LIMITES
Propriedades dos Limites

Preceptoras:	Ana Clara Martins Ferreira Camila Araujo Varela Valdinete Kahenler
Coordenadora:	Claudete Matilde Webler Martins

Teorema: Se k for uma constante, $\lim_{x\to p} f(x) = L$ e $\lim_{x\to p} g(x) = L1$, então:

1. $\lim_{x\to p}[f(x)+g(x)] = L + L_1 = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x)$;
2. $\lim_{x\to p} kf(x) = kL = k\lim_{x\to p} f(x)$;
3. $\lim_{x\to p}[f(x)g(x)] = L \cdot L_1 = \lim_{x\to p} f(x) \cdot \lim_{x\to p} g(x)$;
4. $\lim_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{L_1}$, desde que $L_1 \neq 0$.

Exemplo 1: Calcule $\lim_{x\to 5} 2x^2 + 5x$.
Nesse caso temos $f(x) = 2x^2$ e $g(x) = 5x$. Pela propriedade 1,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5}[f(x)+g(x)] &= \lim_{x\to 5}[2x^2+5x] \\
&= \lim_{x\to 5} f(x) + \lim_{x\to 5} g(x) \\
&= \lim_{x\to 5} 2x^2 + \lim_{x\to 5} 5x \\
&= 2(5)^2 + 5 \\
&= 2(25) + 25 \\
&= 50 + 25.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 5}[2x^2 + 5x] = 75.$$

Exemplo 2: Calcule $\lim_{x\to 1} 2x^3 + 4x^3 + 6\sqrt{x}$.

Primeiramente, observe que:

$$\lim_{x\to 1} 2x^3 + 4x^3 + 6\sqrt{x} \quad = \quad \lim_{x\to 1} 2(x^3 + 2x^3 + 3\sqrt{x}).$$

Então, usando a Propriedade 2, com $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 3\sqrt{x})$ e $k = 2$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} 2(x^3 + 2x^3 + 3\sqrt{x}) &= 2\lim_{x\to 1}(x^3 + 2x^2 + 3\sqrt{x}) \\
&= 2\left[\lim_{x\to 1}(x^3) + \lim_{x\to 1}(2x^2) + \lim_{x\to 1}(3\sqrt{x})\right] \\
&= 2\left[\lim_{x\to 1}(x^3) + 2\lim_{x\to 1}(x^2) + 3\lim_{x\to 1}(\sqrt{x})\right] \\
&= 2[(1)^3 + 2(1^2) + 3(\sqrt{1})] \\
&= 2[(1) + 2(1) + 3(1)] \\
&= 2[1 + 2 + 3] \\
&= 2(6) \\
&= 12.
\end{aligned}$$

Exemplo 3: Calcule $\lim_{x\to 1}\left(x^2 + 5x + 1\right)\left(x^4 + 8x + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Olhando para a propriedade 3, com $f(x) = (x^2 + 5x + 1)$ e $g(x) = \left(x^4 + 8x + \frac{1}{x^2}\right)$, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)] &= \lim_{x\to 1}\left(x^2+5x+1\right)\left(x^4+8x+\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\left(x^2+5x+1\right)\cdot\lim_{x\to 1}\left(x^4+8x+\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \left[\lim_{x\to 1}(x^2)+\lim_{x\to 1}(5x)+\lim_{x\to 1}(1)\right]\cdot\left[\lim_{x\to 1}(x^4)+\lim_{x\to 1}(8x)+\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\\
&= \left[(1^2)+(5)(1)+(1)\right]\cdot\left[(1^4)+(8)(1)+\left(\frac{1}{1^2}\right)\right]\\
&= [(1)+(5)+(1)]\cdot\left[(1)+(8)+\left(\frac{1}{1}\right)\right]\\
&= (7)\cdot(10)\\
&= 70.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4: Calcule $\lim_{x\to 3}\dfrac{3x+x^2}{x-2}$.
Temos, na propriedade 4, $f(x)=(3x+x^2)$ e $g(x)=(x-2)$, com $\lim_{x\to 3}(x-2)\neq 0$.
Então, aplicando a propriedade 4 temos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{3x+x^2}{x-2} &= \frac{\lim_{x\to 3}(3x+x^2)}{\lim_{x\to 3}(x-2)}\\
&= \frac{\lim_{x\to 3}(3x)+\lim_{x\to 3}(x^2)}{\lim_{x\to 3}(x)-\lim_{x\to 3}(2)}\\
&= \frac{3(3)+(3^2)}{(3)-(2)}\\
&= \frac{9+(9)}{1}\\
&= \frac{18}{1}\\
&= 18.
\end{aligned}
$$

Referências

[1] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo: volume 1.**5a. edição. Editora LTC; 2001.