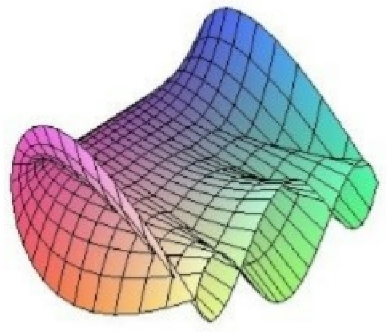


Cálculo Diferencial e Integral: um kit de sobrevivência

"Sistema de Coordenadas Elípticas"

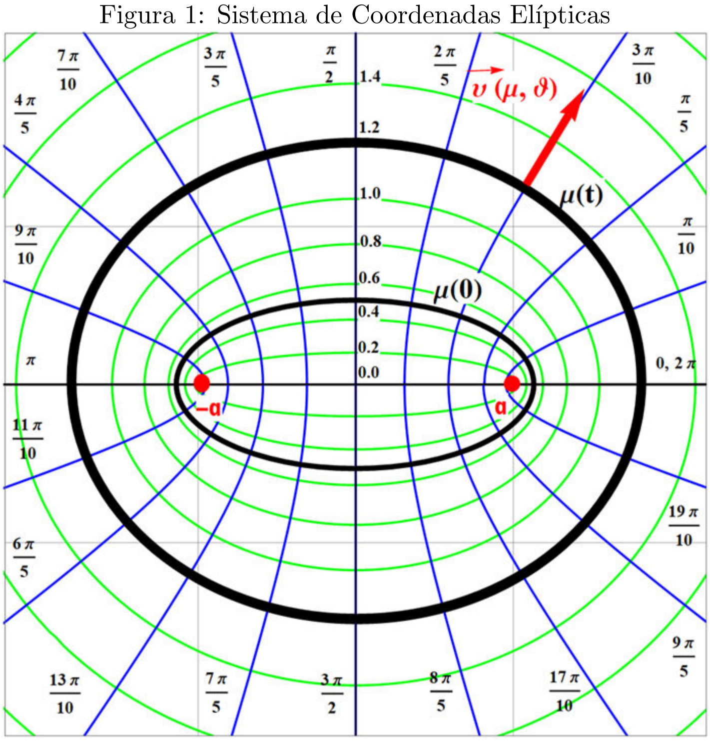
Nayla Gabriela Ribeiro.
Orientadora: Profª Drª Laís Spada da Fonseca.

Coordenadas Elípticas

Os sistemas de coordenadas são utlizados para localizar um ponto qualquer no plano, no caso de sistemas bidimensionais, ou no espaço, no caso de sistemas tridimensionais. Dentre todos os sistemas de coordenadas que existem, analisaremos, neste trabalho, as coordenadas elípticas: o que são, sua definição e caracterizações.

As coordenadas elípticas compõem um sistema bidimensional de coordenadas curvilíneas ortogonais, no qual as linhas coordenadas são elipses e hipérboles com os mesmos focos. Em geral, os focos, denominados F_1 e F_2, estão fixos sobre o eixo Ox de um sistema cartesiano, nas posições $x = -c$ e $x = +c$, respectivamente, com $c > 0$. Os eixos coordenados são os eixos de simetria das linhas coordenadas hiperbólicas e elípticas.

Figura 1: Sistema de Coordenadas Elípticas



Fonte: Stelmashuk, 2020.

As **coordenadas elípticas cilíndricas** constituem um sistema de coordenadas tridimensional obtido rotacionando o sistema dado anteriormente em torno do eixo dos focos e adicionando uma terceira coordenada. Mas não nos aprofudaremos nesse assunto.

Transformação de Coordenadas Elípticas Para Cartesianas:

Para as coordenadas elípticas bidimensionais, denotemos por a o semi-eixo maior e por b o semi-eixo menor da elipse. Seja $2c$ a distância focal da elipse, onde $c^2 = a^2 - b^2$.

As coordenadas elípticas são caracterizadas por dois valores (u, v), onde: $u \geq 0$ e $0 \leq v < 2\pi$.

Seja P um ponto com coordenadas elípticas (u, v). Se (x, y) são suas coordenadas cartesianas, então:

$$x = c\cosh(u)\cos(v) \tag{1}$$

$$y = c\sinh(u)\sin(v). \tag{2}$$

As coordenadas elípticas estão relacionadas com as cartesianas pelas indentidades trigonométricas:

$$\frac{x^2}{c^2\cosh^2 u} + \frac{y^2}{c^2\sinh^2 u} = 1 \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{c^2\cos^2 v} - \frac{y^2}{c^2\sin^2 v} = 1. \tag{4}$$

Transformação de Coordenadas Cartesianas para Elípticas

Seja P um ponto de coordenadas cartesianas (x, y). Queremos encontrar suas coordenadas elípticas (u, v). Para obtermos essa transformação, é necessário isolar c^2 em (4), assim temos:

$$\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = c^2,$$

o que significa que as curvas com valores de v constantes são hipérboles. Neste caso, a distância focal é $2c$ e temos ainda que a excentricidade é $e = \sec(v)$. Também, no caso de hipérboles, temos que o parâmetro c é dado por $c^2 = a^2 + b^2$.

Tome $p = \sin^2(v)$, dessa forma:

$$\frac{x^2}{1-p} - \frac{y^2}{p} = c^2,$$

que nos dá:

$$c^2p^2 + (x^2 + y^2 - c^2)p - y^2 = 0. \tag{5}$$

De maneira semelhante, isolando c^2 em (3):

$$\frac{x^2}{\cosh^2 u} - \frac{y^2}{\sinh^2 u} = c^2.$$

Neste caso, temos que as curvas com valores de u constantes são elipses, a distância focal é $2c$ e a excentricidade é $e = \cosh^{-1}(u)$.

Agora, considere $q = -\sinh^2(u)$, assim:

$$\frac{x^2}{1-q} - \frac{y^2}{q} = c^2,$$

o que leva a

$$c^2q^2 + (x^2 + y^2 - c^2)q - y^2 = 0, \tag{6}$$

que é essencialmente o mesmo que (5). Logo (p, q) constituem duas raízes de uma equação quadrática. Como $0 \leq p \leq 1, q \leq 0$, então $p \geq q$ e as duas raízes são:

$$p = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4c^2y^2}}{2c^2}, -q = \frac{-B - \sqrt{B^2 + 4c^2y^2}}{2c^2}, \tag{7}$$

com $B = x^2 + y^2 - c^2$.

A partir da definição de p, obtemos

$$v_0 = \arcsin(\sqrt{p}). \tag{8}$$

Dependendo de qual quadrante se encontra o ponto cartesiano (x, y), podemos separar em quatro casos:

$$\begin{aligned} v &= v_0, & x \geq 0, y \geq 0 \\ v &= \pi - v_0, & x < 0, y \geq 0 \\ v &= \pi + v_0, & x \leq 0, y < 0 \\ v &= 2\pi - v_0, & x > 0, y < 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Agora, com base na definição de q, podemos determinar u da equação quadrática

$$e^{4u} + (4q - 2)e^{2u} + 1 = 0,$$

a qual tem duas raízes

$$e^{2u} = 1 - 2q \pm 2\sqrt{q^2 - q}.$$

Como $q \leq 0$, ambas as raízes são reais e denotadas por (u_1, u_2), que satisfazem $e^{2u_1}.e^{2u_2} = 1$, que nos leva a $u_2 = -u_1 < 0$. Uma vez que nas coordenadas elípticas apenas os valores não negativos de u são considerados, obtemos:

$$u = \frac{1}{2} ln(1 - 2q + 2\sqrt{q^2 - q}) \tag{10}$$

Portanto, as equações (7-10) são as que permitem transformar coordenadas cartesianas em coordenadas elípticas.

Aplicações

Uma das aplicações mais comuns de coordenadas elípticas é a resolução de equações diferenciais parciais, como, por exemplo, a equação de Laplace ou a equação de Helmholtz, para as quais as coordenadas elípticas admitem a separação de variáveis. Outros exemplos são na resolução de sistemas como elétrons orbitando ao redor de uma molécula ou a primeira lei do movimento planetário de Kleper, que diz que o caminho de cada planeta ao redor do Sol é uma elipse, ou seja, diferentes fórmulas das elipses podem ser usadas para realizar cálculos sobre a trajetória de planetas ou satélites. Além disso, as formas elípticas podem ser utilizadas na arquitetura para projetar edifícios e salas, na carpintaria para aprimorar o design de mesas, estantes e peças de plateleiras, entre outras coisas.

Referências

[1] WEISSTEIN, Eric W. **Elliptic Cylindrical Coordinates.** MathWorld. Disponível em: https://mathworld.wolfram.com/EllipticCylindricalCoordinates.html. Acesso em: 27 jan. 2025.

[2] STELMASHUK, Vitaliy. **New approach to an underwater discharge simulation using elliptic coordinates.** 2020. Disponível em: https://www.researchgate.net/figure/Elliptic-coordinate-system-calculated-in-Wolfram-Mathematica-using-Eqs-1-and-2_fig1_338351348. Acesso em: 22 jan. 2025.

[3] Che Sun. **Explicit Equations to Transform from Cartesian to Elliptic Coordinates.** Mathematical Modelling and Applications. Vol. 2 Nov. 4. 2017, pp. 43-46. Disponível em: https://www.sciencepublishinggroup.com/article/10.11648/j.mma.20170204.12. Acesso em: 9 jan. 2025.

[4] GUZMAN, Jefferson H. **Aplicações da Elipse.** Neurochispas. Disponível em: https://br.neurochispas.com/pre-calculo/aplicacoes-da-elipse/. Acesso em: 9 jan. 2025.

[5] **Sistemas de coordenadas elípticas.** Wikipedia. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_coordinate_system. Acesso em: 21 fev. 2025.