



APLICAÇÕES DA DIFERENCIAÇÃO

Problemas de Otimização

Preceptora:	Isadora Honório Guimarães
Coordenadora:	Patrícia Hilário Tacuri Córdova Claudete Matilde Webler Martins

Como aplicar:

- 1°. Defina o problema:** Identifique o que deseja otimizar, quais variáveis podem ser ajustadas e quais restrições devem ser respeitadas;
- 2°. Modele matematicamente:** Escreva a função objetivo e as restrições em forma matemática, garantindo que representem corretamente o problema;
- 3°. Resolva o problema;**
- 4°. Analise e valide:** Verifique se a solução atende às restrições, interprete os resultados e ajuste conforme necessário para garantir um bom desempenho na prática.

Exemplo 1: Uma fábrica produz um único produto. O custo total de produção em função da quantidade x produzida é dado por: $C(x) = 5x^2 + 20x + 100$. O preço de venda por unidade é dado por $P = 80 - x$. A receita total é dada por $R(x) = x \cdot P$. Determine a quantidade x que maximiza o lucro da empresa.

A receita total é dada por:

$$R(x) = x \cdot (80 - x) = 80x - x^2$$

A função lucro é:

$$\begin{aligned} L(x) &= R(x) - C(x) \\ &= (80x - x^2) - (5x^2 + 20x + 100) \\ &= -6x^2 + 60x - 100 \end{aligned}$$

Calculando a derivada, temos:

$$L'(x) = -12x + 60$$

Igualando a zero:

$$-12x + 60 = 0 \Rightarrow 12x = 60 \Rightarrow x = 5$$

Fazendo o teste da primeira derivada:

$$L'(4) = -12 \cdot 4 + 60 = -48 + 60 = 12 > 0$$

$$L'(6) = -12 \cdot 6 + 60 = -72 + 60 = -12 < 0$$

Como a derivada muda de positiva para negativa, temos um ponto de máximo em $x = 5$.

$\therefore$ a quantidade que maximiza o lucro da empresa é $x = 5$.

Exemplo 2: Um barco está a 6 *km* de uma praia e precisa chegar a um ponto 10 *km* ao longo da costa. Ele pode remar até um ponto da praia e depois correr pela areia. Ele rema a 4 *km/h* e corre a 8 *km/h*. Onde ele deve desembarcar para minimizar o tempo total?

Seja x a distância ao longo da praia onde o barco desembarca. O tempo de percurso na água e na terra são:

$$T_{\text{barco}} = \frac{\sqrt{x^2 + 6^2}}{4} = \frac{\sqrt{x^2 + 36}}{4}$$
$$T_{\text{terra}} = \frac{10 - x}{8}$$

A função tempo total é:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 36}}{4} + \frac{10 - x}{8}$$

Derivando $T(x)$, temos:

$$T'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}} - \frac{1}{8} \Rightarrow$$
$$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 36}} - \frac{1}{8}$$

Igualando a zero:

$$T'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 36}} - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 36}} = \frac{1}{8}$$
$$\Rightarrow 8x = 4\sqrt{x^2 + 36} \Rightarrow 2x = \sqrt{x^2 + 36}$$
$$\Rightarrow 4x^2 = x^2 + 36 \Rightarrow 3x^2 = 36$$
$$\Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = 2\sqrt{3} \approx 3,46$$

Agora, faremos o teste da primeira derivada:

$$T'(1) = \frac{1}{4\sqrt{1^2 + 36}} - \frac{1}{8} = \frac{2 - \sqrt{37}}{8\sqrt{37}} = \frac{-4,08}{48,66} \approx -0,08 < 0$$
$$T'(4) = \frac{4}{4\sqrt{4^2 + 36}} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8\sqrt{13}} - \frac{1}{8} = \frac{4 - \sqrt{13}}{8\sqrt{13}} = \frac{0,39}{28,84} \approx 0,01 > 0$$

Como a derivada muda de negativa para positiva, temos um ponto de mínimo em $x = 2\sqrt{3}$.
 $\therefore$ o barco deve desembarcar a aproximadamente 3,46 km ao longo da praia.

Exemplo 3: Uma lata cilíndrica deve ter volume de 1000 cm^3 . Determine o raio r e a altura h que minimizam a quantidade de material usado.

O volume da lata é expresso por:

$$V = \pi r^2 h = 1000$$

A área da superfície a minimizar é:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Expressando h em função de r , temos:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Substituindo em A :

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2}$$
$$= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Derivando $A(r)$, obtemos:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

Igualando a zero para calcularmos os pontos críticos:

$$4\pi r = \frac{2000}{r^2} \Rightarrow 4\pi r^3 = 2000 \Rightarrow r^3 = \frac{2000}{4\pi} \Rightarrow r^3 = \frac{500}{\pi}$$
$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42 \text{ cm}$$

Agora, fazendo o teste da primeira derivada:

$$A'(1) = 4\pi - 2000 \approx -1.387,43 < 0$$
$$A'(6) = 24\pi - 55,6 \approx 19,79 > 0$$

Como a derivada muda de negativa para positiva, temos um ponto de mínimo em $r \approx 5,42$. Substituindo r por $5,42$ em $h = \frac{1000}{\pi r^2}$ para descobrirmos a altura correspondente, obtemos:

$$h = \frac{1000}{\pi(5.42)^2} \approx 10.84 \text{ cm}$$

$\therefore$ o raio deve ser 5,42 cm e a altura 10,84 cm para minimizar a área da lata.

Exemplo 4: Determine o ponto (x, y) na circunferência $x^2 + y^2 = 25$ que está mais próximo da reta $y = 2x + 1$.

A distância entre um ponto (x, y) e a reta $y = 2x + 1$ é dada por:

$$D(x, y) = \frac{|2x - y + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2x - y + 1|}{\sqrt{5}}$$

Nosso objetivo é minimizar $D(x, y)$, sujeito à restrição $x^2 + y^2 = 25$. Para eliminar o valor absoluto e facilitar os cálculos, vamos minimizar $D^2(x, y)$, que tem o mesmo ponto de mínimo:

$$D^2(x, y) = \frac{(2x - y + 1)^2}{5}$$

Como a restrição é $x^2 + y^2 = 25$, podemos resolver o problema substituindo $y = \sqrt{25 - x^2}$ na função.

Substituindo:

$$D^2(x) = \frac{(2x - \sqrt{25 - x^2} + 1)^2}{5}$$

Vamos derivar para encontrar o ponto de mínimo:

$$D^2(x) = \frac{1}{5} \left(2x - \sqrt{25 - x^2} + 1 \right)^2$$

$$\text{Seja } u(x) = 2x - \sqrt{25 - x^2} + 1$$

$$\text{Então } D^2(x) = \frac{u(x)^2}{5}$$

Aplicando a regra da cadeia:

$$(D^2)'(x) = \frac{2u(x) \cdot u'(x)}{5}$$

Derivando $u(x)$:

$$u'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot (-2x) = 2 + \frac{2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = 2 + \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Logo:

$$(D^2)'(x) = \frac{2}{5} \left(2x - \sqrt{25 - x^2} + 1 \right) \left(2 + \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \right)$$

Igualando a zero:

$$(D^2)'(x) = 0$$

Aqui, o produto será zero se e somente se. o primeiro fator for zero, pois o segundo fator $2 + \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} > 0 \quad \forall x \in (-5, 5)$. Então:

$$\begin{aligned}(D^2)'(x) = 0 &\Rightarrow 2x - \sqrt{25 - x^2} + 1 = 0 \\ 2x + 1 &= \sqrt{25 - x^2}\end{aligned}$$

Elevando os dois lados ao quadrado:

$$\begin{aligned}(2x + 1)^2 &= 25 - x^2 \\ 4x^2 + 4x + 1 &= 25 - x^2 \\ 5x^2 + 4x - 24 &= 0\end{aligned}$$

Resolvendo a equação:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 5 \cdot 24}}{2 \cdot 5} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 480}}{10} = \frac{-4 \pm \sqrt{496}}{10}$$

Fatorando a raiz:

$$496 = 16 \cdot 31 \Rightarrow \sqrt{496} = \sqrt{16 \cdot 31} = 4\sqrt{31}$$

Portanto:

$$x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{31}}{10} = \frac{4(-1 \pm \sqrt{31})}{10} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{31})}{5}$$

Aproximando:

$$\sqrt{31} \approx 5.57 \Rightarrow x_1 \approx \frac{2(-1 + 5.57)}{5} \approx 1.83 \quad \text{e} \quad x_2 \approx \frac{2(-1 - 5.57)}{5} \approx -2.63$$

Substituindo na equação do círculo:

$$\begin{aligned}y_1 &= \sqrt{25 - (1.83)^2} \approx \sqrt{25 - 3.35} \approx \sqrt{21.65} \approx 4.65 \\ y_2 &= \sqrt{25 - (2.63)^2} \approx \sqrt{25 - 6.92} \approx \sqrt{18.08} \approx 4.25\end{aligned}$$

Agora, aplicamos o teste da primeira derivada. Vamos testar o sinal da derivada $(D^2)'(x)$ antes e depois de $x \approx 1.83$:

$$\begin{aligned}(D^2)'(1) &= \frac{2}{5} \left(2 - \sqrt{24} + 1 \right) \left(2 + \frac{1}{\sqrt{24}} \right) = \frac{2}{5} \cdot (-1, 89) \cdot (2, 2) \approx -1, 67 < 0 \\(D^2)'(2) &= \frac{2}{5} \left(4 - \sqrt{21} + 1 \right) \left(2 + \frac{2}{\sqrt{21}} \right) = \frac{2}{5} \cdot (0, 41) \cdot (2, 43) \approx 0, 39 > 0\end{aligned}$$

Como a derivada muda de negativa para positiva ao passar por $x \approx 1, 83$, temos um ponto de mínimo.

Os pontos da circunferência mais próximos da reta $y = 2x + 1$ são, aproximadamente, $(1, 83; 4, 65)$ e $(-2, 63; -4, 25)$. Ambos os pontos estão na circunferência dada, e têm a mesma distância da reta, já que a circunferência é simétrica em relação à origem. Como o problema nos pede apenas um ponto mais próximo, podemos citar qualquer um deles como resposta. Usualmente, escolhemos o de coordenadas positivas.

$\therefore$ o ponto da circunferência mais próximo da reta $y = 2x + 1$ é, aproximadamente, $(1, 83; 4, 65)$.

Referências

- [1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo: volume 1*. Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5^a edição, 2001.
- [2] STEWART, James. *Cálculo*, Volume 1. Editora Cengage Learning, 7^a edição, 2013.