O Teorema da Função Inversa e da Função Implícita

Prof. Doherty Andrade
Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Matemática - 87020-900 Maringá-PR, Brazil

Sumário

1. Teorema da Função Inversa

O Teorema da função Inversa é um importante resultado que trata da possibilidade de inverter uma função, mesmo que localmente. O teorema também fala das propriedades de diferenciabilidade da inversa. O Teorema da Função Inversa diz basicamente que se $f'(x_0)$ é invertível, então f é invertível numa vizinhança de x_0. Este critério usa o determinante da matriz Jacobiana da função, como veremos mais adiante.

Antes de enunciarmos este importante teorema vamos precisar de alguns conceitos.

Definição 1 *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Dizemos que $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 em U se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, m$ existem e são contínuas em U.*

Definição 2 *Sejam U e V abertos do $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to V$ uma bijeção. Dizemos que f é um difeomorfismo se f e f^{-1} são diferenciáveis. Dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^1 se f e f^{-1} são de classe C^1.*

Dois fatos óbvios:

- A composta de difeormorfismos é um difeomorfismo.
- A inversa de um difeomorfismo é um difeomorfismo.

Notemos que se $f : U \to V$ é um difeomorfismo, então $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, é um isomorfismo, para todo $x \in U$ e

$$[f'(x)]^{-1} = \left(f^{-1}\right)' (f(x)).$$

De fato, $Id_U(x) = f^{-1} \circ f(x)$ segue que

$$h = (f^{-1})'(f(x)).f'(x)h,$$

isto é,

$$[f'(x)]^{-1} = \left(f^{-1}\right)' (f(x)).$$

Definição 3 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Dizemos que f é um difeomorfismo local se para cada $x \in U$, existe um aberto $V_x \ni x$ e um aberto $W_{f(x)}$ tal que $f : V_x \to W_{f(x)}$ seja um difeomorfismo. Um difeomorfismo local é de classe C^1 quando $f : V_x \to W_{f(x)}$ for de classe c^1 para cada $x \in U$.*

Para a demonstração do Teorema da função inversa vamos precisar do seguinte teorema sobre ponto fixo. É o teorema do ponto fixo de Banach ou o princípio da contração. Sejam (M, d) e (N, d_1) dois espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é dita uma contração se existe $0 \leq k < 1$ tal que

$$d_1(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

É fácil ver que toda contração é uniformemente contínua.

Teorema 4 *Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma contração. Então, f possui um único ponto fixo em M. Além disso, dado $x_0 \in M$ a sequência definida por*

$$x_1 = f(x_0), \ \ x_{n+1} = f(x_n), \ n = 1, 2, \ldots$$

é uma sequência convergente e $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ é ponto fixo de f.

Demonstração: se a sequência (x_n) definida acima converge para $a \in M$, então como f é contínua temos

$$f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a.$$

Provando que a é ponto fixo de f.

Se f tem dois pontos fixos a e b, então temos

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b),$$

o que é absurdo a menos que $a = b$. Logo, $a = b$.

Resta provar que a sequência (x_n) converge. Notemos que $d(x_1, x_2) \leq kd(x_0, x_1)$ e que em geral $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0), \forall n \in$

$\mathbb{N}$. Segue que para $n, p \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq [k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1}] d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $\lim k^n = 0$ segue que a sequência é de Cauchy e portanto convergente, o que completa a prova do teorema. □

• **Exemplo 5**

Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma aplicação contínua com derivada tal que $\sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| < 1$. Então, f é uma contração.

Este resultado decorre da seguinte desiguadade

$$|f(y) - f(x)| \leq |y - x| \sup_{c \in (a,b)} |f'(c)| \leq k|y - x|.$$

Vamos precisar também dos seguinte fatos:

Fato 1: Desigualdade do valor médio: Seja U aberto conexo do $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável tal que $\|f'(x)\| \leq M, \forall x \in M$, então

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|, \ \forall a, b \in U.$$

Fato 2: Continuidade da Aplicação matriz Inversa: Se A é invertível e $B \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tal que $\|B - A\|\|A^{-1}\| < 1$, então B é invertível. A aplicação $A \mapsto A^{-1}$ é contínua para todo A.

Teorema 6 (Função Inversa) *Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f : W \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e $a \in W$. Se $f'(a)$ é bijetora*

e $b = f(a)$, *então*
a) existem abertos $U \ni a$ *e* $V \ni b$ *do* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $f : U \to V$ *é bijetora.*
b) $g : V \to U$ *é de classe* C^1, $g = f^{-1}$.

Em outras palavras, f *é um difeomorfismo local de classe* C^1.

Demonstração: Seja $f'(a) = A$ e λ tal que

$$2\lambda\|A^{-1}\| = 1. \tag{1.1}$$

Como f' é contínua em a, existe uma bola aberta U de centro em a tal que

$$\|f'(x) - A\| < \lambda, \ \forall x \in U. \tag{1.2}$$

Seja $y \in \mathbb{R}^n$ e

$$\phi(x) = x + A^{-1}(y - f(x)), \ \forall x \in U. \tag{1.3}$$

Note que

$$f(x) = y \Leftrightarrow \phi(x) = x.$$

Além disso,

$$\phi'(x) = I - A^{-1}f'(x) = A^{-1}\left[A - f'(x)\right].$$

Logo,

$$\|\phi'(x)\| = \|A^{-1}\| \cdot \|A - f'(x)\| < \frac{1}{2\lambda} \cdot \lambda = \frac{1}{2},$$

isto é,

$$\|\phi'(x)\| < \frac{1}{2}. \tag{1.4}$$

Tomemos x_1 e x_2 na bola U e $h(t) = \phi((1-t)x_1 + tx_2)$. Então,

$$h'(t) = \phi'((1-t)x_1 + tx_2).(x_2 - x_1).$$

Logo, por (1.4) temos

$$\|h'(t)\| = \|\phi'((1-t)x_1 + tx_2)\|.\|x_2 - x_1\| < \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|.$$

Agora usando a desigualdade do valor médio, concluímos que

$$\|\phi(x_2) - \phi(x_1)\| < \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|. \tag{1.5}$$

Assim, ϕ é uma contração sobre a bola U.

Como $\phi(U) \subset U$ e $\phi : U \to U$ é uma contração, então ϕ tem um único ponto fixo $x \in U$. Segue que $y = f(x)$ para no máximo um $x \in U$. Assim, $f : U \to f(U)$ é bijetora. Seja $g = f^{-1}$.

Agora mostraremos que $V = f(U)$ é aberto. Seja $y_0 = f(x_0) \in U$. Seja B_1 a bola aberta de centro x_0 e raio $r > 0$ tal que $\overline{B_1} \subset U$.

Tomemos y tal que

$$\|y - y_0\| < \lambda r,$$

provaremos que y pertence a V. Assim, da definição de ϕ, veja (1.3), temos

$$\|\phi(x_0) - x_0\| = \|A^{-1}(y - y_0)\| < \|A^{-1}\|\lambda r = \frac{r}{2}.$$

Se $x \in \overline{B_1}$, segue de (1.5) que

$$\begin{aligned}
\|\phi(x) - x_0\| &\leq \|\phi(x) - \phi(x_0)\| + \|\phi(x_0) - x_0\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \frac{r}{2} \\
&< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.
\end{aligned}$$

Segue que $\phi(x) \in B_1 \subset \overline{B_1}$.

Assim, $\phi : \overline{B_1} \to \overline{B_1}$ é uma contração e como $\overline{B_1}$ é um espaço métrico completo, temos que ϕ tem um único ponto fixo $x \in \overline{B_1}$. Para este x, $f(x) = y$ e assim $y \in f(\overline{B_1}) \subset f(U) = V$. Logo, V é aberto, pois y é ponto interior de V. Isto prova a parte a) do teorema.

Para a parte b) do teorema, que g é de classe C^1, tomemos $U = B$ e $V = f(B)$. Seja $y \in V$ e $y + k \in V$. Então, existe $x \in B$ e $x + h \in B$ tal que

$$f(x) = y \ \text{ e } f(x+h) = y + k.$$

Da definição (1.3) de ϕ, temos

$$\phi(x+h) - \phi(x) = h + A^{-1}\left[f(x) - f(x+h)\right] = h - A^{-1}k.$$

Por (1.5) temos

$$\|h - A^{-1}k\| \leq \frac{1}{2}\|h\|.$$

Logo,

$$\|h\| - \|A^{-1}k\| \leq \frac{1}{2}\|h\|,$$

isto é,

$$-\|A^{-1}k\| \leq -\frac{1}{2}\|h\|.$$

Ou seja,

$$\|A^{-1}k\| \geq \frac{1}{2}\|h\|.$$

Logo,

$$\|h\| \leq 2\|A^{-1}\|.\|k\| = \frac{\|k\|}{\lambda}. \tag{1.6}$$

Agora vamos usar o seguinte que a se A é invertível e $B \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tal que $\|B - A\|\|A^{-1}\| < 1$, então B é invertível. A aplicação $A \mapsto A^{-1}$ é contínua para todo A.

Em (1.1) e (1.2) temos que

$$\|f'(x) - A\|\|A^{-1}\| < \frac{1}{2} < 1,$$

e assim $f'(x)$ tem uma inversa T.

Como

$$g(y+k) - g(y) - Tk = h - Tk = -T\left[f(x+h) - f(x) - f'(x)h\right]$$

De (1.6) temos que

$$\frac{1}{\|k\|} \leq \frac{1}{\lambda\|h\|}.$$

$$\frac{\|g(y+k) - g(y) - Tk\|}{\|k\|} \leq \frac{\|T\|}{\lambda}.\frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\|}{\|h\|} \tag{1.7}$$

De (1.6) temos que quando $k \to 0$, $h \to 0$ também.

Logo, o lado direito de (1.7) vai para zero e portanto o lado esquerdo de (1.7) vai para zero. Segue da definição de derivada que

$$g'(y) = T = \left[f'(x)\right]^{-1}.$$

Temos que g é contínua em V, pois g é diferenciável.

Como $g'(y) = T = \left[f'(g(y))\right]^{-1}$ temos que g' é contínua, pois f', g e $A \mapsto A^{-1}$ são contínuas. $\square$

• **Exemplo 7** *A hipótese f é C^1 não pode ser retirada. Considere a seguinte função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \sin(\dfrac{1}{x}), & se\ x \neq 0, \\ 0, & se\ x = 0. \end{cases}$$

Temos que f é diferenciável e sua derivada é dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + 2x \sin(\dfrac{1}{x}) - \cos(\dfrac{1}{x}), & se\ x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}, & se\ x = 0. \end{cases}$$

Se f fosse invertível numa vizinhança de $x_0 = 0$, então f seria injetora nessa vizinhança. Como $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, f seria crescente. Mas isto é impossível, pois em todo vizinhança de x_0, f muda de sinal.

Corolário 8 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ aplicação de classe C^1. Se $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é invertível para todo $x \in U$, então f é um difeomorfismo de classe C^1.*

Observação 9 *Escrevendo $y = f(x)$ em coordenadas*

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ i = 1, 2, \ldots, n$$

o sistema pode ser resolvido para $x = x_1, \ldots, x_n$ em termos de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se x e y estiverem restritos a abertos adequados a e b. As soluções são únicas e continuamente diferenciáveis.

• **Exemplo 10**

a: Seja $F(x,y) = (\exp(x)\cos(y), \exp(x)\sin(y))$ de classe C^1. Temos que

$$F'(x,y) = \begin{bmatrix} \exp(x)\cos(y) & -\exp(x)\sin(y) \\ \exp(x)\sin(y) & \exp(x)\cos(y) \end{bmatrix}$$

O determinante de $F'(x,y)$ é igual a $\exp(2x) \neq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Pelo Teorema da Função Inversa, dado (x_0, y_0) existe um aberto $U \ni (x_0, y_0)$ e um aberto $V \ni F(x_0, y_0)$ tal que $F : U \to V$ é um difeomorfismo.

Note que F não é bijetora, pois $F(0,0) = F(0, 2\pi)$.

b: Seja

$$U = \{(r,\theta); r > 0 \text{ e } 0 < \theta < 2\pi\}$$

aberto do $\mathbb{R}^2$. Seja $F(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, com $(r,\theta) \in U$. Como F é de classe C^1 e $|F'(r,\theta)| \neq 0$ segue que F é localmente um difeo de classe C^1.

c: Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Então, $F : U \to \mathbb{R}^2$ dada por $(x,y) = (x, f(x,y))$ é de classe C^1 e é um difeo local em (a,b).

Basta calcular a derivada de F, temos que

$$|F'(x,y)| = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0.$$

Pelo Teorema da função inversa, existem abertos U_0 e U_1 tal que $F : U_0 \to U_1$ é um difeomorfismo de classe C^1.

d: $F(x,y) = (\exp(x) + \exp(y), \exp(x) + \exp(-y))$.

e: Perto de quais pontos (x, y) podemos resolver x e y em função de u e v, onde

$$\frac{x^4 + y^4}{x} = u,$$
$$\cos(x) + \sin(y) = v(x, y)?$$

f: Sejam x, y e z dados em coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} x(\rho, \phi, \theta) &= \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y(\rho, \phi, \theta) &= \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z(\rho, \phi, \theta) &= \rho \cos(\phi), \end{aligned}$$

perto de que quais pontos podemos resolver o sistema acima para ρ, θ e ϕ em função de x, y e z?

2. Teorema da Função Implícita

É uma consequência do Teorema da Função Inversa.

Suponha que seja dado a relação $F(x, y) = 0$. Então, para cada valor de x pode existir um ou mais valores de y que satisfaz a equação (ou pode não existir). Se $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ é um intervalo tal que para cada $x \in I$ existe extamente um y satisfazendo a equação, então dizemos que $F(x, y) = 0$ define y como uma função de x implicitamente sobre I.

Um teorema de função implícita é um teorema que determina condições sob as quais uma relação como $F(x, y) = 0$ define y como função de x ou x como função de y. A solução é local no sentido que o tamanho do intervalo I pode ser menor do que o domínio da relação F.

O Exemplo mais simples de um teorema de função implícita afirma que se F é diferenciável e se P é um ponto em que F_y não se anula, então é possível expressar y como função de x em uma região contendo este ponto.

Teorema 11 *Seuponha que F, F_x e F_y são contínuas soobre um subconjunto aberto A do R^2 contendo o ponto $P = (x_0, y_0)$. Suponha que*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Então, existem números h e k que determinam um retângulo R contido em A tal que para cada x em $I = \{x; |x - x_0| < h\}$ existe um único número y em $J = \{y; |y - y_0| < k\}$ que satisfaz a equação $F(x, y) = 0$. A totalidade dos pontos (x, y) formam uma função f cujo domínio contém I e cujo imagem está em J.

b) A função f e suas derivadas são contínuas em I.

Demonstração: Para x fixo no retângulo R considere a aplicação

$$T_x y = y - \frac{F(x, y)}{F_y(x_0, y_0)}$$

que leva um ponto y de J em $\mathbb{R}^1$. Vamos mostrar que para h e k suficientemente pequenos a aplicação leva J em J e tem um ponto fixo. Isto é, existe um y tal que $T_x y = y$ ou em outras palavras, existe um y tal que $F(x, y) = 0$.

Para fazer isto, primeiro reescrevemos a aplicação T_x:

$$T_x y = y_0 - c(x - x_0) - \psi(x, y),$$

onde

$$c = \frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

$$\psi(x,y) = \frac{1}{F_y(x_0,y_0)}\left[F(x,y) - F_x(x_0,y_0)(x-x_0) - F_y(x_0,y_0)(y-y_0)\right].$$

Como $F(x_0,y_0) = 0$ vemos que

$$\psi(x_0,y_0).\ \psi_x(x_0,y_0) = 0,\ \ \psi_y(x_0,y_0) = 0.$$

Como ψ_x e ψ_y são contínuas podemos tomar k tão pequeno tal que

$$|\psi_x(x,y)| < \frac{1}{2},\ \ |\psi_y(x,y)| < \frac{1}{2}$$

para todo (x,y) no quadrado

$$S = \{(x,y); |x-x_0| \le k \ \text{ e } \ |y-y_0| \le k\}.$$

Agora espandimos $\psi(x,y)$ em série de Taylor em S em torno do ponto (x_0,y_0):

$$\psi(x,y) = \psi_x(\zeta,\eta)(x-x_0) + \psi_y\zeta,\eta)(y-y_0),$$

$(\zeta,\eta) \in S$.

Portanto, para $h \le k$ temos a estimativa no retângulo R

$$|\psi(x,y)| \le \frac{h}{2} + \frac{k}{2}.$$

A seguir vamos mostrar que se reduzirmos h e k suficientemente a aplicação T_x aplica o intervalo J em J. Temos

$$|T_x y - y_0| \le |c(x-x_0)| + |\psi(x,y)| \le c|h| + \frac{h}{2} + \frac{k}{2} = (\frac{1}{2}+c)|h| + \frac{h}{2}.$$

Escolhendo h suficientemente pequeno, então $T_x y$ aplica J em J para cada x em I. A aplicação T_x é uma contração, de fato, pelo Teorema do valor médio

$$|T_x y_1 - T_x y_2| = |\psi(x,y_1) - \psi(x,y_2)| \le \frac{1}{2}|y_1 - y_2|.$$

Aplicando o teorema da contração e para cada $x \in I$ fixo, existe um único y em J tal que $F(x, y) = 0$. Isto é, y é uma função de x para $(x, y) \in R$. $\square$

Teorema 12 (Teorema da Função Implícita- caso especial) *Seja $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ função de classe C^1. Um ponto do $\mathbb{R}^{n+1}$ será denotado por (x, z), onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}$. Suponha que*

$$F(x_0, z_0) = 0 \ e \ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Então, existe uma bola aberta $B \subset \mathbb{R}^n$ contendo x_0 e uma vizinhança V de z_0 tal que $z = g(x)$, para uma única função g de classe C^1 em B e que satisfaz $F(x, g(x)) = 0$. Além disso,

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

- **Exemplo 13**

a) Perto de quais pontos a superfície $x^3 + 2y^2 + 8xz^2 - 3z^3y = 1$ pode ser representada como gráfico de uma função diferenciável $z = k(x, y)$?

Defina $F(x, y, z) = x^3 + 2y^2 + 8xz^2 - 3z^3y - 1$. Vamos determinar pontos (x_0, y_0, z_0) tais que $\dfrac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$. Como

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = z_0(16x_0 - 9y_0z_0) = 0,$$

se $z_0 = 0$ ou $16x_0 - 9y_0z_0 = 0$, segue que fora destes pontos $z = k(x, y)$ é diferenciável e

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 8z^2}{16xz - 9yz}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{6y - 3z^3}{16xz - 9yz}.$$

Teorema 14 (Função Implícita) *Seja* $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *uma função de classe* C^1*. Suponha que* $F(x_0, y_0) = 0$ *e*

$$\det\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right] \neq 0.$$

Então, existe um aberto $W \subset \mathbb{R}^k$ *e* $\phi : W \to \mathbb{R}^k$ *função de classe* C^1 *tais que*

a) $x_0 \in W$ *e* $\phi(x_0) = y_0$.

b) $F(x, \phi(x)) = 0, \forall x \in W$.

Demonstração: Seja $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \times R^m$ definida por

$$g(x, y) = (x, f(x, y)).$$

Então g é de classe C^1 e a matriz jacobiana tem determinante em (x_0, y_0) não nulo,

$$g'(z_0) = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix},$$

e

$$\det g'(x_0, y_0) = \det \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Segue do Teorema da Função Inversa que existe $U \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ vizinhança aberta de (x_0, y_0) tal que $V = g(U)$ é aberto e $g : U \to V$ é difeomorfismo de classe C^1. Se denotarmos por $(\overline{x}, \overline{y}) = g(x, y)$ para $(x, y) \in U$, então

$$(x, y) = g^{-1}(\overline{x}, \overline{y}).$$

Como $\overline{x} = x$ temos que $\overline{y} = F(x, y)$ se, e somente se, $y = g^{-1}(x, \overline{y})$. Em particular,

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g^{-1}(x, 0)$$

e concluímos a prova denotando $\phi(x) = g^{-1}(x, 0)$ para todo $x \in W = U \cap \mathbb{R}^k$.

Referências

[1] W. Rudin, Principles of Mathemacal Analysis. MacGraw-Hill, 1989.