Cálculo Diferenciual de Integral: um KIT de sobrevivência

This woksheet is in Portuguese language.
Prof. Doherty Andrade

Séries de Farey

Dado um natural N a seqüência de Farey, também denominada de série de Farey de orden N, denotada por F_N, é a sequência de todas as frações irredutíveis entre 0 e 1(inclusive 0 e 1) com denominador não excedendo N, ordenadas de modo crescente. Mais precisamente, $\boldsymbol{F_N}$ é a seqüência de todas as frações irredutíveis $\boldsymbol{\frac{p}{q}}$, maiores ou iguais a 0 e menores ou iguais a 1, ordenadas de modo crescente .

Pode-se provar que F_N contém todos os termos de F_{N-1}. Existem diversos métodos para construir a sequência $\frac{p}{q}$, por exemplo a árvore de Stern-Brocot.

Utilizando Maple, pode-se gerar facilmente a sequência. Veja o código abaixo.

Uma maneira fácil de obter a sequência de Farey de ordem N, F_N, é utilizar o seguinte procedimento:

1º. Passo: iniciamos com as frações $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$;

2º. Passo: Se $\frac{i}{j}$ e $\frac{k}{m}$ são frações de F_N, então $\frac{i+k}{j+m}$ também é fração de F_N ;

3º. Passo: efetuamos o passo 2 enquanto $j+m$ menor do que ou igual a N .

Pode-se provar que todos os elementos de $\boldsymbol{F_N}$ são gerados pelo procedimento acima.

Apresentamos a seguir uma função que gera todas as frações que compõem a sequência de Farey F_N .

As chaves são importantes para eliminar as repetições.

```
> F:=n->{seq(seq(i/j,i=0..j),j=1..n)};
```

$$F := n \rightarrow \{\operatorname{seq}\left(\operatorname{seq}\left(\frac{i}{j}, i = 0 .. j\right), j = 1 .. n\right)\}$$

```
> F(5);
```

$$\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\}$$

```
> F(7);
```

$$\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\}$$

```
>
```

As séries de Farey estão relacionadas a diversos resultados da teoria dos números, à geometria (teorema de Pick) e em particular às equações diofantinas.

A resolução de muitos problemas de aritmética depende da resolução de equações do tipo   Estas equações pertencem a um tipo de equação chamada Diofantinas,

em homenagem a Diofantus de Alexandria (?-250 DC) que escreveu uma importante obra entitulada "Arithmetica" onde tratou destas e outras equações e suas soluções inteiras .

Bibliografia

[1] Hardy, G.H. & Wright, E.M. (1979) An Introduction to the Theory of Numbers (Fifth Edition). Oxford University Press. ISBN 0-19-853171-0.

[2] Norman Routledge, "Computing Farey Series," The Mathematical Gazette, Vol. 29 (No. 523), 55-62 (March 2008).

[3] Andrade, D. , A Formula de Pick, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, Vol. 9 No. (1988) 119-126.

[4] Varberg, D.E. Pick's Theorem Revisited. The Am Math Monthly v 92 (1985), pp 584-587.

[5] Andrade, D., Teorema de Pick. Disponível em htttp://www.dma.uem.br/kit/pick.html.

Comentários e sugestões: doherty@uem.br