# APLICAÇÕES DE INTEGRAÇÃO

## Aplicações Diversas de Cálculo Diferencial e Integral


| | |
|---|---|
| Preceptora: | Isadora Honório Guimarães |
| Coordenadora: | Patrícia Hilário Tacuri Córdova |


*Equações diferenciais são amplamente aplicadas em fenômenos naturais e sociais do nosso dia a dia, veremos, nesta lista, alguns exemplos dessas aplicações.*

**Exemplo 1:** Certos tipos de bactéria se dividem e se multiplicam com o passar do tempo. Seja $x$ o número de bactérias no tempo $t$. A razão com a qual as bactérias aumentam, isto é, $\frac{dx}{dt}$, é proporcional ao número de bactérias em um determinado momento. (Considere que a constante de proporcionalidade é $k > 0$.)

a) Determine a equação diferencial.

Como as bactérias se dividem e aumentam em um número, o coeficiente de $x$ é positivo.

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

b) Quandoo número inicial de bactérias é 10, determine a solução particular para a equação diferencial na questão a).

De a), considerando $x \neq 0$, temos:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = k$$

Integrando ambos os lados em relação a $t$:

$$\int \frac{dx}{x} = \int k\ dt \Rightarrow \ln|x| = kt + C_1 \Rightarrow x = \pm e^{kt+C_1} = \pm e^{C_1} \cdot e^{kt}$$

Seja $\pm e^{C_1} = C$, então $x = Ce^{kt}$.

Quando $t = 0$, $x = 10$; portanto, $C = 10$.

$\therefore\ \ x = 10e^{kt}$

**Exemplo 2:** Quando um objeto com uma temperatura de 100°C é deixado em uma área com temperatura de 20°C, a temperartura do objeto começa a diminuir. A razão com a qual a temperatura do objeto diminui é proporcional a diferença de temperatura entre o objeto e a área. Considere que a constante de proporcionalidade é $k > 0$ e que a temperatura da área permanece a mesma.

a) Seja $x$°C a temperatura do objeto após $t$ minutos. Determine a equação diferencial.

$$\frac{dx}{dt} = -k(x - 20)$$

b) Determine a solução particular para a equação diferencial da questão a) dada a condição inicial.
De a), $\dfrac{1}{x-20} \cdot \dfrac{dx}{dt} = -k$.
Integrando ambos os lados em relação a $t$:

$$\int \frac{dx}{x-20} = \int (-k)\ dt \Rightarrow \ln|x-20| = -kt + C_1 \Rightarrow x - 20 = \pm e^{-kt+C_1}$$
$$\Rightarrow x - 20 = \pm e^{C_1} \cdot e^{-kt}$$

Seja $\pm e^{C_1} = C$, então $x = Ce^{-kt} + 20$.
Quando $t = 0$, $x = 100$; portanto $100 = C + 20 \Rightarrow C = 80$.
$\therefore\ \ x = 80e^{-kt} + 20$

c) Após 20 minutos, a temperatura do objeto é 60°C. Determine quanto tempo mais (em minutos) demora para que o objeto chegue a 30°C.
Quando $t = 20$, $x = 60$; portanto, a partir de b):

$$60 = 80e^{-20k} + 20 \Rightarrow e^{-20k} = \frac{40}{80} \Rightarrow e^{-20k} = \frac{1}{2} \quad \cdots \ \mathbf{I}$$

Seja $t_0$ minutos o tempo que demora para o objeto chegar a 30°C.

$$30 = 80e^{-kt_0} + 20 \Rightarrow e^{-kt_0} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \cdots \ \mathbf{II}$$

De **I** e **II**, temos que $e^{-kt_0} = (e^{-20k})^3 = e^{-60k}$.
$\therefore\ \ t_0 = 60$. Portanto, demora mais 40 minutos.

**Exemplo 3:** Em certas condições climáticas, um objeto molhado perde sua umidade. A razão com a qual a umidade é perdida é proporcional à quantidade de umidade em determinado momento. (Seja $k > 0$ a constante de proporcionalidade.) Dado que um lençol molhado perde metade de sua umidade em 1 hora, determine quanto tempo (em horas) demora para que o lençol perca 99% de sua umidade. Considere que as condições climáticas fiquem estáveis. Utilize $\log_2 5 = 2,32$, e arredonde para uma casa decimal.

Seja $x$ a quantidade de umidade após $t$ horas.
$\frac{dx}{dt} = -kx$, isto é, $\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = -k$.
Integrando ambos os lados em relação a $t$:

$$\int \frac{dx}{x} = \int (-k)\ dt \Rightarrow \ln|x| = -kt + C_1 \Rightarrow x = \pm e^{-kt+C_1} \Rightarrow x = \pm e^{C_1} \cdot e^{-kt}$$

Seja $\pm e^{C_1} = C$, então $x = Ce^{-kt}$.

Seja $x_0$ a quantidade inicial de umidade, então $x_0 = Ce^{-k\cdot 0} \Rightarrow x_0 = C$, portanto $x = x_0 e^{-kt}$.

Além disso, quando $t = 1$, $x = 1$, $x = \frac{1}{2}x_0$; portando $\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-k} \Rightarrow e^{-k} = \frac{1}{2}$.
Assim, seja $t_0$ horas o tempo que demora para que o lençol perca 99% de sua umidade.

$$\frac{1}{100}x_0 = x_0 e^{-kt_0} \Rightarrow \frac{1}{100}x_0 = x_0(e^{-k})^{t_0} \Rightarrow \frac{1}{100}x_0 = x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t_0}$$

Como $\frac{1}{100} = \frac{1}{2^{t_0}} \Rightarrow 2^{t_0} = 100 \Rightarrow t_0 = \log_2 100$. Portanto,

$$t_0 = \log_2 100 \Rightarrow t_0 = \log_2(4 \cdot 25) \Rightarrow$$
$$t_0 = \log_2 2^2 + \log_2 5^2 \Rightarrow t_0 = 2\log_2 2 + 2\log_2 5 \Rightarrow$$
$$t_0 = 2(1 + \log_2 5) \Rightarrow t_0 = 2(1 + 2,32) \Rightarrow$$
$$t_0 = 2 \cdot 3,32 \Rightarrow t_0 = 6,64 \approx 6,6$$

Portanto, demora 6,6 horas para que o lençol perca 99% de sua umidade.

# Referências


[1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo: volume 1.* Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição, 2001.

[2] STEWART, James. *Cálculo*, Volume 1. Editora Cengage Learning, 7ª edição, 2013.