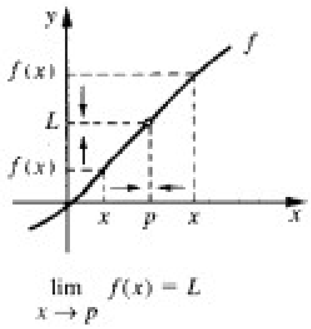
Limites
Definição formal

Preceptoras:	Ana Clara Martins Ferreira, Valdinete Kahenler e Camila Araujo Varela
Coordenadora:	Claudete Matilde Webler Martins

Definição de Limite: Seja $p \in]a, b[$ e f uma função definida em $]a, b[$ exceto possivelmente em p. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando $x \to p$ (x tende à p) será L se para todo $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que para todo $x \in]a, b[$, então

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tal número L, que quando existe é único, será denotado por $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$.



Exemplo 1: Mostre que $\lim\limits_{x \to -2} 3x - 4 = -10$.

Queremos mostrar que, dado
$\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $0 < |x - (-2)| < \delta \Rightarrow |f(x) - (-10)| < \epsilon$.
Ou seja,mostrar que
dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $0 < |x + 2| < \delta \Rightarrow |f(x) + 10| < \epsilon$.

Note que,

$$\begin{aligned}
|f(x)+10| &= |(3x-4)+10| \\
&= |3x+6| \\
&= |3(x+2)| \\
&= |3|\cdot|(x+2)| \\
&= 3\cdot|x+2| \\
&< 3\delta.
\end{aligned}$$

Portanto, para que $|f(x)+10|<\epsilon$, devemos tomar $\delta \leq \dfrac{\epsilon}{3}$.
Assim, teremos que

$$\begin{aligned}
|f(x)+10| &= |(3x-4)+10| \\
&= |3x+6| \\
&= |3(x+2)| \\
&= |3|\cdot|(x+2)| \\
&= 3\cdot|x+2| \\
&< 3\delta \\
&= 3\cdot\frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

Exemplo 2: Mostre que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

Queremos mostrar que, dado
$\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |f(x)-9| < \epsilon.$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
|f(x) - 9| &= |x^2 - 9| \\
&= |(x+3)(x-3)| \\
&= |x+3| \cdot |x-3| \\
&< |x+3|\delta \\
&\leq (|x| + |3|)\delta \\
&= (|x| + 3)\delta.(\star)
\end{aligned}
$$

Considerando que queremos escolher um δ pequeno, podemos supor (sem perda de generalidade) que $\delta \leq 1$.
Desta forma,

$$0 < |x - 3| < \delta \leq 1$$

nos leva a

$$-1 < x - 3 < 1$$

ou ainda,

$$2 < x < 4.$$

Considerando que $-4 < 2$, podemos considerar $|x| < 4$.
Voltando em $\star$, escrevemos

$$|f(x) - 9| < 7\delta.$$

Logo, para que $|f(x) - 9| < \epsilon$, devemos tomar $\delta = min\{1, \frac{\epsilon}{7}\}$, assim teremos que

$$
\begin{aligned}
|f(x)-9| &= |x^2-9| \\
&= |(x+3)(x-3)| \\
&= |x+3|\cdot|x-3| \\
&< |x+3|\delta \\
&\leq (|x|+|3|)\delta \\
&= (|x|+3)\delta \\
&= ((\delta+3)+3)\delta \\
&= ((1+3)+3)\frac{\epsilon}{7} \\
&= 7\cdot\frac{\epsilon}{7} \\
&= \epsilon,
\end{aligned}
$$

como queríamos mostrar.

Exemplo 3: Mostre que $\lim_{x\to 2} x^2+2x=8$.

Queremos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-8| < \epsilon$$

.
Note que,

$$
\begin{aligned}
|f(x)-8| &= |(x^2+2x)-8| \\
&= |(x+4)(x-2)| \\
&= |x+4|\cdot|x-2| \\
&< |x+4|\delta \\
&\leq (|x|+|4|)\delta \\
&= (|x|+4)\delta.\ (\star)
\end{aligned}
$$

Considerando que queremos escolher um δ pequeno, podemos supor (sem perda de generalidade) que $\delta \leq 1$.
Desta forma,

$$0 < |x-2| < \delta \leq 1$$

nos leva a

$$-1 < x - 2 < 1$$

ou ainda

$$1 < x < 3.$$

Considerando que $-3 < 1$, podemos considerar $|x| < 3$.
Voltando em $\star$, escrevemos

$$|f(x) - 8| < 7\delta.$$

Logo para que $|f(x) - 8| < \epsilon$, devemos tomar $\delta = min\{1, \frac{\epsilon}{7}\}$.
Assim, teremos que

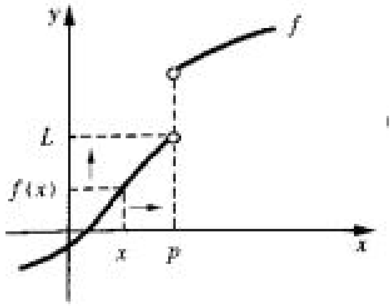
$$\begin{array}{rcl} |f(x) - 8| & = & |(x^2 + 2x) - 8| \\ & = & |(x + 4)(x - 2)| \\ & = & |x + 4| \cdot |x - 2| \\ & < & |x + 4|\delta \\ & \leq & (|x| + |4|)\delta \\ & = & (|x| + 4)\delta \\ & = & ((\delta + 2) + 4)\delta \\ & = & ((1 + 2) + 4)\frac{\epsilon}{7} \\ & = & 7 \cdot \frac{\epsilon}{7} \\ & = & \epsilon, \end{array}$$

como queríamos mostrar.

Definição de Limite Lateral a Esquerda: Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existe um a tal que $]a, p[\subset Dom_f$. Dizemos que:

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ tal \ que, \\ p - \delta < x < p \ \Leftrightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon. \end{array} \right.$$

Tal número L, que quando existe, denomina-se Limite Lateral a Esquerda de f em p. Assim, quando x tende a p, pela esquerda, $f(x)$ tende a L e denotamos por $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = L$.



Exemplo 4: Calcule $\lim\limits_{x \to -6^-} \dfrac{|x-6|}{x-6}$ **.**

Como queremos tender a seis por valores menores que seis, então estão a esquerda da reta real, logo estamos no intervalo onde $x < -6$, além disso temos uma função módulo, na qual devemos abri-la para determina qual função será compatível ao intervalo, logo temos que:

$$|x-6| = \begin{cases} x-6, & se \quad x \geq -6 \\ -(x-6), & se \quad x < -6. \end{cases}$$

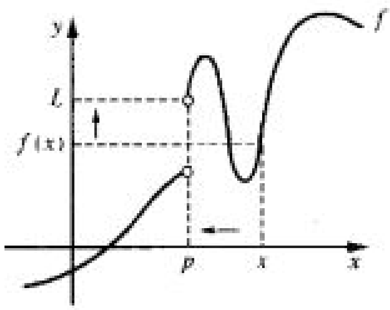
Assim a função compatível ao intervalo desejável é a função $f(x) = -(x-6)$, que é contínua $\forall x \in (-\infty, -6)$, pois a função é polinomial, logo,
$\lim\limits_{x \to -6^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -6^-} \dfrac{|x-6|}{x-6} = \lim\limits_{x \to -6^-} \dfrac{-(x-6)}{x-6} = \lim\limits_{x \to -6^-} -1 = -1.$

Logo o limite lateral a esquerda de $f(x)$ em -6 é -1.

Definição de Limite Lateral a Direita: Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existe um b tal que $]p, b[\subset Dom_f$. Dizemos que:

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ tal \ que, \\ p < x < p + \delta \ \Leftrightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon. \end{cases}$$

Tal número L, que quando existe, denomina-se Limite Lateral a Direita de f em p. Assim, quando x tende a p, pela direita, $f(x)$ tende a L e denotamos por $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = L$.



Exemplo 5: Calcule $\lim_{x \to 4^+} f(x)$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & se \quad x \geq 1 \\ cosx, & se \quad x < 1. \end{cases}$$

Como queremos tender a quatro por valores maiores que quatro, então estão a direita da reta real, logo estamos no intervalo onde $x \geq 4$, assim esse intervalo é compatível a função $f(x) = 3x + 1$, que é contínua $\forall x \in [1, \infty)$, pois a função é polinomial, logo

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} 3x + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 12 + 1 = 13.$

Logo o limite lateral a direita de $f(x)$ em 4 é 13.

Referências

[1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo: volume 1*. Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição, 2001.

[2] STEWART, James. *Cálculo*, Volume 1. Editora Cengage Learning, 7ª edição, 2013.