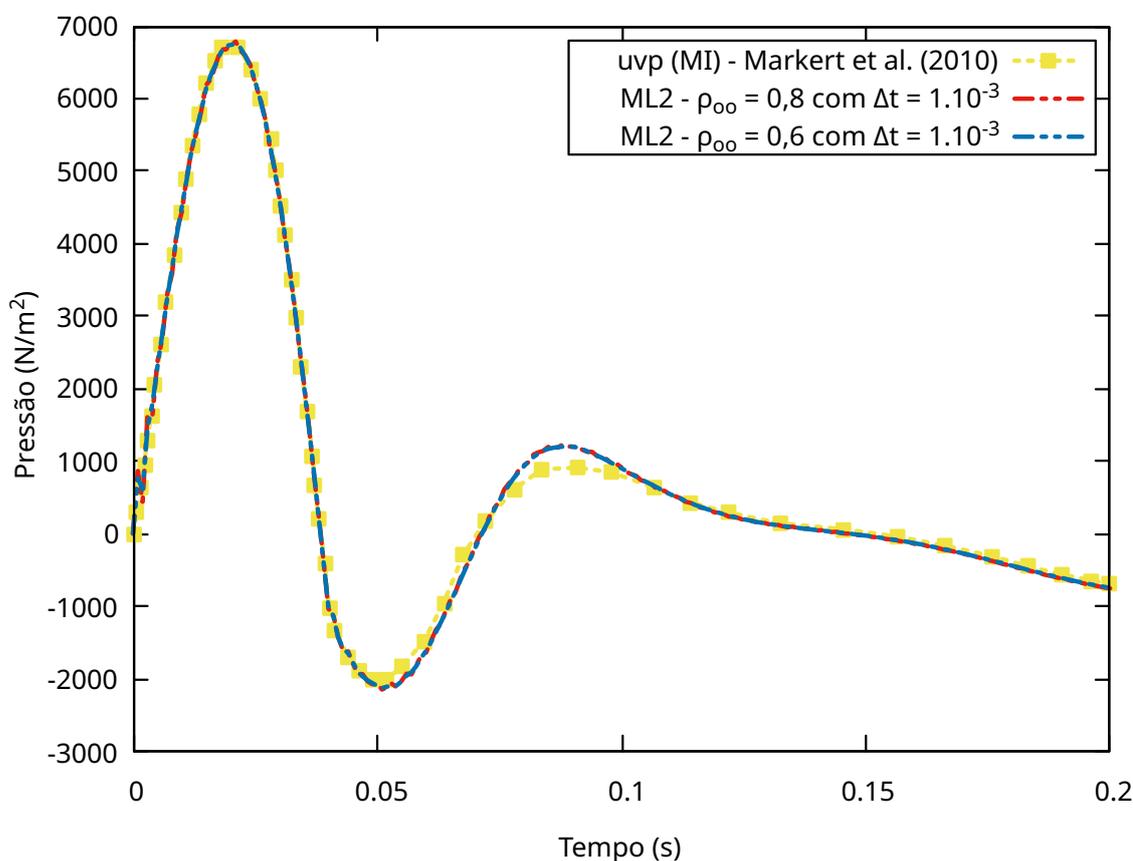
Como é possível notar com a Figura 6.31, para ML2 a variação no raio espectral no mesmo passo de tempo teve pouca dissipação numérica ao se comparar com a solução uvp monolítica implícita (MI) com 3200 elementos e aproximação QL, se aproximando de forma

adequada com essa formulação de Markert, Heider e Ehlers (2010), considerada pela referência a mais eficiente. A abordagem uvp Semi-Explicita-Implícita com 840 elementos QL (SEI1) e 3360 QL (SEI2) foram apresentadas para mostrar a eficiência da presente formulação desse trabalho. Todos os resultados apresentados de Markert, Heider e Ehlers (2010) estão associados ao passo de tempo de $\Delta t = 10^{-3} s$.

Segundo Markert, Heider e Ehlers (2010) a aproximação de igual ordem para as fases não exige nenhuma estabilização para a solução monolítica para o caso de permeabilidade alta. Portanto conclui-se que para a solução particionada também não há necessidade de nenhum tipo de estabilização adicional pela aproximação igual das fases, neste exemplo. No fluido problemas com o uso de aproximações de mesma ordem para o campo de velocidade e pressão foram contornadas com uso o uso da técnica PSPG.

Após a análise dos deslocamentos no ponto A, verifica-se a pressão do fluido no ponto B, sendo esta apresentada na Figura 6.32. Por se tratar de uma malha *Delaunay*, os pontos da malha não seguem um padrão único e portanto, por simplicidade captou-se as pressões interpolados entre os pontos mais próximo das coordenadas do ponto B. A diferença de pressão no ponto analisado foi baixo entre as malhas e, portanto, adotou-se mostrar apenas os resultados com ML2.

Figura 6.32 – Avanço temporal da pressão (p^f) no ponto B.



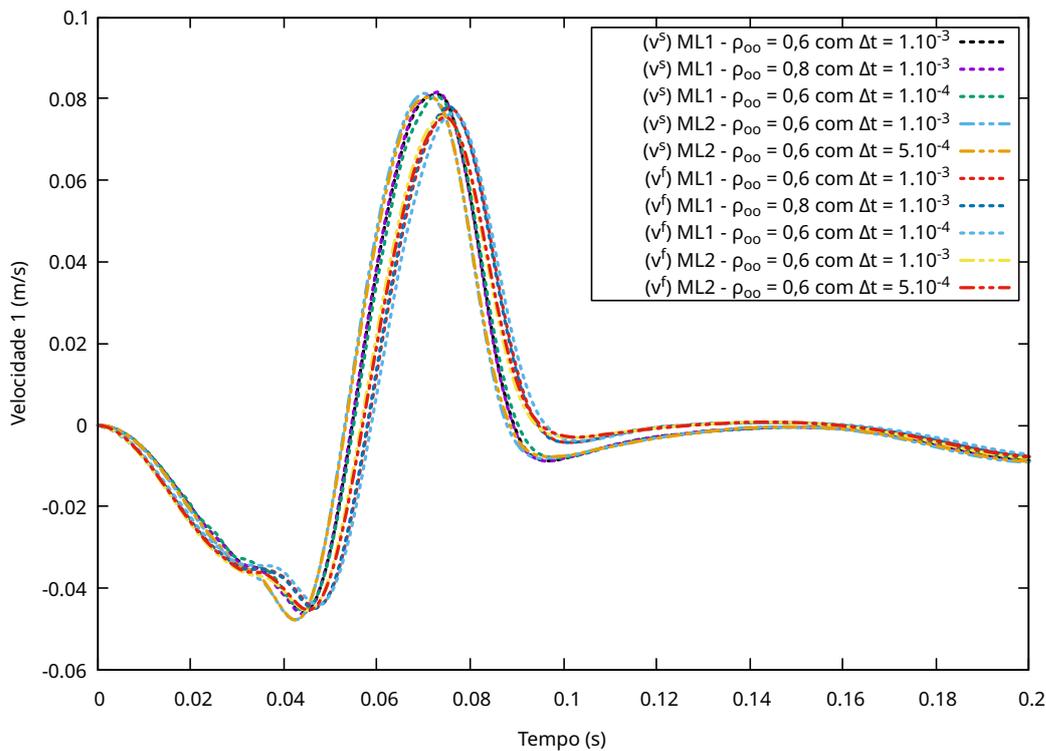
Fonte:Elaborado pelo autor.

As pressões comparadas nas mesmas malhas apresentam boa convergência entre si, para os diferentes raios espectrais. As divergências captadas ocorreram entre as malhas. Foi considerado o termo convectivo e difusivo na formulação da fase fluida, mesmo pela baixa influência pra baixas velocidades e a norma euclidiana do erro desta fase foi fixada com a tolerância de 10^{-6} .

Verifica-se que para ML1 e ML2 com uso de $\rho_{\infty} = 0,8$, devido a altas frequências no início da escala temporal, estes não conseguem dissipa-las de forma completa, diferente do que é possível verificar com uso de um raio espectral menor.

Foi analisado as velocidades nodais no ponto B entre as fases, e resultados comparados nas Figuras 6.33 e 6.34.

Figura 6.33 – Velocidades na direção 1 para as fases no ponto B.

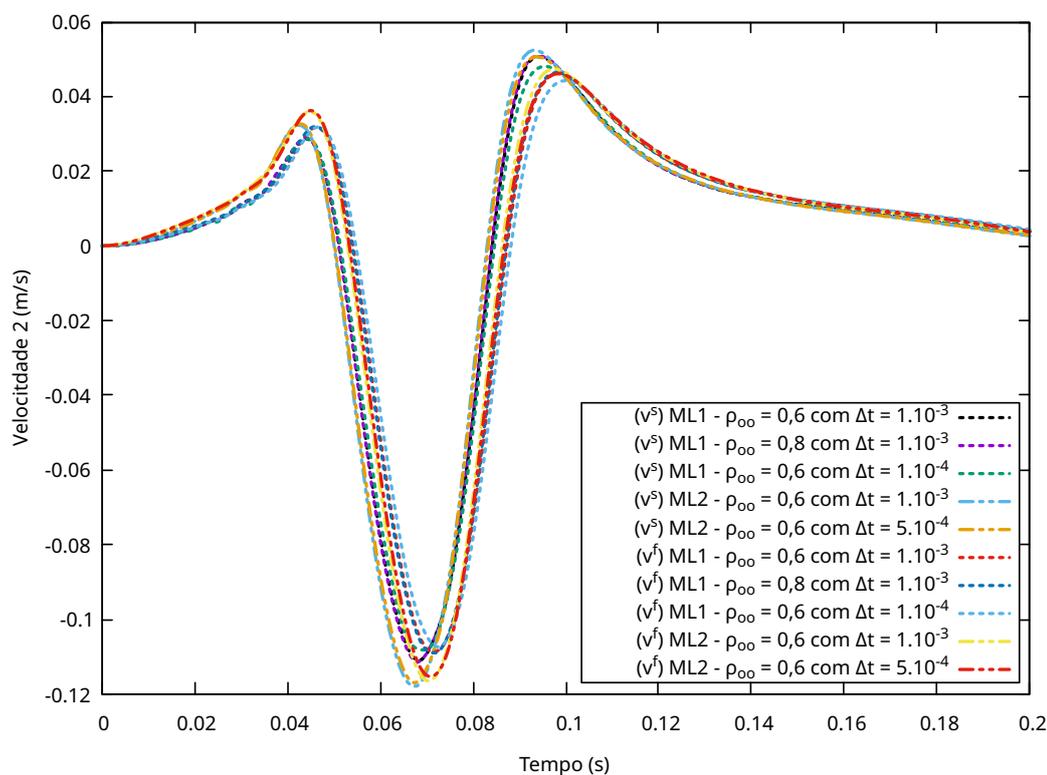


Fonte:Elaborado pelo autor.

Ao analisar as Figuras 6.33 e 6.34, as velocidades das fases tem intensidades próximas com mesmo sentido, o termo \mathbf{F}_{Darcy}^f se torna pequeno, ao se comprar com um caso de velocidades das fases com intensidades próximas mas com sentido diferente.

A solução tomada como referência tem como princípio uma solução monolítica, diferentemente da abordada neste trabalho. Neste contexto, considera-se os resultados obtidos satisfatórios pela representatividade dos campos analisados com a formulação adaptada proposta.

Figura 6.34 – Velocidades na direção 2 para as fases no ponto B.



Fonte:Elaborado pelo autor.

6.9 EXEMPLO PROPOSTO

6.9.1 Filtro bidimensional poroso saturado

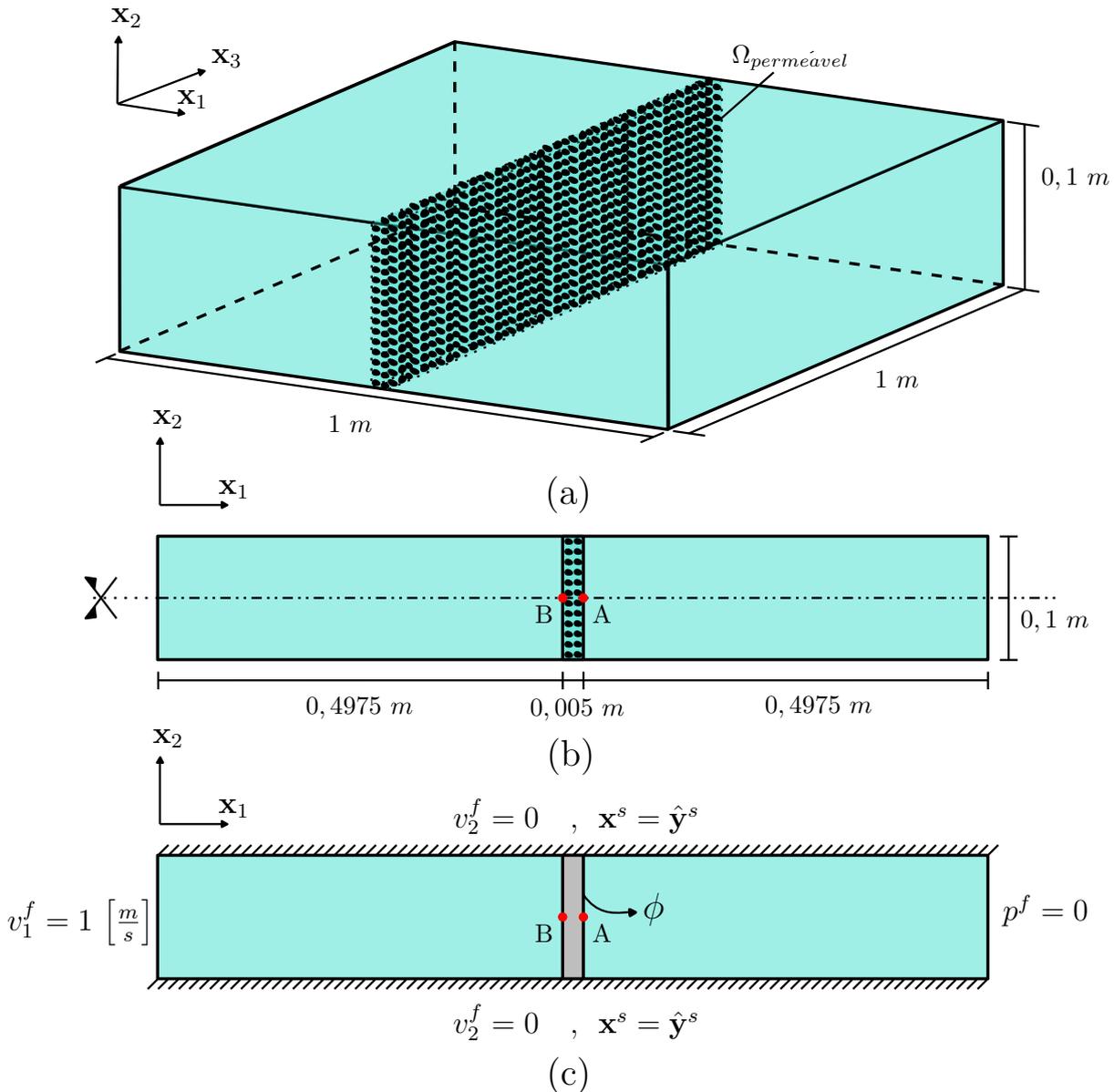
Este exemplo é proposto pelo autor deste trabalho e tem por finalidade a verificação da formulação com o modelo de *Saint Venant–Kirchhoff* da fase sólida, utilizada na formulação adaptada ($y^s v^f p^f$) com partículas das fases consideradas incompressíveis para o modelo poroso saturado.

Trata-se de um canal fechado em torno do eixo x_1 com um filtro polimérico esbelto e saturado em seu interior. A geometria do problema é apresentada na Figura 6.35.

No item a) da Figura 6.35 é ilustrado o modelo completo do problema analisado, no item b) a sua situação em 2D com as propriedades geométricas e em c) o modelo homogeneizado com suas condições de contorno de *Dirichlet* e *Neumann* impostas nas superfícies das fases para construção de um modelo representativo poroso no domínio do filtro e fluido fora da região delimitada.

Como o intuito de resolver o problema das duas fases com a mesma malhas, adotou-se uma técnica de suavização de malha na região fora do filtro para o problema sólido, considerando uma baixa rigidez ($E = 1$ Pa), sem efeito da densidade na região e nós fixos no *looping* iterativo de Newton-Raphson para um passo de tempo n qualquer.

Figura 6.35 – Esquema de canal com filtro com esbelto.



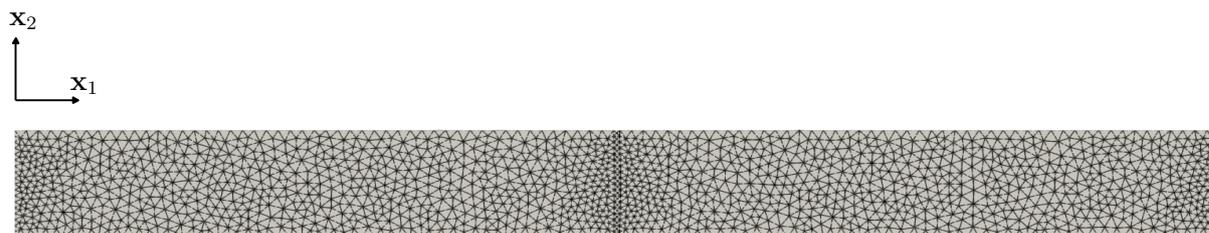
Fonte:Elaborado pelo autor.

Antes das fases avançarem no tempo, resolve-se com a técnica de NR um problema estático da fase sólida, com a imposição de nova posição para os nós do filtro obtidos dentro do *looping* do passo de tempo e os nós da região fora do filtro são liberados (livres), de modo que a malha da região irreal do sólido avance no tempo juntamente ao movimento da malha do filtro real $[0.4975, 0.5025]$ de forma suavizada.

Para a discretização do domínio do problema adotou-se uma malha com triangulação de *Delaunay* com 3042 elementos T6 e 6323 nós para ambas as fases. A malha de elementos finitos é apresentada na Figura 6.36.

É considerado estado plano de deformação (EPD) e os parâmetros materiais do filtro polimérico e do fluido considerado são apresentados na Tabela 5.

Figura 6.36 – Malha Delaunay para canal com filtro polimérico.



Fonte:Elaborado pelo autor.

Tabela 5 – Parâmetros materiais do canal 2D com filtro poroso.

Parâmetros materiais	Valores	Unidades
Módulo de Elasticidade (E)	2,5	[GPa]
Coefficiente de poisson (ν)	0,3	-
Densidade do sólido (ρ^s)	920	[kg/m ³]
Densidade do fluido (ρ^f)	1000	[kg/m ³]
Permeabilidade isotrópica (k^f)	$5 \cdot 10^{-12}$	[m ²]
Viscosidade dinâmica (μ^f)	10^{-3}	[Pa.s]
Porosidade fluida (ϕ^f)	0.1	-

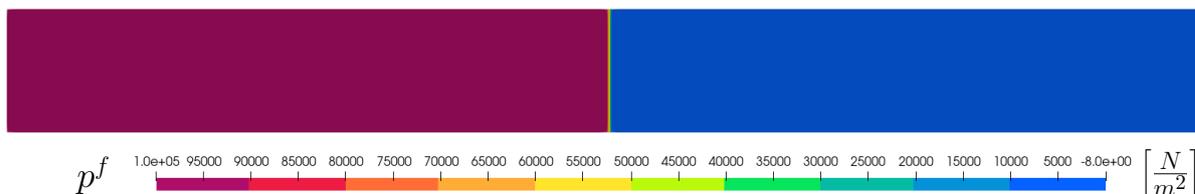
Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizou-se um passo de tempo fixo de $\Delta t = 10^{-4} s$ e raio espectral $\rho_\infty = 0,5$. Foram analisados os resultados nodais dos pontos A e B, denotados na Figura 6.35.

Nesse exemplo as transferências de forças para a fase sólida ocorrem devido ao gradiente de pressão gerado na região do filtro ($\nabla(1 - \phi^f)p^f$), juntamente as forças de Darcy (\mathbf{F}_{Darcy}^f).

Por se tratar de um problema bidirecional particionado que requer mais iterações que a técnica monolítica, foi considerado nos primeiros 30 passos de tempo que o filtro encontra-se fixo no espaço, de modo a obter o perfil estacionário de pressões no domínio do fluido e por consequência um gradiente de pressões mais bem definido inicialmente.

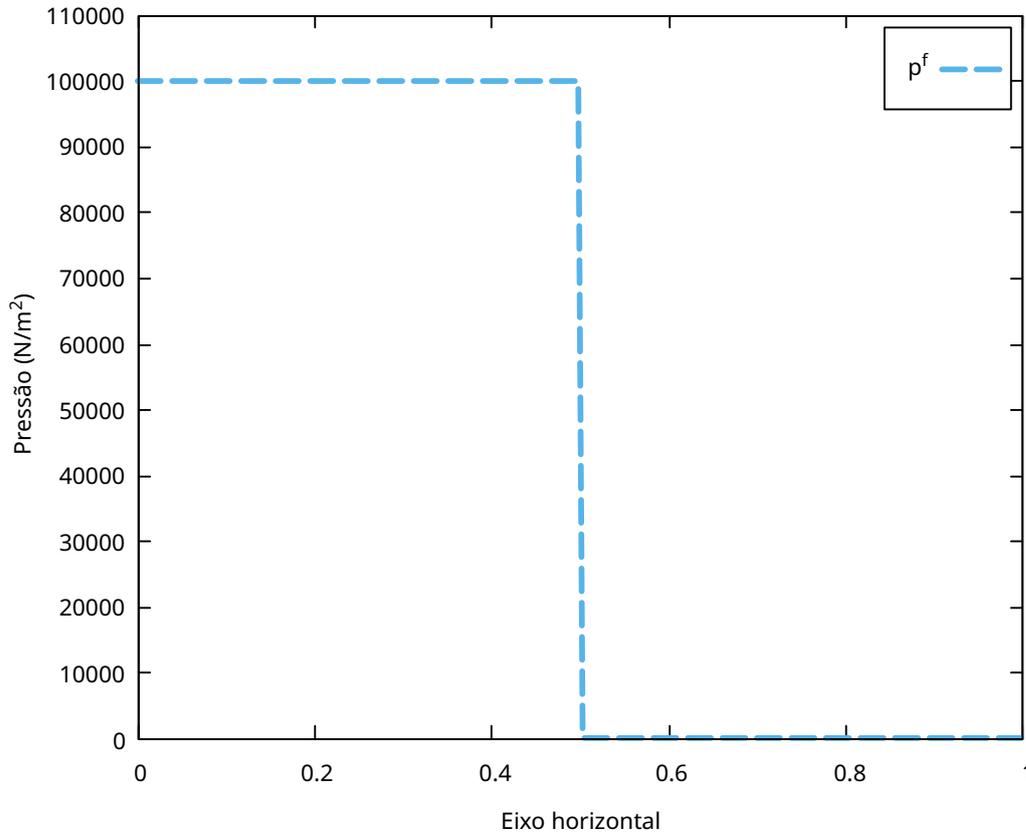
Nesse contexto, é apresentado na Figura 6.37 o campo de pressão (p^f) estacionário no domínio do fluido no instante $t = 0,0025$ segundos.

Figura 6.37 – Campo de pressão (p^f) em regime estacionário ($t = 0,0025$ seg).

Fonte:Elaborado pelo autor.

Seccionando a linha média da seção transversal do canal conforme ilustrado na Figura 6.35. b), é apresentado na Figura 6.39 a pressão do fluido ao longo do canal, assim como o gradiente gerado na região porosa no instante $t = 0,0025$ seg.

Figura 6.38 – Pressão (p^f) em regime estacionário ao longo do canal ($t = 0,0025$ seg).

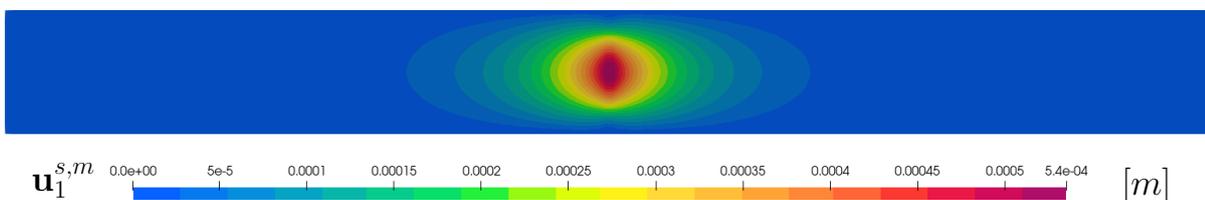


Fonte:Elaborado pelo autor.

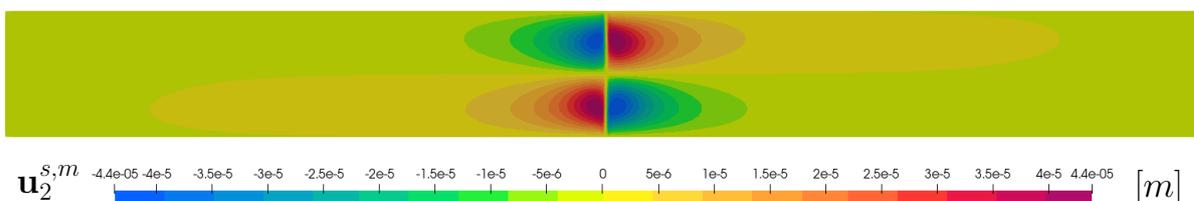
Conforme apresentado na Figura 6.39, na superfície porosa á esquerda ($x_1 = 0.4975$) a pressão é de intensidade 10^5 e a direita é aproximadamente zero. Desta forma um gradiente de pressão é gerado ao longo do domínio poroso, segundo a direção do fluxo, condições geométricas e físicas.

Após os 30 primeiros passos de tempo, a região do filtro é liberada para deslocar-se. Dado as forças aplicadas na região porosa, o filtro movimenta-se até encontrar sua posição de equilíbrio estacionário com deslocamento final uma intensidade de $5,4 \cdot 10^{-4}$ metros. Os campos de deslocamentos horizontais e verticais do filtro juntamente a região do sólido irreal ($\mathbf{u}_1^{s,m}$) são ilustrados nas Figuras 6.39 e 6.40.

Figura 6.39 – Campo de deslocamento horizontal (\mathbf{u}_1^s) do sólido e malha (\mathbf{u}_1^m) Lagrangiana.

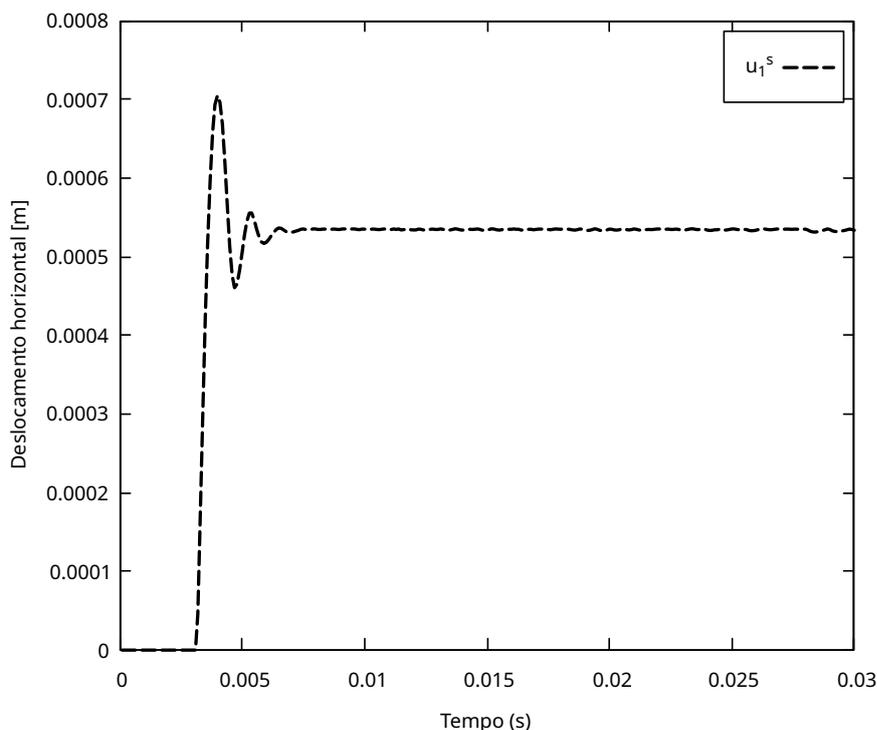


Fonte:Elaborado pelo autor.

Figura 6.40 – Campo de deslocamento vertical (u_2^s) do sólido e malha (u_2^m) Lagrangiana.

Fonte:Elaborado pelo autor.

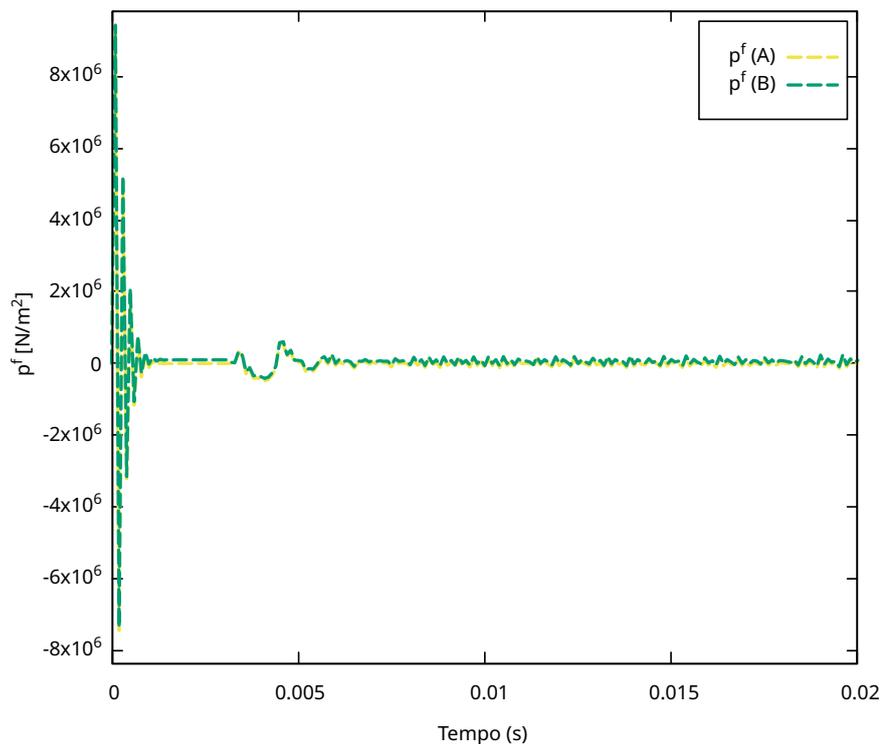
Seguindo a metodologia aplicada nesse exemplo, de filtro inicialmente inerte, os deslocamentos horizontais do filtro no ponto A ao longo são apresentados na Figura 6.41 .

Figura 6.41 – Deslocamento horizontal (u_1^s) do ponto A do filtro.

Fonte:Elaborado pelo autor.

Dada a consideração das forças inerciais das fases, o filtro tem sua amplitude superior ao seu deslocamento estático obtido a posteriori na escala do tempo, recebendo este o efeito de amortecimento devido as forças de Darcy, como pode observar nos resultados apresentados na Figura 6.41.

Ao longo do tempo de análise verificou-se a intensidade das pressões nos pontos A e B, antes e depois do filtro se movimentar. As pressões nodais destes pontos são apresentadas na Figura 6.42.

Figura 6.42 – Avanço temporal da pressão (p^f) nos pontos A e B.

Fonte:Elaborado pelo autor.

De acordo com os resultados de pressão apresentados na Figura 6.42, antes do filtro se movimentar, as pressões do canal oscilam nos primeiros passos de tempo devido as forças inerciais do problema e região porosa considerada no meio do canal, obtendo resultados estacionários no campo de pressão no instante de tempo $t = 0,0025$ seg.

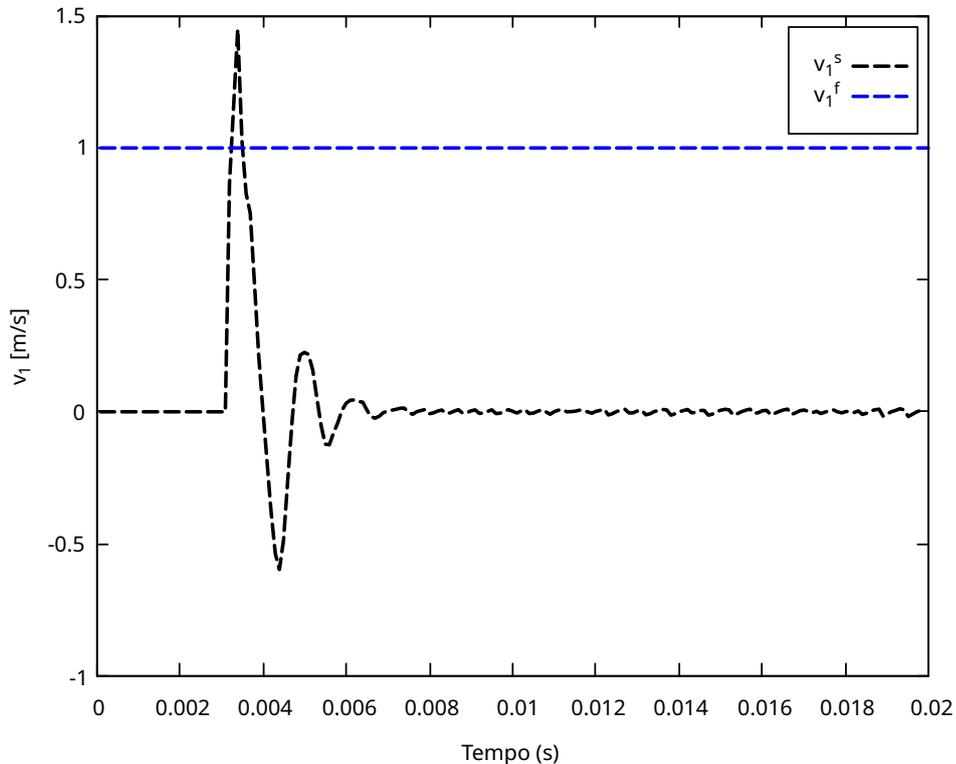
Enquanto o filtro se movimenta observa-se uma oscilação das pressões nas superfícies do domínio poroso. Com o filtro pseudo estacionário, o campo de pressão após o tempo $t = 0,0075$ seg tornam-se instáveis, invertendo os gradientes de pressão ao longo do tempo, sem influenciar na configuração do global do filtro obtida.

De modo a contemplar as forças de Darcy, as velocidades nodais das fases para o ponto A são apresentas na Figura 6.43.

Conforme denotado na Figura 6.43, devido das condições de entrada para o canal, o campo de velocidade horizontal do fluido é a mesma da entrada. No filtro, a velocidade do sólido tem seu comprimento de onda reduzido e amplitude amortecida. Após o instante $t = 0,0075$ seg v_1^s tem seu caráter oscilatório bem definido, se aproximando de zero.

A geometria do filtro foi definida para obter deslocamentos significativos, evidenciando deflexões substanciais, e, portanto caracterizando o chamado efeito de membrada observado em estruturas esbeltas com deslocamentos na ordem de 10% da espessura.

Figura 6.43 – Avanço temporal de $(\mathbf{v}^s = \dot{\mathbf{y}}^{s,m})$ e a \mathbf{v}^f com $\rho_\infty = 0,5$ no ponto A do filtro poroso.



Fonte:Elaborado pelo autor.

6.10 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

Neste capítulo final foram apresentadas a formulação para equações de balanço das fases pela técnica de homogeneização e definição de tensão efetiva de Terzaghi. Uma discussão resumida sobre a técnica particionada utilizada na presente formulação e sobre as características do domínio poroso em micro e macro escala, assim como definições importantes sobre transferências de forças, permeabilidade e condições de contorno. Vale ressaltar que a técnica de estabilização LSIC não foi considerada em nenhum exemplo deste trabalho.

As aplicações numéricas foram destinadas a simulação do comportamento mecânico da matriz porosa e das pressões do fluido pela consideração das fases materialmente incompressíveis, assim como pela simplificação de porosidade constante no domínio para casos de pequenas deformações. A priori um caso 1D com permeabilidade alta serviu como base para validação da formulação apresentada.

Em seguida, um exemplo 2D de propagação de onda em domínio poro elástico dinâmico saturado foi simulado, de modo a demonstrar a eficiência e robustez na ferramenta numérica desenvolvida, representando o comportamento elíptico em deslocamentos do ponto superior do domínio poroso analisado.

Por fim, foi proposto um exemplo bidimensional considerando o escoamento de um

fluido através de um canal com um filtro polimérico em seu interior. Este problema teve por finalidade contemplar um exemplo com filtro poroelástico submetido as forças provenientes da fase fluida de forma única, associação entre equações de *Navier-Stokes* fora da região do filtro (ie, sem parcela de Darcy) e de Darcy (região porosa com baixo número de Reynolds) e apresentar a eficiência da formulação apresentada.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi apresentado uma abordagem computacional associado aos problemas dos meios porosos bifásicos saturados para análise transiente não linear com materiais constituintes materialmente incompressíveis. As equações que regem a mistura solo-fluido porosos consistem nas leis de conservação da quantidade de movimento e de massa de cada fase da mistura e separadamente, desconsiderando quaisquer gradientes de porosidade ou atualização da porosidade no tempo.

Os problemas gerais na mecânica dos sólidos e fluidos são apresentadas em capítulos distintos de forma gradativa de modo a instruir ao leitor a devida associação dos problemas físicos e suas interações na micro e macroescala, sendo o problema sólido desenvolvido pela formulação posicional do Método dos Elementos Finitos em descrição Lagrangiana Total, que considera naturalmente os efeitos da não linearidade geométrica. Já o fluido a partir da formulação variacional utilizando o método de *Petrov-Galerkin* e elementos finitos estabilizados em descrição ALE para as equações de *Navier-Stokes-Brinkman*.

Inicialmente, é apresentado uma formulação baseada em posições para o método dos elementos finitos, sendo construído um algoritmo em regime transiente utilizando os integradores temporais de *Newmark* e α -Generalizado. Exemplos pertinentes da literatura foram utilizados como base para validação do presente algoritmo, no que se obteve boa concordância para todos os testes apresentados.

À posteriori, apresentou-se as equações de *Navier-Stokes-Brinkman* para fluido newtoniano incompressível, assim como as estabilizações utilizadas desenvolvidas com base nas técnicas PSPG, SUPG e LSIC (ver Capítulo 5) e sistematização para integrador temporal α -Generalizado na mecânica dos fluidos.

Em seguida, no Capítulo 6 foi desenvolvido o equacionamento e sistematização da abordagem utilizada para o modelo bifásico saturado, seguindo a mesma notação até o presente momento utilizada. A matriz sólida é descrita pela lei constitutiva de *Saint-Venant-Kirchhoff*, permitindo uma representação de modelos de pequenas e moderadas deformações.

O acoplamento entre as fases é considerado bidirecional e utilizado uma abordagem particionada forte do tipo *Dirichlet-Neumann* de todos os pontos do domínio poroso. A discretização no espaço para os problemas físicos foram utilizados elementos quadráticos (T6), e posteriormente no tempo a discretização foi efetuada por meio do integrador temporal implícito α -Generalizado seguindo sua devida metodologia.

A partir disso, a formulação porosa proposta baseada na Teoria das Misturas e fração volumétrica foi utilizada para simular problemas de propagação de onda 1D e 2D como validação e posteriormente para construção de um modelo completo para um filtro presente em um canal

fechado.

Portanto, a flexibilidade da estratégia apresentada foi verificada através de problemas multi-campo, sendo atestada por meio de diferentes aplicações. O primeiro exemplo trata-se de um problema unidimensional submetido a dois tipos de pulsos, um constante e um co-senoidal, sendo comparados com solução analítica e numérica embasada em referências da literatura.

Para o primeiro exemplo, com pulso constante, o campo de deslocamentos convergiu ao resultado numérico da referência utilizando a formulação u^s-p^f , e no campo de tensões, estas tiveram caráter levemente oscilatório inicial devido às pressões do fluido que são influenciadas pela escolha do raio espectral, em que houve uma devida ilustração da dissipação das pressões e, em contrapartida o crescimento da tensão total na direção vertical do domínio poroso, ou seja, o efeito do adensamento.

Já para o pulso co-senoidal, os deslocamentos da matriz são pouco influenciados pela escolha do raio espectral e convergiram bem com o resultado analítico de [BOER, EHLERS e LIU \(1993\)](#). Já o campo de pressão sofre oscilações para valores altos de raio espectral. A tensão total na base do problema tem caráter crescente, a medida que as pressões são dissipadas, evidenciando uma devida construção do modelo bifásico.

O segundo exemplo refere-se a um problema de propagação de ondas bidimensional, em que duas malhas foram analisadas e diferentes raios espectral e passos de tempo utilizados. O campo de deslocamentos obtiveram resultados aceitáveis ao se comparar com [Markert, Heider e Ehlers \(2010\)](#) com sua versão monolítica $u^s-v^f-p^f$ para com um integrador temporal implícito-explicito (IE) que induz dissipação numérica no modelo, ao ilustrar o movimento elíptico esperado. A pressão nodal analisada foi influenciada diretamente pela malha, passo de tempo e raio espectral, se aproximando do resultado numérico da referência.

Para o exemplo do canal fechado com filtro polimérico, demonstrou-se o efeito de membrana da região porosa, sendo este inserido em uma região de fluido definido a partir das Equações de *Navier-Stokes*, ou seja, possibilitando efeitos significativos dos termos convectivos e difusivos fora da região porosa devido a movimentação do filtro principalmente. Particularmente, este modelo apresentado ilustra de forma satisfatória um problema de Interação Fluido-Estrutura (IFE) na mecânica dos meio porosos em macroescala, sem a necessidade e uso de um modelo de contato para controle de condições de penetrabilidade das fases que seriam necessários em mesoescala.

Em conclusão, a partir dos casos de teste abordados, é comprovado a precisão, robustez e estabilidade do algoritmo particionado apresentado para situações com intermediária e elevada permeabilidade. Além disso, o integrador temporal utilizado introduz dissipação numérica em altas frequências, ou seja, um amortecimento numérico induzido, preservando a convergência de segunda ordem dos problemas físicos devido a dificuldade de se tratar com o fluxo transitório nos poros e presença de forças inerciais.

A estratégia particionada torna a metodologia instável, dependente da porosidade, permeabilidade, discretização espacial e temporal, que por consequência afeta o número de iterações é significativamente.

A principal contribuição deste trabalho atrelados aos problemas de meios porosos e mecânica computacional é uma formulação adaptada baseada em posições para a matriz sólida do domínio poroso, chamada, portanto, de $\mathbf{y}^s \mathbf{v}^f p^f$ e um esquema de solução particionada para o acoplamento completo das variáveis de campo.

Outra contribuição consiste na abordagem particionada dos problemas físicos, facilitando um equacionamento poroso de cada fase e definição explícita de cada lei constitutiva de cada material separadamente, de modo a facilitar a implementação e proporciona uma grande flexibilidade de problemas. Isto é conveniente em especial para aplicações vinculadas a biomecânica, pelas diferentes leis constitutivas não lineares a esta área vinculada. Esta metodologia também permite o acoplamento de volumes não coincidentes entre o problema fluido poroso e a matriz sólida, que foi o caso do exemplo do filtro em um canal fechado.

As etapas e métodos empregados para alcançar os objetivos propostos neste trabalho permitiram também contribuições relevantes ao estado da arte, assim como um devido direcionamento para continuidade para esta linha de pesquisa.

7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A partir dos avanços obtidos ao longo deste trabalho, diversos pontos importantes foram abordados referentes as considerações do modelo proposto. Dada a vasta gama de assuntos pertinentes associados a mecânica dos meios porosos são abordados alguns tópicos de grande interesse dos autores que ainda podem ser explorados e desenvolvidos seguindo a metodologia aqui presente.

1. Malhas não coincidentes e elementos finitos com aproximações distintas entre fases

Como já apresentado anteriormente, a construção do algoritmo utilizado neste trabalho na mecânica dos fluidos segue uma abordagem estabilizada dos elementos finitos, permitindo aproximações de igual ordem das variáveis primárias, contornando problemas associados ao a condição *Ladyschenskaja-Babuska-Brezzi* (LBB) (ver Seção 5.5).

Porém, como encontrado de forma constante na literatura e apresentado por diversos autores como [Markert, Heider e Ehlers \(2010\)](#) e [Menon e Song \(2021\)](#), a combinação de elementos finitos do tipo T6-T3, para a fase sólida e fluida, respectivamente, apresentam melhor ordem de convergência para uma estratégia monolítica.

Portanto, considera-se que uma adequação da presente abordagem particionada para construção da malha de elementos finitos no domínio porosos saturado utilizando tais aproxima-

ções (T6-T3) é de grande valia, dado o grande número de iterações necessárias para alcançar a convergência global. Assim como o número muitas vezes inferior requerente para a discretização da fase sólida em relação ao fluido, reduzindo portanto o tamanho do sistema com o uso de malhas não coincidentes.

2. Porosidade variável no espaço e no tempo

A presente metodologia apresentada desconsiderou quaisquer alterações significativas de porosidade no espaço e no tempo, e portanto, reduzindo diretamente o número de problemas existentes a serem resolvidos com essa abordagem, não utilizando esta de forma generalizada.

Neste contexto, desafio das alterações da porosidade estão atreladas ao comportamento transitório do material a medida que a matriz sólida se deforma pela expulsão do fluido, e por consequência, dissipcao das pressões regido por uma percolação transitória nos poros abertos.

Assim, é possível descrever a variação da porosidade no espaço a partir de sua correlação com a deformação volumétrica do domínio poroso como um todo. Recomenda-se a leitura de [Coussy \(2004\)](#) para o entendimento da construção das equações gerais e os trabalhos de [Vuong, Yoshihara e Wall \(2015\)](#) e [Vuong \(2016\)](#), pois apresentam uma metodologia adequada para consideração da porosidade como variáveis primária ou secundária no problema.

3. Modelos constitutivos

O modelo constitutivo utilizado neste trabalho é o de *Saint-Venant-Kirchhoff* elástico não linear geométrico, sendo adequado para materiais com pequenas e moderadas deformações. No entanto, fica-se restringido a tais problemas, tornando-se ineficiente para casos mais complexos como o de grandes deformações.

Uma tratativa eficiente é a consideração de outros modelos constitutivos presentes na literatura, como os modelos hiperelásticos: Mooney-Rivlin, atrelado ao comportamento de borracha e derivados (ver [Mooney \(1940\)](#) e [Rivlin e Saunders \(1951\)](#)); Neo-Hookeano, caso particular de Mooney-Rivlin e modelo mais simples dentre os hiperelásticos, este foi proposto por [Treloar \(1975\)](#); Ogden, baseado nos invariantes (ver [Ogden \(1972\)](#)), dentre outros modelos.

Estes modelos fenomenológicos, baseados no comportamento obtido por ensaios experimentais, tornam possível a caracterização de materiais em grandes deformações, cada um com sua peculiaridades e aplicabilidade, permitindo que uma grande variação de porosidade no domínio poroso seja contemplada.

4. Formulação para partícula sólida materialmente compressível

A presente formulação foi desenvolvida considerando as duas fases constituintes do modelo bifásicos como materialmente incompressíveis, possibilitando a não consideração de variações significativas de porosidade no tempo e espaço para os exemplos apresentados.

Um desenvolvimento possível é a expansão da metodologia apresentada para consideração da matriz sólida compressível, sendo esta possível com a devida caracterização do

comportamento do material analisado experimentalmente a partir do coeficiente de Biot (α_b).

Do ponto de vista computacional, tal alteração não se considera significativamente complexa, devido a apresentação do termo de incompressibilidade das fases aplicado na matriz ($\alpha_b \nabla p^f$), podendo portanto ser sobrepujado pelo α_b . No entanto, ressalta-se que o coeficiente de Biot em alguns casos pode não ser constante, e dessa indica-se uma leitura aprofundada sobre considerações a serem realizadas para uso de tal coeficiente, por exemplo [Coussy \(2004\)](#).

5. Técnicas de estabilização para baixa permeabilidade

Seja na âmbito da poro elasticidade ou no campo de escoamento em meios porosos, a permeabilidade influência significativamente nos termos presentes das equações de balanço apresentadas.

Portanto, existe uma dificuldade computacional atrelada ao uso deste parâmetro em casos de baixa permeabilidade, pois este torna-se significativamente grande em relação aos demais. O leitor é remetido aos trabalhos [Masud e Hughes \(2002\)](#), [Badia, Quaini e Quarteroni \(2009\)](#) e [Badia e Codina \(2010\)](#) para algumas das técnicas de estabilização para escoamento em meios porosos.

No mais, pontua-se duas técnicas pertinentes possíveis a serem adotadas na metodologia deste trabalho, são elas: Estabilização variacional devido a termo reativo baseado em resíduos, seguindo o mesmo conceito aplicado ao termo PSPG, sendo este adicionado a parcela de fluxo de Darcy; e a estabilização de Biot, sendo um termo que se torna relevante para permeabilidades baixas e efeitos dinâmicos no modelo, sendo introduzido na parcela da mistura.

De acordo com [Vuong \(2016\)](#), para derivada temporal da porosidade na equação da continuidade da fase fluida sendo diferente de zero e permeabilidade baixa, podem ocorrer oscilação espúrias (não físicas) de tensão e pressão, e portanto precisariam de de um termo de estabilização específico incluído no balanço de massa da fase fluida (ver [Badia, Quaini e Quarteroni \(2009\)](#)).

6. Técnica de contato com multiplicadores de Lagrange

Diversos exemplos do cotidiano estão atrelado a mecânica do contato, associados a interação entre superfície de diferentes materiais. Na literatura são apresentadas formulações para caracterização do comportamento dos materiais em tais situações, podendo citar o a técnica dos multiplicadores de Lagrange como a mais dissipada na literatura.

A metodologia da técnica é baseada em introdução de um novo grau de liberdade (λ) ao sistema, considerando a não penetrabilidade entre materiais. Esta nova variável do sistema refere-se a força necessária entre a superfície dos materiais estejam em situação de interação.

Algumas das estratégias para detecção do contato são: nó-a-nó, nó-a-segmento, segmento-a-segmento, para o caso 2D. A abordagem nó-a-segmento é bem apresenta no trabalho de [Carvalho, Coda e Sanches \(2020\)](#).

Portanto, o devido desenvolvimento computacional da técnica de multiplicadores de Lagrange permite a solução de alguns problemas associado a interação entre estruturas e interação fluido-estrutura (IFE), associando a estes a interação entre estruturas porosas saturadas, tendo grande valia a problemas de biomecânica, por exemplo.

Assim, considera-se que esta sugestão, assim como as demais, tem sua devida dificuldade de implementação e imposição de diferentes condições de contorno de forma adequada para as fases que encontram-se desacopladas no sistema particionado, e neste caso, um desafio interessante a ser sobrepujado.

REFERÊNCIAS

- AKKERMAN, I.; BAZILEVS, Y.; BENSON, D.; FARTHING, M.; KEES, C. Free-surface flow and fluid-object interaction modeling with emphasis on ship hydrodynamics. **Journal of Applied Mechanics**, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 79, n. 1, 2012.
- ALMEIDA, E. S.; SPILKER, R. L. Finite element formulations for hyperelastic transversely isotropic biphasic soft tissues. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 151, n. 3-4, p. 513–538, 1998.
- ARDUINO, P.; MACARI, E. J. Numerical study of geomaterials in the light of modern theories of porous media. *In: Poromechanics*. [S.l.: s.n.]: In Thimus et al. (Ed.), 1998. p. 3–10.
- ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 32, n. 1-3, p. 85–155, 1982.
- ARGYRIS, J.; BALMER, H.; DOLTSINIS, J. S.; DUNNE, P.; HAASE, M.; KLEIBER, M.; MALEJANNAKIS, G.; MLEJNEK, H.-P.; MÜLLER, M.; SCHARPF, D. Finite element method—the natural approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 17, p. 1–106, 1979.
- ARGYRIS, J. H. Recent advances in matrix methods of structural analysis(matrix theory of structures for small and large deflections, using high speed digital computers). **New York, Macmilian CO., Oxford, Pergamon Press, Ltd., 1964. 187 p**, 1964.
- AUBRY, D.; MODERESSI, H. A model for the non-linear dynamic analysis of saturated soils. **Revue, Francaise Geotechnique**, v. 46, p. 43–75, 1989.
- AVANCINI, G. **Formulação Unificada para Análise Tridimensional de Interação Fluido-Estrutura com Escoamento de Superfície Livre: Uma Abordagem Lagrangiana Baseada em Posições**. 2023. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023. Tese de Doutorado, Departamento de Estruturas, EESC/USP.
- BABUŠKA, I. The finite element method with lagrangian multipliers. **Numerische Mathematik**, Springer, v. 20, n. 3, p. 179–192, 1973.
- BADIA, S.; CODINA, R. Stabilized continuous and discontinuous galerkin techniques for darcy flow. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, p. 1654–1667, 2010.
- BADIA, S.; QUAINI, A.; QUARTERONI, A. Coupling biot and navier-stokes equations for modelling fluid-poroelastic media interaction. **Journal of Computational Physics**, v. 228, p. 7986–8014, 2009.
- BAKER, G. A. Error estimates for finite element methods for second order hyperbolic equations. **SIAM journal on numerical analysis**, SIAM, v. 13, n. 4, p. 564–576, 1976.
- BALAY, S.; ABHYANKAR, S.; ADAMS, M. F.; BENSON, S.; BROWN, J. **PETSc Web page**. 2022. <https://petsc.org/>. Disponível em: <https://petsc.org/>.

- BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. 2. ed. Watertown: Pearson Education, 2014. 1065 p.
- BATHE, K.-J.; RAMM, E.; WILSON, E. L. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 9, n. 2, p. 353–386, 1975.
- BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. **Computational fluid-structure interaction: methods and applications**. [S.l.: s.n.]: John Wiley & Sons, 2013.
- BERGER, L.; BORDAS, R.; BURROWES, K.; GRAU, V.; TAVENER, S.; KAY, D. A poroelastic model coupled to a fluid network with applications in lung modelling. **International journal for numerical methods in biomedical engineering**, Wiley Online Library, v. 32, n. 1, 2016.
- BERRYMAN, J. G. Effective stress for transport properties of inhomogeneous porous rock. **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**, Wiley Online Library, v. 97, n. B12, p. 17409–17424, 1992.
- BIOT, M. A. Consolidation settlement under a rectangular load distribution. **Journal of Applied Physics**, American Institute of Physics, v. 12, n. 5, p. 426–430, 1941.
- BIOT, M. A. General theory of three-dimensional consolidation. **Journal of applied physics**, American Institute of Physics, v. 12, n. 2, p. 155–164, 1941.
- BIOT, M. A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. **Journal of applied physics**, American Institute of Physics, v. 26, n. 2, p. 182–185, 1955.
- BIOT, M. A. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material. American Society of Mechanical Engineers, 1956.
- BIOT, M. A. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid. **Journal of Applied physics**, American Institute of Physics, v. 27, n. 5, p. 459–467, 1956.
- BIOT, M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range. **The Journal of the Acoustical Society of America**, Acoustical Society of America, v. 28, n. 2, p. 168–178, 1956. ISSN 0001-4966.
- BIOT, M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. ii. higher frequency range. **The Journal of the Acoustical Society of America**, Acoustical Society of America, v. 28, n. 2, p. 179–191, 1956. ISSN 0001-4966.
- BIOT, M. A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. **The Journal of the Acoustical Society of America**, Acoustical Society of America, v. 34, n. 9A, p. 1254–1264, 1962. ISSN 0001-4966.
- BIOT, M. A. Theory of stability and consolidation of a porous medium under initial stress. **Journal of Mathematics and Mechanics**, JSTOR, p. 521–541, 1963.
- BIOT, M. A. A new approach to the mechanics of orthotropic multilayered plates. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 8, n. 4, p. 475–490, 1972.
- BIOT, M. A.; WILLIS, D. G. The elastic coefficients of the theory of consolidation. American Society of Mechanical Engineers, 1957.

BIRD, R. B.; STEWART, W.; LIGHTFOOT, E. **Transport Phenomena.**(4th edn). [S.l.: s.n.]: Wiley and Sons: New York, 2006.

BOER, R. D. Highlights in the historical development of the porous media theory: toward a consistent macroscopic theory. 1996.

BOER, R. D.; EHLERS, W.; LIU, Z. One-dimensional transient wave propagation in fluid-saturated incompressible porous media. **Archive of applied mechanics** (1991), Springer, Berlin, v. 63, n. 1, p. 59–72, 1993. ISSN 0939-1533.

BOER, R. D.; LADE, P. V. **Towards a general plasticity theory for empty and saturated porous solids.** [S.l.: s.n.]: Fachbereich Bauwesen, Universität-Gesamthochschule Essen, 1991.

BOER, R. de. Introduction to the porous media theory. *In: IUTAM Symposium on Theoretical and Numerical Methods in Continuum Mechanics of Porous Materials.* Dordrecht: Springer Netherlands, 2001, (Solid Mechanics and Its Applications, v. 87). p. 3–12. ISBN 9780792367666.

BOER, R. de. Reflections on the development of the theory of porous media. **Applied mechanics reviews**, ASME, v. 56, n. 6, p. R27–R42, 2003. ISSN 0003-6900.

BONET, J.; WOOD, R.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis.** [S.l.: s.n.]: Cambridge university press, 1997.

BORJA, R. I.; ALARCÓN, E. A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation part 1: Balance laws, variational formulation, and linearization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 122, n. 1-2, p. 145–171, 1995.

BORJA, R. I.; CHAO, H.-Y.; MONTÁNS, F. J.; LIN, C.-H. Nonlinear ground response at lotung lsst site. **Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 125, n. 3, p. 187–197, 1999.

BORJA, R. I.; TAMAGNINI, C.; ALARCÓN, E. Elastoplastic consolidation at finite strain part 2: finite element implementation and numerical examples. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 159, n. 1-2, p. 103–122, 1998.

BOWEN, R. M. Theory of mixtures. *In: ERINGEN, A. C. (ed.). Continuum Physics.* New York: Academic Press, 1976. III, p. 1–127.

BOWEN, R. M. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. **International Journal of Engineering Science**, Elsevier, v. 18, n. 9, p. 1129–1148, 1980.

BOWEN, R. M. Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. **International Journal of Engineering Science**, Elsevier, v. 20, n. 6, p. 697–735, 1982.

BREUER, S. Quasi-static and dynamic behavior of saturated porous media with incompressible constituents. **Transport in porous media**, KLUWER ACADEMIC PUBL, DORDRECHT, v. 34, n. 1-3, p. 285–303, 1999. ISSN 0169-3913.

- BREZZI, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. **Publications mathématiques et informatique de Rennes**, n. S4, p. 1–26, 1974.
- BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/ Petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 32, n. 1-3, p. 199–259, 1982.
- BRUMMELEN, H. V. Added mass effects of compressible and incompressible flows in fluid-structure interaction. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 76, 2009.
- BUHAN, P. de; CHATEAU, X.; DORMIEUX, L. The constitutive equations of finite strain poroelasticity in the light of a micro-macro approach. **European journal of mechanics, A, Solids**, Elsevier Masson SAS, PARIS, v. 17, n. 6, p. 909–921, 1998. ISSN 0997-7538.
- CALLARI, C.; ABATI, A. Finite element methods for unsaturated porous solids and their application to dam engineering problems. **Computers structures**, Elsevier Ltd, OXFORD, v. 87, n. 7, p. 485–501, 2009. ISSN 0045-7949.
- CAMPOS, J. C. B.; MESQUITA, E. Teoria da poroelasticidade aplicada ao estudo da estabilidade de poços em um campo de tensões não hidrostático usando o método dos elementos de contorno. In: **Anais X Congresso Latinoamericano de Perforacion**. Quito: [S.l.: s.n.], 1996. v. 1, p. 316–332.
- CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional fem applied to thermomechanical impact of truss structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.
- CARVALHO, P. R. P.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. Positional finite element formulation for two-dimensional analysis of elasto-plastic solids with contact applied to cold forming processes simulation. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer Berlin Heidelberg, Berlin/Heidelberg, v. 42, n. 5, 2020. ISSN 1678-5878.
- CAUSIN, P.; GERBEAU, J.-F.; NOBILE, F. Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid–structure problems. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 194, n. 42-44, p. 4506–4527, 2005.
- CHAPELLE, D.; MOIREAU, P. General coupling of porous flows and hyperelastic formulations—from thermodynamics principles to energy balance and compatible time schemes. **European journal of mechanics, B, Fluids**, Elsevier Masson SAS, PARIS, v. 46, n. 46, p. 82–96, 2014. ISSN 0997-7546.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. [S.l.: s.n.], 2011. 825 p.
- CHENG, A. H.-D. **Poroelasticity**. [S.l.: s.n.]: Springer, 2016. v. 27.
- CHENG, A. H.-D.; LIGGETT, J. A. Boundary integral equation method for linear porous-elasticity with applications to soil consolidation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 20, n. 2, p. 255–278, 1984.

CHENG, A. H. D.; PRENDELEANU, M. Transient boundary element formulation for linear poroelasticity. **International Journal of Applied Mathematical Modelling**, v. 11, p. 285–290, 1987.

CHUNG, J.; HULBERT, G. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method. 1993.

CODA, H. **O Método dos Elementos Finitos Posicional: Sólidos e Estruturas - Não Linearidade Geométrica e Dinâmica**. São Carlos: EESC-USP, p. 284. ISBN 9788580230680, 2018.

CODA, H.; GRECO, M. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 193, n. 33-35, p. 3541–3557, 2004.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF. 168 p.** 2003. Tese (Doutorado) — Tese (Tese para concurso de professor titular) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 193, n. 33-35, p. 3541–3557, 2004.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, Springer, v. 40, n. 1, p. 185–200, 2007.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional fem formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, p. 205–223, 2008.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. **Mathematical problems in engineering**, Hindawi, v. 2009, 2009.

COIMBRA, A. L. **Lições de mecânica do contínuo**. [S.l.: s.n.]: E. Blucher, 1978.

COUSSY, O. **Poromechanics**. [S.l.: s.n.]: John Wiley & Sons, 2004.

COWIN, S. C. Bone poroelasticity. **Journal of biomechanics**, Elsevier, v. 32, n. 3, p. 217–238, 1999.

CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. *In*: **Computational methods in nonlinear structural and solid mechanics**. [S.l.: s.n.]: Elsevier, 1981. p. 55–62.

CRISFIELD, M. A.; REMMERS, J. J.; VERHOOSSEL, C. V. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. [S.l.: s.n.]: Wiley, New York, 1991.

DARCY, H. **Les fontaines publiques de la ville de Dijon**. [S.l.: s.n.]: Victor Dalmont, 1856.

DEBOER, R. Development of porous-media theories - a brief historical review. **Transport in porous media**, KLUWER ACADEMIC PUBL, DORDRECHT, v. 9, n. 1-2, p. 155–164, 1992. ISSN 0169-3913.

- DIEBELS, S.; EHLERS, W. Dynamic analysis of a fully saturated porous medium accounting for geometrical and material non-linearities. **International Journal for numerical methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 39, n. 1, p. 81–97, 1996.
- DIEBELS, S.; EHLERS, W.; MARKERT, B. Neglect of the fluid extra stresses in volumetrically coupled solid-fluid problems. **ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, Wiley Online Library, v. 81, n. S3, p. 521–522, 2001.
- DOKAINISH, M.; SUBBARAJ, K. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—i. explicit methods. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 32, n. 6, p. 1371–1386, 1989.
- DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J.-P. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 33, n. 1-3, p. 689–723, 1982.
- DONEA, J.; HUERTA, A. **Finite element methods for flow problems**. [S.l.: s.n.]: John Wiley & Sons, 2003.
- FERNANDES, J. W. D. **Interação fluido-estrutura com escoamentos incompressíveis utilizando o método dos elementos finitos**. 2016. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2016.
- FERNANDES, J. W. D. **Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura**. 2020. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2020.
- FERRO, M. A. C. **Poroelasticidade Dinâmica Acoplada Usando o Método dos Elementos de Contorno**. 2002. 195 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002. Tese de Doutorado.
- FILLUNGER, P. **Erdbaumechnik?** [S.l.: s.n.]: Selbstverl. d. Verf. Wien, Austria, 1936.
- GALEÃO, A. C.; CARMO, E. G. D. D. A consistent approximate upwind petrov-galerkin method for convection-dominated problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 68, n. 1, p. 83–95, 1988.
- GAMNITZER, P.; HOFSTETTER, G. A cap model for soils featuring a smooth transition from partially to fully saturated state. **PAMM**, Wiley Online Library, v. 13, n. 1, p. 169–170, 2013.
- GAWIN, D.; BAGGIO, P.; SCHREFLER, B. A. Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media. **International Journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 20, n. 8-9, p. 969–987, 1995.
- GEUZAIN, C.; REMACLE, J.-F. **Gmsh**. 2020. Disponível em: <http://gmsh.info/>.
- GHABOUSSI, J.; WILSON, E. L. Variational formulation of dynamics of fluid-saturated porous elastic solids. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, American Society of Civil Engineers, v. 98, n. 4, p. 947–963, 1972.
- GODA, B. A. **Dynamic Large Deformation nite Element Analysis of Soft Biological Tissues Modeled as Multiphase Mixtures**. 2019. Tese (Doutorado) — University of Colorado at Boulder, 2019.

GRECO, M.; CODA, H. B. Positional fem formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and vibration**, Elsevier, v. 290, n. 3-5, p. 1141–1174, 2006.

GRECO, M.; CODA, H. B.; VENTURINI, W. S. An alternative contact/impact identification algorithm for 2d structural problems. **Computational Mechanics**, Springer, v. 34, n. 5, p. 410–422, 2004.

GREEN, A.; NAGHDI, P. A note on mixtures. **International journal of engineering science**, Elsevier Ltd, v. 6, n. 11, p. 631–635, 1968. ISSN 0020-7225.

GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. On basic equations for mixtures. **The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, Oxford University Press, v. 22, n. 4, p. 427–438, 1969.

HEIL, M.; HAZEL, A. L.; BOYLE, J. Solvers for large-displacement fluid–structure interaction problems: segregated versus monolithic approaches. **Computational Mechanics**, Springer, v. 43, p. 91–101, 2008.

HENDERSON, A. Para view guide: A parallel visualization application. **Kitware, Inc., Clifton Park, NY**, 2007.

HILBER, H. M.; HUGHES, T. J.; TAYLOR, R. L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, Wiley Online Library, v. 5, n. 3, p. 283–292, 1977.

HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering science**. Chichester, England: John Wiley Sons Ltd, p. 455, 2004.

HSU, M.-C.; BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; TEZDUYAR, T. E.; HUGHES, T. Improving stability of stabilized and multiscale formulations in flow simulations at small time steps. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 199, n. 13-16, p. 828–840, 2010.

HUGHES, T. J. Multiscale phenomena: Green’s functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 127, n. 1-4, p. 387–401, 1995.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; BALESTRA, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. circumventing the babuška-brezzi condition: A stable petrov-galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 59, n. 1, p. 85–99, 1986.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Viii. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 73, n. 2, p. 173–189, 1989.

HUGHES, T. J.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part i. three-dimensional shells. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981.

JAKOBSEN, M.; JOHANSEN, T. A.; MCCANN, C. The acoustic signature of fluid flow in complex porous media. **Journal of applied Geophysics**, Elsevier, v. 54, n. 3-4, p. 219–246, 2003.

- JANSEN, K. E.; WHITING, C. H.; HULBERT, G. M. A generalized- method for integrating the filtered navier–stokes equations with a stabilized finite element method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier B.V, LAUSANNE, v. 190, n. 3, p. 305–319, 2000. ISSN 0045-7825.
- JOURDE, H.; FENART, P.; VINCHES, M.; PISTRE, S.; VAYSSADE, B. Relationship between the geometrical and structural properties of layered fractured rocks and their effective permeability tensor. a simulation study. **Journal of hydrology (Amsterdam)**, Elsevier B.V, AMSTERDAM, v. 337, n. 1, p. 117–132, 2007. ISSN 0022-1694.
- JR., D. S. **Análise Dinâmica de Sistemas Não Lineares com Acoplamento do Tipo Solo-Fluido-Estrutura por Intermédio do Método dos Elementos Finitos e do Método dos Elementos de Contorno**. 2004. 235 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004. Tese de Doutorado.
- KANATANI, M.; NISHI, K.; KAWAKAMI, M.; OHMACHI, M. Two-dimensional nonlinear response analysis during earthquake based on the effective stress method. *In: Proceedings of the 6th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*. [S.l.: s.n.], 1988. p. 1749–1754.
- KELLY, P. A reacting continuum. **International journal of engineering science**, Elsevier Ltd, v. 2, n. 2, p. 129–153, 1964. ISSN 0020-7225.
- KEMPA, W. On the description of the consolidation phenomenon by means of a two-component continuum. **Archives of Mechanics**, v. 49, n. 5, p. 893–917, 1997.
- KRENK, S. An orthogonal residual procedure for non-linear finite element equations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 38, n. 5, p. 823–839, 1995.
- KZAM, A. K. L. **Análise da instabilidade estrutural global e local pelo MEF posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio**. 2016. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016.
- LACERDA, E. G. M. **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional**. 2014. 107 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014.
- LANCZOS, C. *The variational principles of mechanics*. 4. ed. New York: Dover, 1986.
- LAURENT, J.; BOUTECA, M. J.; SARDA, J.-P.; BARY, D. Pore-pressure influence in the poroelastic behavior of rocks: Experimental studies and results. **SPE Formation Evaluation**, SPE, v. 8, n. 02, p. 117–122, 1993.
- LEWIS, R.; SCHREFLER, B. **The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media**. [S.l.: s.n.]: John Wiley, New York, 1998.
- LI, C.; BORJA, R. I. **A Finite Element Model of Poro-elasticity Suitable for Large Deformation Dynamic Analysis**. Stanford University, California, USA, 2005.
- LI, C.; BORJA, R. I.; REGUEIRO, R. A. Dynamics of porous media at finite strain. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, p. 3837–3870, 2004.

- LI, C.; BORJA, R. I.; REGUEIRO, R. A. Dynamics of porous media at finite strain. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier B.V, LAUSANNE, v. 193, n. 36, p. 3837–3870, 2004. ISSN 0045-7825.
- LI, X.; WANG, Z.; SHEN, C. Sumdes: A nonlinear procedure for response analysis of horizontally-layered sites subjected to multi-directional earthquake loading. **Department of Civil Engineering, University of California, Davis**, p. 86, 1992.
- MARKERT, B.; HEIDER, Y.; EHLERS, W. Comparison of monolithic and splitting solution schemes for dynamic porous media problems. **International journal for numerical methods in engineering**, John Wiley Sons, Ltd, Chichester, UK, v. 82, n. 11, p. 1341–1383, 2010. ISSN 0029-5981.
- MARQUES, L. C.; APPOLONI, C. R.; FERNANDES, C. P. Porosity study of synthetic sandstones by non-destructive nuclear techniques. **Materials research (São Carlos, São Paulo, Brazil)**, Univ Fed Sao Carlos, Dept Engenhariaia Materials, SAO CARLOS, v. 14, n. 3, p. 394–402, 2011. ISSN 1516-1439.
- MASSON, Y. J.; PRIDE, S. R. On the correlation between material structure and seismic attenuation anisotropy in porous media. **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**, Wiley Online Library, v. 119, n. 4, p. 2848–2870, 2014.
- MASUD, A.; HUGHES, T. J. A space-time galerkin/least-squares finite element formulation of the navier-stokes equations for moving domain problems. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 146, n. 1-2, p. 91–126, 1997.
- MASUD, A.; HUGHES, T. J. R. A stabilized mixed finite element method for darcy flow. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, p. 4341–4370, 2002.
- MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 17, n. 1, p. 145–153, 1981.
- MATUSZYK, P. J.; DEMKOWICZ, L. F. Solution of coupled poroelastic/acoustic/elastic wave propagation problems using automatic hp-adaptivity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 281, p. 54–80, 2014.
- MAYR, M.; KLOPPPEL, T.; WALL, W. A.; GEE, M. W. A temporal consistent monolithic approach to fluid-structure interaction enabling single field predictors. **SIAM Journal on Scientific Computing**, SIAM, v. 37, n. 1, p. B30–B59, 2015.
- MCNAMARA, J. F. Solution schemes for problems of nonlinear structural dynamics. **Journal of Pressure Vessel Technology**, v. 96, n. 2, p. 96–102, 05 1974. ISSN 0094-9930.
- MCNAMEE, J.; GIBSON, R. Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi-infinite clay stratum. **The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, Oxford University Press, v. 13, n. 2, p. 210–227, 1960.
- MENON, S.; SONG, X. A stabilized computational nonlocal poromechanics model for dynamic analysis of saturated porous media. **International journal for numerical methods in engineering**, John Wiley Sons, Inc, Hoboken, USA, v. 122, n. 20, p. 5512–5539, 2021. ISSN 0029-5981.

- MERODO, J. F.; PASTOR, M.; MIRA, P.; TONNI, L.; HERREROS, M. I.; GONZALEZ, E.; TAMAGNINI, R. Modelling of diffuse failure mechanisms of catastrophic landslides. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 193, n. 27-29, p. 2911–2939, 2004.
- MINKOFF, S. E.; STONE, C. M.; BRYANT, S.; PESZYNSKA, M.; WHEELER, M. F. Coupled fluid flow and geomechanical deformation modeling. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, Elsevier, v. 38, n. 1-2, p. 37–56, 2003.
- MONDKAR, D.; POWELL, G. Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 11, n. 3, p. 499–520, 1977.
- MOONEY, M. A theory of large elastic deformation. **Journal of Applied Physics**, v. 11, n. 9, p. 582–592, 1940.
- MORÁN, R.; TOLEDO, M. Á. Research into protection of rockfill dams from overtopping using rockfill downstream toes. **Canadian journal of civil engineering**, NRC Research Press, v. 38, n. 12, p. 1314–1326, 2011.
- MOREIRA, D. H. F. R. **Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura com contato estrutural**. 2021. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2021.
- MURAD, M. A.; LOULA, A. F. On stability and convergence of finite element approximations of biot's consolidation problem. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 37, n. 4, p. 645–667, 1994.
- NERMOEN, A.; KORSNES, R.; CHRISTENSEN, H. F.; TRADS, N.; HIORTH, A.; MADLAND, M. V. Measuring the biot stress coefficient and its implications on the effective stress estimate. *In*: ARMA. **ARMA US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium**. [S.l.: s.n.], 2013. p. ARMA–2013.
- NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the engineering mechanics division**, American Society of Civil Engineers, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959.
- NIELD, D. A.; BEJAN, A. **Convection in porous media**. [S.l.: s.n.]: Springer-Verlag, New York, NY, 1998.
- NILLAMA, L. B. A.; YANG, J.; YANG, L. An explicit stabilised finite element method for navier-stokes-brinkman equations. **Journal of computational physics**, Elsevier Inc, Cambridge, v. 457, p. 111033, 2022. ISSN 0021-9991.
- OGDEN, R. W. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 326, n. 1567, p. 565–584, 1972.
- OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformations**. [S.l.: s.n.]: Courier Corporation, 1997.
- OKA, F.; YASHIMA, A.; SHIBATA, T.; KATO, M.; UZUOKA, R. Fem-fdm coupled liquefaction analysis of a porous soil using an elasto-plastic model. **Applied Scientific Research**, Springer, v. 52, p. 209–245, 1994.

OYEKOLE, O. **Development and Numerical Analysis of Partitioned Algorithms for Fluid-Elastic/Poroelastic Structure Interaction Problems**. [S.l.: s.n.]: University of Notre Dame, 2020.

PREVOST, J. H. Nonlinear transient phenomena in saturated porous media. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier B.V, v. 30, n. 1, p. 3–18, 1982. ISSN 0045-7825.

PREVOST, J. H. **DYNA1D: a computer program for nonlinear seismic site response analysis technical documentation**. [S.l.: s.n.]: National Center for Earthquake Engineering Research Buffalo, N. Y, 1989.

REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. [S.l.: s.n.]: New York: McGraw-Hil, 2006. v. 3.

RIGOBELLO, R.; CODA, H. B.; NETO, J. M. A 3d solid-like frame finite element applied to steel structures under high temperatures. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 91, p. 68–83, 2014.

RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International journal of solids and structures**, Elsevier, v. 15, n. 7, p. 529–551, 1979.

RIVLIN, R. S.; SAUNDERS, D. W. Large elastic deformations of isotropic materials vii. experiments on the deformation of rubber. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 243, n. 865, p. 251–288, 1951.

ROSA, R. J. R. **Técnica de partição de domínio para análise numérica de sólidos bidimensionais fraturados combinando análise isogeométrica e elementos finitos**. 2021. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2021.

ROUX, F.-X.; GARAUD, J.-D. Domain decomposition methodology with robin interface matching conditions for solving strongly coupled fluid-structure problems. **International Journal for Multiscale Computational Engineering**, Begel House Inc., v. 7, n. 1, 2009.

ROUX, F.-X.; GARAUD, J.-D. Domain decomposition methodology with robin interface matching conditions for solving strongly coupled fluid-structure problems. **International journal for multiscale computational engineering**, Begell House Inc, REDDING, v. 7, n. 1, p. 29–38, 2009. ISSN 1940-4352.

SAMPAIO, R.; WILLIAMS, W. Thermodynamics of diffusing mixtures. **Journal de mécanique**, v. 18, n. 1, p. 19–45, 1979.

SANCHES, R. A.; CODA, H. B. An embedded domain technique based on level-sets for finite element method (fem) fluid-shell coupling. **Mecânica Computacional**, v. 29, n. 48, p. 4801–4818, 2010.

SANCHES, R. A.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to fluid structure interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 259, p. 177–196, 2013.

SANCHES, R. A. K. **Métodos numpara interação fluido-estrutura**. 2022. Tese (Doutorado) — Texto - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Flexible multibody dynamics finite element formulation applied to structural progressive collapse analysis. **Latin American Journal of Solids and Structures**, Latin American Journal of Solids and Structures, v. 14, n. 1, p. 52–71, 2017. ISSN 1679-7825.
- SCHIFFMAN, R. L.; FUNGAROLI, A. Consolidation due to tangential loads. *In: Soil Mech & Fdn Eng Conf Proc/Canada/*. [S.l.: s.n.], 1965.
- SCHREYER-BENNETHUM, L. Theory of flow and deformation of swelling porous materials at the macroscale. **Computers and geotechnics**, Elsevier Ltd, OXFORD, v. 34, n. 4, p. 267–278, 2007. ISSN 0266-352X.
- SELVADURAI, A. The biot coefficient for a low permeability heterogeneous limestone. **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, Springer, v. 31, p. 939–953, 2019.
- SETTARI, A.; WALTERS, D.; BEHIE, G. Use of coupled reservoir and geomechanical modelling for integrated reservoir analysis and management. **Journal of Canadian Petroleum Technology**, OnePetro, v. 40, n. 12, 2001.
- SHANKER, N. B.; SARMA, K.; RATNAM, M. Consolidation due to shear loads distributed over a rectangular area. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, Wiley Online Library, v. 2, n. 4, p. 329–342, 1978.
- SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i: Formulation and optimal parametrization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 72, n. 3, p. 267–304, 1989.
- STRANG, G.; FIX, G. J. **An analysis of the Finite Element Method. 2. ed.** [S.l.: s.n.]: Wesley-Cambridge Press, 2008.
- SUAREZ, S. A. P. **Análise Numérica de Barras Gerais 3D sob Efeitos Mecânicos de Explosões e Ondas de Choque**. 2016. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016. Dissertação de Mestrado, Departamento de Estruturas, EESC/USP.
- TERZAGHI, K. von. Die berechnung der durchlässigkeit des tones aus dem verlauf der hydromechanischen spannungserscheinungen. **Sitzungsber. Akad. Wiss.(Wien). Math.-Naturwiss. Kl., Abt. Iia**, v. 132, p. 125–138, 1923.
- TEZDUYAR, T. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. Elsevier Science Technology, v. 28, p. 1–44, 1992.
- TEZDUYAR, T.; SATHE, S. Stabilization parameters in supg and pspg formulations. **Journal of Computational and Applied Mechanics**, p. v. 4, n. 1, 71–88, 2003.
- TEZDUYAR, T. E. Computation of moving boundaries and interfaces and stabilization parameters. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Wiley Online Library, v. 43, n. 5, p. 555–575, 2003.
- TEZDUYAR, T. E. Computation of moving boundaries and interfaces and stabilization parameters. **International journal for numerical methods in fluids**, John Wiley Sons, Ltd, Chichester, UK, v. 43, n. 5, p. 555–575, 2003. ISSN 0271-2091.

- TEZDUYAR, T. E. Interface-tracking and interface-capturing techniques for finite element computation of moving boundaries and interfaces. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 195, n. 23-24, p. 2983–3000, 2006.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces—the deforming-spatial-domain/space-time procedure: Ii. computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 94, n. 3, p. 353–371, 1992.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces—the deforming-spatial-domain/space-time procedure: Ii. computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 94, n. 3, p. 353–371, 1992.
- TEZDUYAR, T. E.; OSAWA, Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 190, n. 3-4, p. 411–430, 2000.
- TRELOAR, L. R. G. **The Physics of Rubber Elasticity**. 3rd. ed. Oxford: Clarendon Press, 1975.
- TRUESDELL, C. Hypo-elasticity. **Journal of Rational Mechanics and Analysis**, JSTOR, v. 4, p. 83–1020, 1955.
- TRUESDELL, C. Sulle basi della termomeccanica. **Rend. Lincei**, v. 22, n. 8, p. 33–38, 1957.
- TURNER, M.; DILL, E.; MARTIN, H.; MELOSH, R. Large deflections of structures subjected to heating and external loads. **Journal of the Aerospace Sciences**, v. 27, n. 2, p. 97–106, 1960.
- VERRUIJT, A. **Computational geomechanics**. [S.l.: s.n.]: Springer Science & Business Media, 1995. v. 7.
- VERRUIJT, A. Theory and problems of poroelasticity. **Delft University of Technology**, v. 71, 2013.
- VIEIRA, L. C. L. M. **Estudo de algoritmos de integração elemento por elemento para análise dinâmica não linear de estruturas**. 2004. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Alagoas, 2004.
- VUONG, A.-T. **A Computational Approach to Coupled Poroelastic Media Problems**. 2016. Tese (Doutorado) — Technische Universität München, 2016.
- VUONG, A.-T.; YOSHIHARA, L.; WALL, W. A general approach for modeling interacting flow through porous media under finite deformations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier B.V, LAUSANNE, v. 283, p. 1240–1259, 2015. ISSN 0045-7825.
- WHITAKER, S. Flow in porous media i: A theoretical derivation of darcy’s law. **Transport in porous media**, Springer, v. 1, p. 3–25, 1986.
- WHITAKER, S. Flow in porous media ii: The governing equations for immiscible, two-phase flow. **Transport in porous media**, Springer, v. 1, p. 105–125, 1986.

- WHITAKER, S. Flow in porous media ii: The governing equations for immiscible, two-phase flow. **Transport in porous media**, Springer, v. 1, p. 105–125, 1986.
- WHITAKER, S. Flow in porous media iii: deformable media. **Transport in Porous Media**, Springer, v. 1, p. 127–154, 1986.
- WHITAKER, S. The forchheimer equation: a theoretical development. **Transport in Porous media**, Springer, v. 25, n. 1, p. 27–61, 1996.
- WILLIAMS, T.; KELLEY, C. **Gnuplot 4.6: an interactive plotting program**. 2013. <http://gnuplot.sourceforge.net/>.
- WILMAŃSKI, K. Porous media at finite strains. the new model with the balance equation for porosity. **Archives of Mechanics**, v. 48, n. 4, p. 591–628, 1996.
- WOLTMANN, R. **Beyträge zur Hydraulischen Architectur**. [S.l.: s.n.]: Johann Christian Dieterich, 1794. v. 3.
- WONG, M.; TIN-LOI, F. Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures. **Computers & structures**, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 633–640, 1990.
- WOOD, W.; BOSSAK, M.; ZIENKIEWICZ, O. An alpha modification of newmark's method. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 15, n. 10, p. 1562–1566, 1980.
- WUTZOW, W. W. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Materiais Porosos Reforçados**. 2008. 334 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Estruturas, EESC/USP, São Carlos, 2008. Tese de Doutorado.
- WUTZOW, W. W.; BOTTA, A. S.; VENTURINI, W. S.; BENALLAL, A. Bem poroplastic analysis applied to reinforced solids. In: **VII BETEQ (Boundary Element Techniques International Conference)**. Paris: [S.l.: s.n.], 2006.
- WUTZOW, W. W.; VENTURINI, W. S.; BENALLAL, A.; BOTTA, A. S. Análise de sólidos poro-elásticos enrijecidos utilizando o método dos elementos de contorno. In: **XXVI CILAMCE (Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering)**. Guarapari-BR: [S.l.: s.n.], 2005.
- YALE, D. Coupled geomechanics-fluid flow modeling: effects of plasticity and permeability alteration. In: ONEPETRO. **SPE/ISRM rock mechanics conference**. [S.l.: s.n.], 2002.
- ZIENKIEWICZ, O.; CHAN, A. Coupled problems and their numerical solution. **Advances in computational nonlinear mechanics**, Springer, p. 139–176, 1989.
- ZIENKIEWICZ, O.; CHANG, C.; BETTESS, P. Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils. **Geotechnique**, Thomas Telford Ltd, v. 30, n. 4, p. 385–395, 1980.
- ZIENKIEWICZ, O.; SHIOMI, T. Dynamic behaviour of saturated porous media; the generalized biot formulation and its numerical solution. **International journal for numerical and analytical methods in geomechanics**, Wiley Online Library, v. 8, n. 1, p. 71–96, 1984.
- ZIENKIEWICZ, O. C. Basic formulation of static and dynamic behaviour of soil and other porous media. In: SPRINGER. **Numerical Methods in Geomechanics**. [S.l.: s.n.], 1982. p. 39–57.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CHAN, A. H. C.; PASTOR, M.; SCHREFLER, B. A.; SHIOMI, T. **Computational Geomechanics with Special Reference to Earthquake Engineering**. Chichester: Wiley, 1999.

ZIENKIEWICZ, O. C.; MORICE, P. **The finite element method in engineering science**. [S.l.: s.n.]: McGraw-hill London, 1971. v. 1977.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method for solid and structural mechanics**. [S.l.: s.n.]: Elsevier, 2005.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. **The Finite Element Method: The Basis**. 6. ed. [S.l.: s.n.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005. v. 1. 689 p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; TAYLOR, R. L. **The finite element method: solid mechanics**. [S.l.: s.n.]: Butterworth-heinemann, 2000. v. 2.