APLICAÇÕES DE INTEGRAÇÃO

Cálculo de Volumes por Cascas Cilíndricas

Preceptora:	Isadora Honório Guimarães
Coordenadora:	Patrícia Hilário Tacuri Córdova
	Claudete Matilde Webler Martins

Como usar:

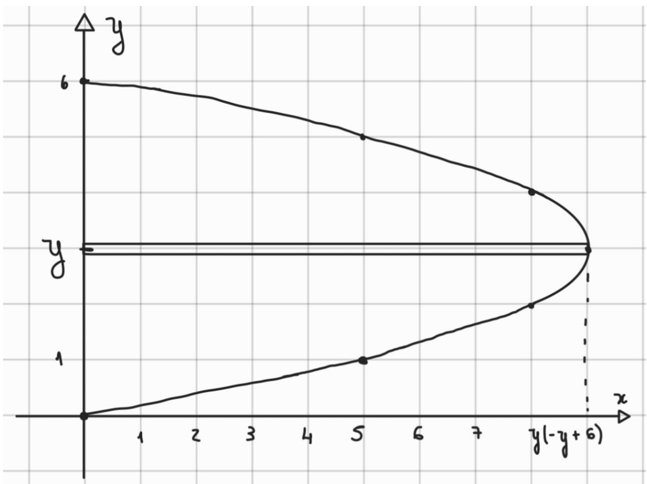
O volume de um sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região sob a curva $y = f(x)$ de a até b é:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx \quad \text{onde } 0 \leq a < b$$

A melhor maneira de se lembrar da fórmula acima, é pensar em uma casca cortada e achatada com o raio x, circunferência $2\pi x$, altura $f(x)$ e espessura dx.

Exemplo 1: Calcule o volume do sólido obtido pela região limitada pelas curvas $y^2 - 6y + x = 0$, $x = 0$ ao redor do eixo x utilizando o método das cascas cilíndricas.

Primeiramente, podemos reescrever a primeira curva da seguinte maneira: $x = -y^2 + 6y \Rightarrow x = y(-y+6)$. Agora, esboçaremos as curvas num mesmo plano cartesiano para melhor identificar de qual sólido queremos calcular o volume:



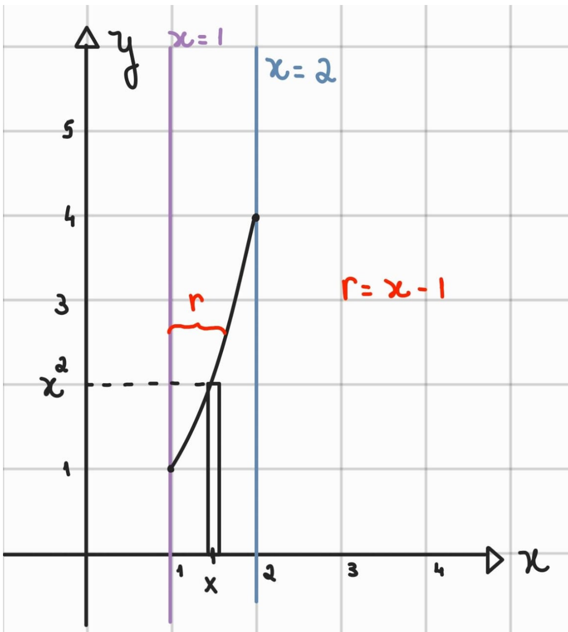
Aqui, percebemos que o raio é $y(-y+6)$ e a altura do sólido é y, então:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^6 2\pi(-y+6)y \cdot y\ dy = 2\pi \int_0^6 (-y+6)y^2\ dy \\
&= 2\pi \int_0^6 (-y^3+6y^2)\ dy = 2\pi \left(-\frac{y^4}{4} + 2y^3\right)\Bigg|_0^6 \\
&= 2\pi \left(-\frac{1296}{4} + 2 \cdot 216 + \frac{0}{4} - 2 \cdot 0\right) \\
&= 2\pi(-324+432) = 2\pi \cdot 108 \\
&= 216\pi
\end{aligned}
$$

Então, o volume do sólido é 216π.

Exemplo 2: Calcule o volume do sólido obtido pela região limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = 2$ ao redor de $x = 1$ utilizando o método das cascas cilíndricas.

Primeiramente, desenharemos todas as curvas dadas num mesmo plano cartesiano para melhor observação:



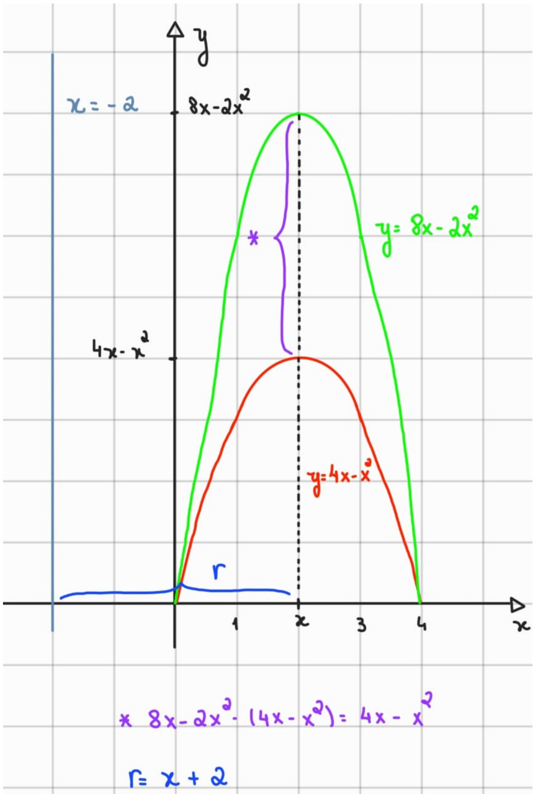
Como mostrado na imagem, o raio é $x-1$ e a altura é x^2, então o volume é:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^2 2\pi x^2(x-1)\ dx = 2\pi \int_1^2 (x^3 - x^2)\ dx \\
&= 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 2\pi\left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \\
&= 2\pi \cdot \frac{48 - 32 - 3 + 4}{12} = \pi \cdot \frac{17}{6} \\
&= \frac{17\pi}{6}
\end{aligned}
$$

Portanto, o volume do sólido pedido é $\dfrac{17\pi}{6}$.

Exemplo 3: Calcule o volume do sólido obtido pela reigião limitada pelas curvas $y = 4x - x^2$ e $y = 8x - 2x^2$ ao redor de $x = -2$ utilizando o método das cascas cilíndricas.

Esboçando todas as curvas dadas num mesmo plano cartesiano para melhor entendimento do que nos foi pedido, temos:



Pela figura, obtemos que é um sólido de raio $x + 2$ e de altura $4x - x^2$, então o volume deste é:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^4 2\pi(x+2)(4x-x^2)\,dx = 2\pi \int_0^4 (4x^2 - x^3 + 8x - 2x^2)\,dx \\
&= 2\pi \int_0^4 (-x^3 + 2x^2 + 8x)\,dx = 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + 4x^2\right)\Bigg|_0^4 \\
&= 2\pi \left(-\frac{256}{4} + \frac{128}{3} + 64 + \frac{0}{4} - \frac{2\cdot 0}{3} - 4\cdot 0\right) \\
&= 2\pi \left(-64 + \frac{128}{3} + 64\right) \\
&= \frac{256\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Concluimos então que o volume do sólido solicitado é $\dfrac{256\pi}{3}$.

Referências

[1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo: volume 1*. Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição, 2001.

[2] STEWART, James. *Cálculo*, Volume 1. Editora Cengage Learning, 7ª edição, 2013.